Úvod do matematickej logiky – Cvičenie #10

Anna Kompišová

5. decembra 2019

- Ešte raz sme si pripomenuli sémantiku predikátovej logiky.

  Relačná štruktúra $\mathcal{M}$ obsahuje:

  1. univerzum $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$
  2. n-ánu funkciu $f_{\mathcal{M}} : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ pre každý n-árny funkčný symbol f
  3. n-ány predikát $P_{\mathcal{M}} : \mathcal{U}^n \to \{0, 1\}$ pre každý n-árny predikátový symbol P

  Tejto relačnej štruktúre hovoríme aj realizácia jazyka.

  Aby sme vedeli povedať, o formule či je pravdivá, potrebujeme vedieť hodnoty voľných premenných. Takéto ohodnotenie zvykneme označovať e. Ak je formula pravdivá pre ľubovoľné ohodnotenie, potom hovoríme, že je *splnená* a daná relačná štruktúra je jej *modelom*.

- **Úloha:** Nájdite modely pre nasledujúce formuly:

  A: $(\exists x)P(x)$

  B: $(\forall x)P(x)$

  C: $(\exists x)(\forall y)(Q(x, x) \wedge \neg Q(x, y))$

  D: $(\forall y)(\exists x)(Q(x, x) \wedge \neg Q(x, y))$

  E: $(\exists x)(\forall y)Q(x, y) \to (\forall z)R(x, y, z)$

  F: $(\exists x)(\forall y)(Q(x, y) \to (\forall z)R(x, y, z))$

- **Riešenie:**

  A: $\mathcal{U}_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}, P_{\mathcal{M}} =$množina párnych čísel.

  B: $\mathcal{U}_{\mathcal{M}} = \mathbb{Z}, P_{\mathcal{M}} = \mathbb{Z}$. Formula B vlastne hovorí, že bez ohľadu na to, čo do P dosadím, musí to byť pravdivé. Preto pre všetky modely tejto formuly platí $\mathcal{U}_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}$.

  C: Táto formula nemá model. Ak by malamodel,potom existuje nejaké prvok a,pre ktorý platí $(a, a) \in Q_{\mathcal{M}}$ a zároveň pre ľubovoľný prvok b platí $(a, b) \notin Q_{\mathcal{M}}$. Keďže b je ľubovoľné, môže sa stať, že $b = a$. V tom prípade ale musí platiť, že $(a, a) \in Q_{\mathcal{M}}$ a zároveň $(a, a) \notin Q_{\mathcal{M}}$, čo zjavne nie je možné.

  D: Má model. Zoberme napr. $\mathcal{U}_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}, P_{\mathcal{M}} =$ rovnosť prvkov.

  E: Triviálny model: $Q_{\mathcal{M}} = R_{\mathcal{M}} = \emptyset$. Netriviálny model: $\mathcal{U}_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}, Q(x, y) \mapsto x$ delí y a $R_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}^3$. V tomto prípade bola realizácia R vynútená, lebo premenné x a y sú voľné v $R(x, y, z)$ a keďže predpoklad implikácie môže byť pravdivý a ich premenné sa neprekrývajú, dôsledok musí byť pravdivý vždy.

  F: Obe štruktúry sú modelom aj tejto formuly, ale existujú už aj iné typy modelov, kde realizácie predikátových symbolov Q aj R sú pravdivé len pre niektoré dvojice, resp.trojice prvkov. Napr. majme $\mathcal{U}_{\mathcal{M}} = \{1, 2, 3\}$, $Q_{\mathcal{M}} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ a $R_{\mathcal{M}} = \{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 2), (1, 3, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 3), (2, 1, 3)\}$

- **Úloha:** O každej naledujúcej dvojici teória T a formula A rozhodnite, či každý model T je aj modelom A ($T \models A$).

  1. $T = \emptyset, \qquad A : (\forall x)(x + 0 = x)$
  2. $T = \{(\exists x)S(x), (\exists x)(M(x) \wedge \neg P(x)), (\forall x)(S(x) \to M(x))\}, \qquad A : (\exists x)S(x) \wedge \neg P(x)$
  3. $T = \{(\forall x)(\forall y)(x = y)\}, \qquad A : (\exists x)P(x) \to (\forall x)P(x)$

4. $T = PO = \{(\forall x)\neg(x < x), (\forall x)(\forall y)[(x < y) \to \neg(y < x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x < y) \to ((y < z) \to (x < z))]\}$, $\quad A : (\forall x)(x < c) \to \neg(\exists x)(c < x)$
5. $T = PO \qquad A : \neg(\exists x)(c < x) \to (\forall x)(x < c)$

- **Riešenie:** Riešenie nájdete v riešenej písomke, ktorá je zavesená pri týchto poznámkach.
- Podobne ako vo výrokovej logike platí veta o úplnosti:

$$T \vdash A \Leftrightarrow T \models A$$

Takže by sme pre každú dvojicu z predchádzajúcej úlohy, v ktorej vyšlo $T \models A$ mali vedieť formulu A dokázať z predpokladov T. V ostatných prípadoch sa ani nemusíme snažiť.

- Formálny systém tak, ako sme ho minule definovali ale nebol celkom úplný. Ak máme v jazyku znak $=$, potom s ním nevieme robiť. Dodefinujeme preto ešte ďalšie tri axiómy rovnosti:

$(R1) \qquad x = x$

$(R2) \qquad x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \ldots \to (x_n = y_n \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \ldots)$

$(R3) \qquad x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \ldots \to (x_n = y_n \to (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to P(y_1, y_2, \ldots, y_n))) \ldots)$

Kde $x, x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ sú premenné, f je n-árny funkčný symbol a P je n-árny predikátový symbol.

- **Úloha:** Pre všetky dvojice z predchádzajúcej úlohy, pre ktoré platí $T \models A$ dokážte formulu A z predpokladov T.
- **Riešenie:** Riešenie opäť nájdete v starej písomke, zavesenej hneď vedľa poznámok.