Úvod do matematickej logiky – Cvičenie #11

Anna Kompišová

6. decembra 2019

- Prvú časť cvika sme venovali prenexnému normálnemu tvaru. Formula je v *prenexnom normálnom tvare*, ak je tvaru

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_nx_n)\varphi$$

kde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ a formula φ už neobsahuje žiaden kvantifikátor. Formule φ tiež hovoríme otvorené jadro.

- Ku každej formule existuje ekvivalentná, ktorá je v prenexnom normálnom tvare. Na dosiahnutie prenexného tvaru formuly používame prenexné operácie:

1. $(Qx)\neg A \leftrightarrow \neg(\overline{Q}x)A$
2. $(Qx)(A \to B) \leftrightarrow (A \to (Qx)B)$, kde x nie je voľné v A.
3. $(Qx)(A \to B) \leftrightarrow ((\overline{Q}x)A \to B)$, kde x nie je voľné v B.
4. $(Qx)(A \diamondsuit B) \leftrightarrow (A \diamondsuit (Qx)B)$, kde x nie je voľné v A.
5. $(Qx)(A \diamondsuit B) \leftrightarrow ((Qx)A \diamondsuit B)$, kde x nie je voľné v B.
6. *Veta o variantoch*: Nech A' je variant A (v A sa premenovali premenné viazané nejakým kvantifikátorom), potom $\vdash A \leftrightarrow A'$.

$\diamondsuit \in \{\wedge, \vee\}$, $Q \in \{\forall, \exists\}$ a ak $Q = \forall$, potom $\overline{Q} = \exists$ a naopak.

- **Úloha:** Nájdite prenexný normálny tvar pre formuly:

a) $(\forall y)\big((\forall x)P(x,y) \to (\exists z)R(y,z)\big)$

b) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \vee \neg(\exists y)\big(R(y) \to (\forall z)T(z)\big)$

c) $(\forall w)\neg\Big((\exists x)(\exists y)(\forall z)\big(P(x,z) \to R(y,z)\big) \wedge (\exists z)P(w,z)\Big)$

- **Riešenie:** Pri riešení budem podčiarknutím označovať kvantifikátory, ktoré presuniem najbližšie.

Ako prvý krok sa odporúča vždy, keď je to nutné najprv premenovať premenné tak, aby každý kvantifikátor kvantifikoval inú premennú a aby kvantifikované premenné boli iné, ako voľné premenné.

a) V tomto prípade nemusíme premenovávať žiadne premenné.

$$\begin{array}{lll}
1. & (\forall y)\big((\forall x)P(x,y) \to \underline{(\exists z)}R(y,z)\big) & \\
2. & (\forall y)(\exists z)\big(\underline{(\forall x)}P(x,y) \to R(y,z)\big) & \text{(pravidlo 2)} \\
3. & (\forall y)(\exists z)(\exists x)\big(P(x,y) \to R(y,z)\big) & \text{(pravidlo 3)}
\end{array}$$

b) Najprv premenujeme jednu z premenných y.

$$\begin{array}{llr}
1. & (\exists x)(\forall y)P(x,y) \vee \neg(\exists y)\big(R(y) \to (\forall z)T(z)\big) & \\
2. & (\exists x)(\forall y)P(x,y) \vee \neg(\exists w)\big(R(w) \to \underline{(\forall z)}T(z)\big) & \text{(variant)} \\
3. & (\exists x)(\forall y)P(x,y) \vee \neg\underline{(\exists w)(\forall z)}\big(R(w) \to T(z)\big) & \text{(pravidlo 2)} \\
4. & \underline{(\exists x)}(\forall y)P(x,y) \vee (\forall w)(\exists z)\neg\big(R(w) \to T(z)\big) & (2 \times \text{pravidlo 1}) \\
5. & (\exists x)\Big(\underline{(\forall y)}P(x,y) \vee (\forall w)(\exists z)\neg\big(R(w) \to T(z)\big)\Big) & \text{(pravidlo 5)} \\
6. & (\exists x)(\forall y)\Big(P(x,y) \vee \underline{(\forall w)}(\exists z)\neg\big(R(w) \to T(z)\big)\Big) & \text{(pravidlo 5)} \\
7. & (\exists x)(\forall y)(\forall w)\Big(P(x,y) \vee \underline{(\exists z)}\neg\big(R(w) \to T(z)\big)\Big) & \text{(pravidlo 4)} \\
8. & (\exists x)(\forall y)(\forall w)(\exists z)\Big(P(x,y) \vee \neg\big(R(w) \to T(z)\big)\Big) & \text{(pravidlo 4)}
\end{array}$$

c) Najprv premenujeme jednu z premenných z.

1. $(\forall w)\neg\Big((\exists x)(\exists y)(\forall z)\big(P(x,z)\to R(y,z)\big)\wedge(\exists z)P(w,z)\Big)$
2. $(\forall w)\neg\Big(\underline{(\exists x)(\exists y)(\forall u)}\big(P(x,u)\to R(y,u)\big)\wedge(\exists z)P(w,z)\Big)$ (variant)
3. $(\forall w)\neg(\exists x)(\exists y)(\forall u)\Big(\big(P(x,u)\to R(y,u)\big)\wedge\underline{(\exists z)}P(w,z)\Big)$ (3 × pravidlo 5)
4. $(\forall w)\neg\underline{(\exists x)(\exists y)(\forall u)(\exists z)}\Big(\big(P(x,u)\to R(y,u)\big)\wedge P(w,z)\Big)$ (pravidlo 4)
5. $(\forall w)(\forall x)(\forall y)(\exists u)(\forall z)\neg\Big(\big(P(x,u)\to R(y,u)\big)\wedge P(w,z)\Big)$ (4 × pravidlo 1)

- Zopakovali sme si vety, ktoré sa opatí vedieť pri dokazovaní, lebo veľmi uľahčujú prácu:
  - *Pravidlo zavedenia* $\forall$: Ak $\vdash A\to B$ a x nie je voľné v A, tak $\vdash A\to(\forall x)B$.
  - *Pravidlo zavedenia* $\exists$: Ak $\vdash A\to B$ a x nie je voľné v B, tak $\vdash(\exists x)A\to B$.
  - *Distribúcia* $\forall$: Ak $\vdash A\to B$, tak $\vdash(\forall x)A\to(\forall x)B$.
  - *Distribúcia* $\exists$: Ak $\vdash A\to B$, tak $\vdash(\exists x)A\to(\exists x)B$.
  - *Duálna forma axiómy špecifikácie:* $\vdash A_x[t]\to(\exists x)A$, kde t neobsahuje premennú, ktorá zostane viazaná.
  - *Lema o inštanciách*: Nech A' je inštancia formuly A, t.j. A' je tvaru $A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$. Potom ak $\vdash A$, tak $\vdash A'$.
  - *Veta o variantoch* (viď vyššie)
  - *Veta o uzávere*: Nech A' je uzáver A, t.j. všetky voľné premenné v A sa najprv kvantifikujú všeobecným kvantifikátorom. Potom $\vdash A$ práve vtedy, keď $\vdash A'$.
  - *Veta o ekvivalencií*: Nech $\vdash A_i\leftrightarrow A_i'$. Ak A' vznikne z A nahradním podformúl A_i formulami A_i', tak $\vdash A\leftrightarrow A'$.

  Pri používaní prvých štyroch tvrdení si treba dať pozor na používanie vety o dedukcií, lebo v dôkazoch všetkých štyroch tvrdení sa použije pravidlo generalizácie na premennú x.

- Na záver sme si definovali Robinsonovú aritmetiku, t.j. teóriu v predikátovej logike s rovnosťou a so špeciálnymi funkčnými symbolmi $0,+$ a $\cdot$. Robinsonova aritmetika má nasledovné axiomy:

(Q1)	$(\forall x)(\forall y)(S(x)=S(y)\to x=y)$	(Q4)	$(\forall x)(x+0=x)$
(Q2)	$(\forall x)\neg(S(x)=0)$	(Q5)	$(\forall x)(\forall y)(x+S(y)=S(x+y))$
(Q3)	$(\forall x)(\neg(x=0)\to(\exists y)(x=S(y)))$	(Q6)	$(\forall x)(x\cdot 0=0)$
		(Q7)	$(\forall x)(\forall y)(x\cdot S(y)=x\cdot y+x)$

- Definujme $\overline{k}=\underbrace{S.....S}_{k}(0)$. Ak jazyk Robinsonovej aritmetiky interpretujeme tak, že za univerzum zvolíme $\mathbb{N}$, 0 interpretujeme ako nulu, štandardne interpretujeme plus a krát a funkciu S ako $+1$, tak $\overline{k}$ bude prirodzené číslo k a budú sa dať dokázať všetky konkrétne rovnosti $\overline{k}+\overline{\ell}=\overline{k+\ell}$ a $\overline{k}\cdot\overline{\ell}=\overline{k\cdot\ell}$. My skúsime dokázať $\overline{1}+\overline{1}=\overline{2}$.
- **Úloha:** Dokážte formulu $S(0)+S(0)=S(S(0))$ v Robinsonovej aritmetike.
- **Riešenie:** Nájdete v prvej úlohe záverečnej písomky z roku 2012/2013.
- **Úloha:** V Robinsonovej aritmetike dokážte $\vdash(\forall x)[(\forall y)\neg(x=S(y))\to(\forall y)(y+x=y)]$
- **Riešenie:**

1.	$(\forall y)\neg(x = S(y))$	$\vdash$	$(\forall y)\neg(x = S(y))$	(predpoklad)
2.		$\vdash$	$(\forall x)[\neg(x = 0) \to (\exists y)(x = S(y))]$	($Q3$)
3.		$\vdash$	$\neg(x = 0) \to (\exists y)(x = S(y))$	(AŠ $x := x$)
4.		$\vdash$	$\neg(\exists y)(x = S(y)) \to (x = 0)$	(obmena)
5.		$\vdash$	$(\forall y)\neg(x = S(y)) \to (x = 0)$	(prenexna operacia)
6.	$(\forall y)\neg(x = S(y))$	$\vdash$	$x = 0$	(MP 1,5)
7.		$\vdash$	$y = y \to (x = 0 \to (y + x = y + 0))$	(R2)
8.	$(\forall y)\neg(x = S(y))$	$\vdash$	$y + x = y + 0$	(MP 7 s R1 a s 6)
9.		$\vdash$	$y + 0 = y$	(Q4 + AŠ x:=y)
10.	$(\forall y)\neg(x = S(y))$	$\vdash$	$y + x = y$	(tranzitivita =)
11.	$(\forall y)\neg(x = S(y))$	$\vdash$	$(\forall y)(y + x = y)$	(PG na y)
12.		$\vdash$	$(\forall y)\neg(x = S(y)) \to (\forall y)(y + x = y)$	(VD)
13.		$\vdash$	$(\forall x)[(\forall y)\neg(x = S(y)) \to (\forall y)(y + x = y)]$	(PG)