Úlohy k cvičeniu č. 3

Veta 1 (Pravidlo súčtu)**.** *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú po dvoch disjunktné konečné množiny. Nech X je ich zjednotenie,*

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = \bigcup_{k=1}^{n} X_k.$$

Potom

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n| = \sum_{k=1}^{n} |X_k|.$$

1. Medveď si môže dať na obed buď jednu z 50 (rozlíšiteľných) oviec alebo jedného z troch (rozlíšiteľných) valachov (nie však oboje naraz). Z koľkých možností si môže vybrať dohromady?
2. Pod grúňom sa pasú dve čriedy o n ovciach a jedna črieda o m ovciach (všetky ovce sú navzájom rozlíšiteľné). Koľko možností má medveď, keď chce zjesť práve jednu ovcu?

Veta 2 (Pravidlo súčinu)**.** *Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú ľubovoľné konečné množiny. Potom*

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n| = \prod_{k=1}^{n} |X_k|.$$

3. Háďžeme troma kockami rôznych farieb. Koľko môže padnúť rôznych trojíc čísel?
4. Najnovší model lopaty vyrábajú v šiestich výkonnostných a v troch energetických kategóriách, pričom ku každej z výkonnostných kategórií je k dispozícii každá z energetických kategórií. Koľko variantov je na trhu celkovo?
5. Medveď sa ráno zdržuje pri salaši S_1, na obed pri salaši S_2 a večer pri salaši S_3. Na salaši S_1 majú tridsať oviec, na salaši S_2 sto oviec a na salaši S_3 päťdesiat oviec (všetky ovce sú rozlíšiteľné). Medveď si chce dať na raňajky, obed aj večeru práve jednu ovcu. Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii?
6. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel.
7. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry a najviac päť cifier.
8. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry, najviac päť cifier a rovnaké posledné dve cifry.
9. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b?
10. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré buď začínajú na a, alebo súčasne nezačínajú na a a končia na c?
11. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena b a žiaden ďalší výskyt písmena b?
12. Nájdite počet (nenulových prirodzených) deliteľov čísla $3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^8$.
13. Nájdite počet (nenulových prirodzených) deliteľov čísla $3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6$.
14. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel, ktoré majú všetky cifry rôzne.
15. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú každé z písmen aspoň raz?

Definícia 1. Nech $A = \{1, \dots, n\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = m$. *Variáciou s opakovaním n-tej triedy z m prvkov množiny B* nazveme ľubovoľné zobrazenie $f\colon A \to B$, čiže prvok množiny B^A.

Veta 3 (Pravidlo mocnenia)**.** *Nech A, B sú ľubovoľné konečné množiny, $|A| = n$, $|B| = m$. Potom $|B^A| = |B|^{|A|} = m^n$.*

V kombinatorike väčšinou pracujeme s konvenciou $0^0 = 1$ – pravidlo mocnenia tak dáva zmysel aj pre $n = m = 0$, čo súhlasí so skutočnosťou, že existuje jediné zobrazenie medzi dvoma prázdnymi množinami.

Dôsledok 1. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = m$. Nech $n \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií s opakovaním n-tej triedy z m prvkov množiny B je m^n.*

16. Pod grúňom je 10 salašov a na každom majú 50 (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).
17. Pod grúňom je n salašov a na každom majú m (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).
18. Nech $n \in \mathbb{N}$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$?
19. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b?
20. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré končia trojicou rovnakých písmen?
21. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú práve jeden výskyt písmena c?
22. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel.
23. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých párnych n-ciferných čísel.
24. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel deliteľných číslom 4.
25. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel deliteľných číslom 5.

Nech A je konečná množina. Zjavne existuje bijekcia medzi podmnožinami množiny A a zobrazeniami $f\colon A \to \{0, 1\}$: ku každej podmnožine $B \subseteq A$ totiž môžeme definovať jej *charakteristické zobrazenie* $\chi_B\colon A \to \{0, 1\}$ ako

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in B \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \qquad \text{pre všetky } x \in A$$

a naopak, ku každému zobrazeniu $f\colon A \to \{0, 1\}$ vieme definovať jeho *nosič* ako množinu

$$\operatorname{supp}(f) = \{x \in A \mid f(a) \neq 0\}.$$

Ľahko vidieť, že obe priradenia $B \mapsto \chi_B$ a $f \mapsto \operatorname{supp}(f)$ sú injektívne (v skutočnosti ide dokonca o navzájom inverzné bijekcie). Podmnožín konečnej množiny A je teda presne toľko, čo prvkov množiny $\{0, 1\}^A$. Z pravidla mocnenia potom dostávame:

Dôsledok 2. *Nech A je ľubovoľná konečná množina taká, že $|A| = n$. Potom*

$$|\mathscr{P}(A)| = |\{0, 1\}^A| = 2^{|A|} = 2^n.$$

Z tohto dôvodu sa potenčná množina $\mathscr{P}(A)$ často zvykne označovať aj ako 2^A.

26. Koľkými spôsobmi môže vlčia svorka zjesť bližšie neurčený počet z celkového počtu 100 (rozlíšiteľných) oviec?

Veta 4 (Pravidlo rozdielu)**.** *Nech A, U sú ľubovoľné konečné množiny také, že $A \subseteq U$. Potom*

$$|U \setminus A| = |U| - |A|.$$

27. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré nekončia trojicou rovnakých písmen?

28. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré neobsahujú práve jeden výskyt písmena c?

29. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 4.

30. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 5.

31. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré obsahujú aspoň jednu z cifier $\{1, 3, 7\}$.