Úlohy k cvičeniu č. 5

Nasledujúce identity je zväčša možné dokázať dvoma principiálne odlišnými spôsobmi: algebraickou manipuláciou alebo kombinatorickou interpretáciou. Hoci nemusí byť na škodu vyriešiť niekoľko úloh aj algebraicky, cieľom je predovšetkým precvičenie *kombinatorických dôkazov*. Takýto kombinatorický dôkaz spočíva v identifikácii vhodných tried kombinatorických konfigurácií, ktorých počet je daný ľavou a pravou stranou identity a v následnom pozorovaní, že medzi týmito triedami existuje bijekcia. Preto sa často hovorí aj o *bijektívnych dôkazoch*.

1. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ platí
$$2\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}.$$

3. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí
$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}.$$

4. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí
$$(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}.$$

5. Dokážte, že pre všetky $n, m, k \in \mathbb{N}$ platí
$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m}.$$

6. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
$$3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3 = \binom{3n}{3}.$$

7. Dokážte, že pre všetky $n, r, s, t \in \mathbb{N}$ platí
$$\binom{n}{r}\binom{r}{t}\binom{n-r}{s-t} = \binom{n}{s}\binom{s}{t}\binom{n-s}{r-t}.$$

8. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

9. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

10. Dokážte *Vandermondovu identitu*: pre všetky $n, m, r \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

11. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \binom{j}{k} = 2^{n-k} \binom{n}{k}.$$

12. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

13. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

14. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

15. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n-k}{k} = F_{n+1},$$

kde F_{n+1} je $(n+1)$-vé Fibonacciho číslo.