Úlohy k cvičeniu č. 9

Definícia 1. Nech $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sú funkcie. Potom píšeme:

(*i*) $f(n) = O(g(n))$, ak existuje $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$.

(*ii*) $f(n) = \Omega(g(n))$, ak $g(n) = O(f(n))$.

(*iii*) $f(n) = \Theta(g(n))$ alebo $f(n) \asymp g(n)$, ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $g(n) = O(f(n))$.

(*iv*) $f(n) = o(g(n))$, ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

(*v*) $f(n) = \omega(g(n))$, ak $g(n) = o(f(n))$.

(*vi*) $f(n) \sim g(n)$, ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Uvedenú definíciu možno rozšíriť aj na funkcie $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – v takom prípade je možné študovať asymptotické vlastnosti funkcií nielen pre $x \to \infty$, ale aj pre $x \to a$, kde a je ľubovoľný prvok rozšírenej reálnej osi.

Aj keď je horeuvedená definícia sformulovaná pre ľubovoľné $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, zvyčajne budeme pracovať s funkciami, ktoré sú nezáporné pre všetky alebo takmer všetky n. (Hovoríme, že nejaké tvrdenie platí *pre takmer všetky* $n \in \mathbb{N}$, ak platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$ až na konečný počet výnimiek. Inak povedané, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že vlastnosť platí pre všetky $n \geq n_0$.) V takom prípade možno bod (*i*) preformulovať aj bez použitia absolútnych hodnôt.

1. Dokážte alebo vyvráťte:
   a) $n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = O(n^3)$.
   b) $n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = \Theta(n^3)$.
   c) $n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = o(n^3)$.
   d) $n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 \sim n^3$.

2. Dokážte alebo vyvráťte:
   a) $n^2 = O(n^3)$.
   b) $n^2 = \Theta(n^3)$.
   c) $n^2 = o(n^3)$.
   d) $n^2 \sim n^3$.

3. Dokážte alebo vyvráťte:
   a) $2\log n = O(\log n)$.
   b) $2\log n = \Theta(\log n)$.
   c) $2\log n = o(\log n)$.
   d) $2\log n \sim \log n$.

4. Dokážte alebo vyvráťte:
   a) $2\log n = O(n)$.
   b) $2\log n = \Theta(n)$.
   c) $2\log n = o(n)$.
   d) $2\log n \sim n$.

5. Dokážte alebo vyvráťte:
   a) $2^{n+1} = \Theta(2^n)$.
   b) $2^{2n} = \Theta(2^n)$.

6. Nech $x, y \in \mathbb{R}$. Ak $n^x = \Theta(n^y)$, tak $x = y$. Dokážte.

7. Dokážte alebo vyvráťte:
   a) $\log n = O(\sqrt{n})$.
   b) $\log n = \Theta(\sqrt{n})$.
   c) $\log n = o(\sqrt{n})$.
   d) $\log n \sim \sqrt{n}$.
8. Dokážte alebo vyvráťte:
   a) $2^n + (-1)^n 2^n = O(2^n)$.
   b) $2^n + (-1)^n 2^n = \Theta(2^n)$.
9. Dokážte alebo vyvráťte:
   a) $n! = O(2^n)$.
   b) $2^n = O(n!)$.
10. Dokážte alebo vyvráťte:
    a) $n! = O(n^n)$.
    b) $n^n = O(n!)$.
11. Dokážte alebo vyvráťte: $F_n = \Theta([(1+\sqrt{5})/2]^n)$.
12. Zistite, či existuje konštanta $a \in \mathbb{R}$ taká, že $\log n = \Theta(n^a)$.
13. Nech $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sú funkcie. Dokážte alebo vyvráťte:
    a) Ak $f(n) = O(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$.
    b) Ak $f(n) = o(g(n))$, tak $f(n) = O(g(n))$.
    c) Ak $f(n) = \Theta(g(n))$, tak $f(n) \sim g(n)$.
    d) Ak $f(n) \sim g(n)$, tak $f(n) = \Theta(g(n))$.
14. Dokážte alebo vyvráťte:
    a) Pre ľubovoľné $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ platí buď $f(n) = O(g(n))$, alebo $g(n) = O(f(n))$.
    b) Pre ľubovoľné rastúce $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ platí buď $f(n) = O(g(n))$, alebo $g(n) = O(f(n))$.
15. Nech $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sú funkcie. Dokážte, že $f(n) = o(g(n))$ práve vtedy, keď pre všetky $c > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$.
16. Nech $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je funkcia taká, že $f(n) = O(2^n)$. Dokážte alebo vyvráťte:
    a) $2^n + |f(n)| = O(2^n)$.
    b) $|2^n - |f(n)|| = O(2^n)$.
17. Nech $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je funkcia taká, že $f(n) = \Theta(2^n)$. Dokážte alebo vyvráťte:
    a) $2^n + |f(n)| = \Theta(2^n)$.
    b) $|2^n - |f(n)|| = \Theta(2^n)$.
18. Dokážte, že platí
$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \Theta(n^{3/2}).$$