Príklady na cvičenia z Teórie Grafov

M. Škoviera a E. Ričányová

25.11.2003

Príklad 1. Dokážte, že platí $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(V)|$.

Príklad 2. Dokážte, že v každom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa párny.

Príklad 3. Dokážte, že v každom netriviálnom jednoduchom grafe existujú aspoň dva vrcholy s rovnakým stupňom.

Príklad 4. Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v súvilom grafe majú spoločný vrchol. Majú spoločnú aj hranu?

Príklad 5. Určte Ramseyovo číslo $R(3, 3)$.

Príklad 6. Dokážte, že každý graf G obsahuje cestu dĺžky $\delta(G)$ a kružnicu dĺžky aspoň $\delta(G) + 1$ (pre $\delta(G) \geq 2$).

Príklad 7. Dokážte, alebo vyvráťte naledujúce tvrdenia:
Každý uzavretý sled párnej dĺžky obsahuje kružnicu párnej dĺžky.
Každý uzavretý sled nepárnej dĺžky obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.

Príklad 8. Dokážte, že v ľubovoľnom grafe platí

$$\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2\mathrm{rad}(G).$$

Príklad 9. Dokážte, že komplementárny graf k nesúvislému grafu je súvislý.

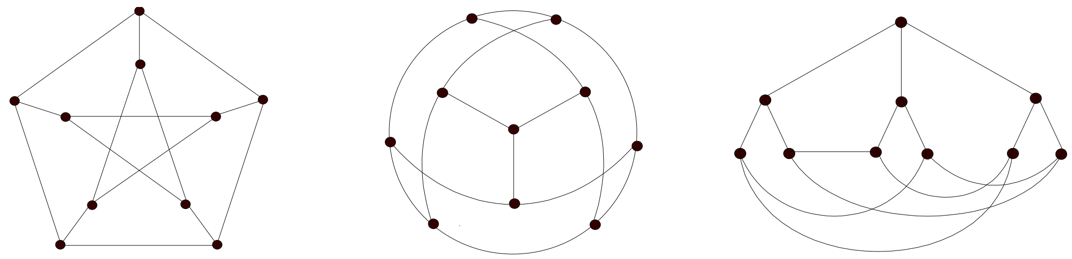
Príklad 10. Určite priemerný stupeň, počet hrán, priemer, polomer, obvod a dĺžku najdlhšej kružnice v n-rozmernej kocke. Koľko rôznych najkratších ciest existuje medzi danými dvomi vrcholmi v n-rozmernej kocke?

Príklad 11. Dokážte, že každý súvislý netriviálny graf obsahuje vrchol, ktorý nie je artikuláciou.

Príklad 12. Dokážte, že
a) pre každý jednoduchý graf o n vrcholoch, e hranách a k komponentoch platí $n - k \leq e \leq (n - k + 1)(n - k)/2$ a
b) pre všetky l také, že $n - k \leq l \leq (n - k + 1)(n - k)/2$ existuje jednochý graf o n vrcholoch, l hranách a k komponentoch.

Príklad 13. Dokážte, že ak G je jednoduchý graf s $\delta(G) \geq (n - 1)/2$, potom je súvislý.

Príklad 14. Sú nasledujúce tri grafy izomorfné? Ak áno, tak nájdite medzi nimi izomorfizmus.



Príklad 15. Koľko je navzájom neizomoirfných očíslovvaní kružnice rádu n?

Príklad 16. Dokážte, že centrum v ľubovoľnom strome obsahuje buď jeden vrchol, alebo dva susedné vrcholy. Od čoho závisí, ktorá z predchádzajúcich možností nastala?

Príklad 17. Dokážte, že ak G je samokomlementárny graf rádu n, tak $n = 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ alebo $n = 1 (\mathrm{mod}\ 4)$. Nájdite aspoň 3 samokomplementárne grafy. Nepovinne: Existujú pre všetky n také, že $n = 0(\text{mod } 4)$ alebo $n = 1(\text{mod } 4)$ samokomplementárne grafy o n vrcholoch?

Príklad 18. (Nepovinna časť predošlej domácej úlohy.) Existujú pre všetky n také, že $n = 0(\text{mod } 4)$ alebo $n = 1(\text{mod } 4)$ samokomplementárne grafy o n vrcholoch?

Definícia. Nech je daná konečná postupnosť celých, nezáporných čísel $s_1, s_2, \cdots s_n$ taká, že $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n$. Ak existuje graf G bez slučiek s n vrcholmi $v_1, v_2, \cdots v_n$, taký že vrchol v_i je stupňa s_i, tak túto postupnosť nazývame **grafová**.

Príklad 19. Sú postupnosti stupňov vrcholov $8, 6, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 0, 0, 0$ a $7, 6, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 0, 0, 0$ grafové? Ak áno, zostrojte graf s takýmito stupňami vrcholov.

Príklad 20. Dokážte, že postupnosť $s_1, s_2, \cdots s_n$ celých nezáporných čísel taká, že $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n$ je grafová práve vtedy, keď je postupnosť $s_2 - 1, s_3 - 1, \cdots, s_{s_1+1} - 1, s_{s_1+2}, \cdots, s_n$ grafová.

Príklad 21. Dokážte, že ak $\text{diam}(G) > 3$, tak $\text{diam}(\bar{G}) < 3$. Ako sa zmení platnosť tohto tvrdenia, keď ostré nerovnoti zameníme za neostré?

Definícia. Dominujúca množina D grafu G je taká podmnožina vrcholov, že platí: $(\forall v \in V(G))((v \notin D) \Rightarrow \exists u \in D : vu \in E(G)))$.

Príklad 22. Dokážte, že v každom súvislom grafe existuje dominujúca množina, ktorej doplnok je dominujúca množina.

Príklad 23. Nech M a N sú disjunktné párenia grafu G, pričom platí $|M| > |N|$. Ukážte, že existujú disjunktné párenia M' a N' grafu G s nasledujúcimi vlastnosťami:
(1) $|M'| = |M| - 1$
(2) $|N'| = |N| + 1$
(3) $M' \cup N' = M \cup N$.

Príklad 24. Graf G je zjednotením dvoch hranovo disjunktných kostier. Je hranovo 2-súvislý? Je 2-súvislý?
(Graf G má k hranovo disjunktných kostier $\Rightarrow$ je hranovo k-súvislý. Opačná implikácia neplatí (koleso))

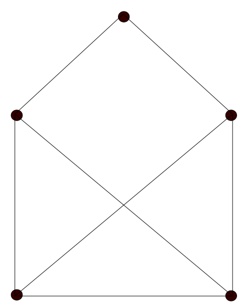
Príklad 25. Ukážte, že v každom kubickom grafe platí $\lambda(G) = \kappa(G)$

Príklad 26. Dokážte, že ak je G kubický bipartitný graf, tak potom nemá most.

Príklad 27. Nech A je matica susednosti jednoduchého grafu, $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{k}$. Dokážte, že $a^k_{i,j}$ je rovný počtu sledov dĺžky k, spájajúcich vrcholy v_i a v_j. Platí toto tvrdenie pre ľubovoľný graf (s násobnými hranami a slučkami)?

Príklad 28. Dokážte, že každý strom má nanajvýš jeden 1-faktor.

Príklad 29. Koľko kostier má graf na obrázku?



Príklad 30. Ukážte, že hranová súvislosť $\lambda(G)$ kompletného grafu je $n-1$.

Príklad 31. Dokážte, že graf G je 2-súvislý práve vtedy, keď ľubovolné jeho dva vrcholy ležia na nejakej spolocnej kružnici.

Príklad 32. Dokážte, že ak G je k-súvislý, tak potom aj hranový graf $L(G)$ je k-súvislý.

Príklad 33. Dokážte, že každý jednoduchý kubický graf obsahuje kostru, ktorej doplnok je acyklický.

Definícia. **Kontrakcia** je postpnosť elementárnych kontrakcí. Pri **silnej kontrakcii** odstraňujeme slučky a násobné hrany, pri **slabej kontrakcii** ich ponechávame.

Príklad 34. Dokážte, že vzor súvislého grafu je súvislý graf pri silnej i slabej kontrakcii.

Príklad 35. Dokážte, že slabá kontrakcia zachováva dimenziu cyklového priestoru grafu.

Príklad 36. Nech $k \geq 2$. Ukážte, že každý k-súvislý graf s počtom vrcholov aspon $2k$ obsahuje kružnicu dĺžky aspoň $2k$.

Definícia. Majme grupu $(G, \circ)$ a množinu X takú, že $X \subseteq G$. Nech pre množinu X platí,
1) $e \notin X$
2) $x \in X \Rightarrow x^{-1} \in X$
3) $\langle X \rangle = G$
Potom **Cayleyho graf** $C(G, X)$ generovaný grupou G a množinou X je taký graf, že $V(C) = G$ a $ab \in E(C) \Leftrightarrow a^{-1} \circ b \in X$.

Príklad 37. Dokážte, že každý Cayleyho graf je súvislý.

Príklad 38. Dokážte, že graf sa dá rozložiť na cesty dĺžky 2 práve vtedy, keď má párny počet hrán.

Príklad 39. Nakreslite Cayleyho graf $C(C_3, \{(123), (132), (12)(3)\}$.

Definícia. Graf G sa nazýva **vrcholovo tranzitívny**, ak pre ľubovoľnú dvojicu $u, v \in V(G)$ platí, že existje automorfizmus φ grafu G taký, že $\varphi(u) = v$.

Príklad 40. Dokážte, že každý Cayleyho graf je vrcholovo tranzitívny.

Príklad 41. Je každý Cayleyho graf $C(G, X)$ regulárny? Ak je, tak ktorého stupňa?

Príklad 42. Je každý modifikoaný Cayleyho graf $C'(G, X)$ regulárny? Ak je, tak ktorého stupňa? (Definícia modifikovaného Cayleyho grafu je rovnaká, ako Cayleyho grafu, ale na množinu X nekladieme požiadavku 2)).

Definícia. Počet komponentov grafu G s nepárny počtom vrcholov označujeme $q(G)$.

Príklad 43. Dokážte, že strom T má 1-faktor práve vtedy, keď $(\forall v \in V(T))(q(T-v) = 1)$.

Príklad 44. Dokážte, že graf, ktorý má most nemá 1-faktorizáciu (okrem triviálneho prípadu, že graf sám je 1-faktorom).

Príklad 45. Určte chromatické čísla grafov $K_{n,n,n}$ a Pg.

Definícia. Graf G je **k-kritický** ak

$$(\chi(G) = k) \text{ a } (\forall v \in V(G))(\chi(G - v) < k)$$

Príklad 46. Dokážte, že pre každý k-kritický graf platí $\delta(G) \geq k - 1$.

Príklad 47. Dokážte, že ak $\chi(G) \geq k$ tak v grafe G existuje aspoň k vrcholov stupňa $\geq k - 1$.

Príklad 48. Dokážte, že v k-kritickom grafe žiaden vrcholový rez neindukuje kliku.

Dôsledok. Kritický graf nemá artikulácie.

Príklad 49. Dokážte, že ak T a R sú kostry v-vrcholového grafu G, tak existuje postupnosť kostier,

$$T = T_0, T_1, \dots, T_n = R,$$

kde T_i a T_{i+1} majú $v-2$ spoločných hrán pre $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Príklad 50. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce implikácie
1) Graf G je eulerovský $\Rightarrow$ graf $L(G)$ je eulerovský.
2) Graf $L(G)$ je eulerovský $\Rightarrow$ graf G je eulerovský.

Príklad 51. Ukážte, že ak u a v sú 2 rôzne vrcholy kritického grafu tak platí $N_G(u) \not\subseteq N_G(v)$ a $N_G(v) \not\subseteq N_G(u)$.

Príklad 52. Odvoďte pomocou predchádzajúceho príkladu, že k-kritický graf nemôže mať práve $k+1$ vrcholov.

Definícia. Chromatická funkcia $f(G,t)$ je rovná počtu regulárnych t-zafarbení grafu G.

Príklad 53. Určte $f(\bar{K}_n, t)$ a $f(K_n, t)$.

Príklad 54. Nech $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ je disjunktné zjednotenie grafov a hodnoty $f(G_i, t)$ sú známe pre $i = 1, \cdots, k$. Určte $f(G,t)$.

Príklad 55. Nech $G = G_1 \cup G_2$ a $G_1 \cap G_2 = v$ a hodnoty $f(G_1, t)$ a $f(G_2, t)$ sú známe. Určte $f(G,t)$.

Príklad 56. Dokážte nasledujúce tvvrdenie: Nech u a v sú dva nesusedné vrcholy grafu G. Nech $G_1 = G + uv$ a nech G_2 vznikne z G stotožnením vrcholov u a v. Potom $f(G,t) = f(G_1,t) + f(G_2,t)$.

Dôsledok. Chromatická funkcia každého grafu sa rovná súčtu chromatických funkcií istého počtu kompletných grafov, pričom ich rády neprevyšujú rád grafu G.

Dôsledok. Chromatická funkcia $f(G,t)$ ľubovoľného grafu G je polymóm v premennej t.

Príklad 57. Dokážte, že platí rovnosť $\chi(F \Box H) = \max\{\chi(\mathrm{F}), \chi(\mathrm{H})\}$.

Tvrdenie. Chromatický polynóm grafu G rádu n s m hranami a k súvislými komponentmi má tvar

$$f(G,t) = t^n - mt^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} - a_{n-3}t^{n-3} + \dots + (-1)^{n-k}a_k t^k,$$

kde a_i sú celé nezáporné čísla.

Príklad 58. Dokážte, že súčet koeficientov chromatického polynómu je nulový pre $G \neq K_n$

Príklad 59. Dokážte, že graf G rádu n je strom práve vtedy keď $f(G,t) = t(t-1)^{n-1}$.

Príklad 60. Dokážte, že pre ľubovoľný graf G rádu n platí: $n/\alpha \le \chi(G) \le n - \alpha + 1$.

Príklad 61. Dokážte, že ak G je r-regulárny graf nepárnaho rádu, tak $\chi'(G) = r+1$.

Príklad 62. Určte chromatický index kompletného grafu K_n.

Príklad 63. Dokážte, že pre kubický graf G sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:
1) $\chi'(G) = 3$
2) G má párny 2-faktor
3) pre každú hranu e grafu G existuje párny 2-faktor grafu G, ktorý obsahuje túto hranu.

Dôsledok. Ak G je kubický a má most, tak $\chi'(G) = 4$.

Príklad 64. Dokážte, že ak G je jednoduchý kubický bipartitný graf, tak nemá most.

Príklad 65. Dokážte, žé bipartitný hamiltonovský graf má obe partie rovnakej veľkosti.

Príklad 66. Dokážte, že ak G je hamiltonovský alebo eulerovský graf, tak hranový graf $L(G)$ je hamiltonovský.

Definícia. Graf sa nazýva jednoznačne hranovo k-zafarbiteľný, ak pre káždé dve zafarbenia platí, že môžeme dostať jedno z druhého permutáciou farieb.

Príklad 67. Dokážte, že ak G je jednoznačne hranovo 3-zafarbiteľný kubický graf, tak zjednotenie ľubovoľných dvoch farebných tried tvorí Hamiltonovskú kružnicu.

Príklad 68. Dokážte, že každý graf, ktorý má hamiltonovskú kružnicu má (nikde nulový) 4-tok.

Príklad 69. *Paritná lema.* Nech G je kubický graf hranovo zafarbený tromi farbami 1, 2, 3 a $S \subseteq E(G)$ je hranový rez grafu G, $|S| = n$ a n_i je počet hrán z S farby i. Potom $n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv n(\text{mod } 2)$.

Príklad 70. Určte tokové číslo grafu $C_n * K_1$ pre ľubovoľné n.

Príklad 71. Určte maximálny tok v sieti na obr. ?

Príklad 72. Nech G je 3-súvislý graf a nech xy je jeho hrana. Ukážte, že G/xy je 3-súvislý práve vtedy, keď $G \setminus \{x, y\}$ je 2-súvislý.

Príklad 73. Dokážte, že graf je k-zafarbiteľný práve vtedy, keď je k -zafarbiteľný každý jeho blok.

Príklad 74. Dokážte, že Petersenov graf nie je hranovo 3-zafarbiteľný.

Príklad 75. Dokážte, že ak $\delta(G) \geq 1/2|V(G)|$, tak $\lambda(G) = \delta(G)$. Nájdite graf G s $\delta(G) \leq 1/2|V(G)| - 1$,taký, že $\lambda(G) < \delta(G)$.

Príklad 76. Nech $k \geq 1$. Ukážte, že každý k-súvislý graf s počtom vrcholov aspoň $2k$ obsahuje kružnicu dĺžky aspoň $2k$.

Príklad 77. Dokážte, že Petersenov graf má aspoň 5! automorfizmov.

Príklad 78. Dokážte, že každý regulárny bipartitný graf má nikde nulový 3-tok.