Úlohy k cvičeniu č. 11

Definícia 1. *Graf* je trojica $G = (V, E, I)$, kde V je neprázdna konečná množina, E je konečná množina, $V \cap E = \emptyset$ a

$$I\colon E \to \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$$

je zobrazenie. Prvky množiny V nazývame *vrcholmi*, prvky množiny E nazývame *hranami* a zobrazenie I nazývame *incidenčnou funkciou.*

Ak v grafe $G = (V, E, I)$ pre nejaké (nie nutne rôzne) vrcholy $u, v \in V$ a hranu $e \in E$ platí $I(e) = \{u, v\}$, hovoríme, že *hrana e je incidentná s vrcholmi u a v*. Hrana $e \in E$, pre ktorú existuje vrchol $v \in V$ taký, že $I(e) = \{v\}$, sa nazýva *slučka vo vrchole v*. Ak pre dvojicu rôznych hrán $e, f \in E$ existuje dvojica vrcholov $u, v \in V$ tak, že $I(e) = I(f) = \{u, v\}$, hovoríme, že e a f sú *paralelné hrany.* Pod *rádom grafu* rozumieme počet prvkov množiny V.

Definícia 2. *Jednoduchý graf* je graf $G = (V, E, I)$, ktorý neobsahuje žiadne slučky ani paralelné hrany – jeho incidenčná funkcia I je teda injektívnym zobrazením V do $\binom{V}{2}$.

Poznámka 1. Jednoduché grafy možno alternatívne definovať aj ako dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdna konečná množina a $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Uvedená terminológia nie je úplne ustálená a môže sa od zdroja k zdroju líšiť. Pod pojmom „graf" sa napríklad často rozumie iba jednoduchý graf; objekty z definície 1 sa potom nazývajú „multigrafy". Iné zdroje zas v definícii jednoduchého grafu povoľujú slučky a o objektoch z definície 2 hovoria ako o „jednoduchých grafoch bez slučiek". V súvislosti s orientovanými grafmi sa grafy v zmysle definície 1 nazývajú aj *neorientované grafy.*

Definícia 3. Nech $G = (V, E, I)$ a $G' = (V', E', I')$ sú grafy. Hovoríme, že grafy G a G' sú *izomorfné*, ak existujú *bijektívne* zobrazenia $\varphi\colon V \to V'$ a $\psi\colon E \to E'$ také, že pre všetky hrany $e \in E$ platí: ak $I(e) = \{u, v\}$, tak $I'(\psi(e)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}$. Dvojicu zobrazení (φ, ψ) nazývame *izomorfizmom* a pre izomorfné grafy G a G' píšeme $G \simeq G'$.

Poznámka 2. Relácia $\simeq$ je očividne reláciou ekvivalencie.
Poznámka 3. Obvykle sa pre zobrazenia φ a ψ z definície 3 používa rovnaký symbol, napríklad φ. Izomorfizmus potom možno chápať ako zobrazenie $\varphi\colon V \cup E \to V' \cup E'$.

Definícia 4. Nech $G = (V, E, I)$ a $G' = (V, E', I')$ sú grafy. Hovoríme, že graf G' vznikne *premenovaním hrán* grafu G, ak existuje *bijektívne* zobrazenie $\chi\colon E \to E'$ také, že pre všetky $e \in E$ platí $I'(\chi(e)) = I(e)$. Takéto grafy G a G' zvyčajne stotožňujeme a píšeme $G = G'$.

Nech $\mathscr{G}$ je ľubovoľná trieda grafov. Pod *počtom neoznačených grafov* rádu n z triedy $\mathscr{G}$ budeme rozumieť počet tried ekvivalencie relácie $\simeq$ zúženej na grafy rádu n z triedy $\mathscr{G}$ – izomorfné grafy teda budeme pokladať za totožné. Pod *počtom označených grafov* z triedy $\mathscr{G}$ na pevne danej množine vrcholov V s $|V| = n$ budeme rozumieť počet grafov $G = (V, E, I)$ z triedy $\mathscr{G}$, po stotožnení z definície 4. Ak v nasledujúcich úlohách budeme hovoriť o „počte grafov", vždy budeme mať na mysli „počet označených grafov".

1. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \ldots, n\}$.

2. Nech $n, k \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \ldots, n\}$, ktoré majú práve k hrán.

3. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Nájdite počet všetkých grafov na $V = \{1, \ldots, n\}$, ktoré neobsahujú žiadne paralelné hrany.

4. Nech $n, s \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých grafov na $V = \{1, \ldots, n\}$ takých, že medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi môže viesť najviac s paralelných hrán.

Definícia 5. Nech $G = (V, E, I)$ a $H = (V', E', I')$ sú grafy. Hovoríme, že graf H je *podgrafom* grafu G, ak $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ a incidenčná funkcia I' je zúžením I na E'. V takom prípade píšeme $H \subseteq G$.

Definícia 6. Nech $G = (V, E, I)$ a $H = (V', E', I')$ sú grafy. Hovoríme, že graf H je *indukovaným podgrafom* grafu G, ak H je podgrafom G a pre všetky $e \in E$ také, že $I(e) \subseteq V'$ platí $e \in E'$. V takom prípade píšeme $H = G[V']$.

Definícia 7. Nech $G = (V, E, I)$ a $H = (V', E', I')$ sú grafy. Hovoríme, že graf H je *faktorom* grafu G, ak H je podgrafom G a $V' = V$.

Definícia 8. Nech $n \geq 1$. *Kompletný graf* o n vrcholoch je jednoduchý graf $K_n = (V_n, E_n, I_n)$, kde $V_n = \{1, \ldots, n\}$, $E_n = \binom{V}{2}$ a pre všetky hrany $e \in E_n$ platí $I_n(e) = e$.

5. Nech $n \geq 1$. Nájdite počet všetkých faktorov kompletného grafu K_n.
6. Nech $n \geq 1$. Nájdite počet všetkých indukovaných podgrafov kompletného grafu K_n.
7. Nech $n \geq 1$. Nájdite počet všetkých podgrafov kompletného grafu K_n. Výsledok môže obsahovať sumu.

Definícia 9. Nech $G = (V, E, I)$ je graf a $v \in V$ je jeho vrchol. *Stupeň vrchola* v je číslo

$$\deg_G(v) = |\{e \in E \mid v \in I(e)\}| + |\{e \in E \mid I(e) = \{v\}\}| \,.$$

Stupeň vrchola v teda udáva počet hrán incidentných s vrcholom v, pričom slučky sa započítavajú dvakrát (raz spolu s ostatnými hranami a raz osobitne). To zodpovedá predstave o stupni vrchola ako o súčtu počtov „vychádzajúcich“ a „vchádzajúcich“ hrán; slučka pritom z vrchola v „vychádza“, aj do neho „vchádza“.

Definícia 10. Nech $G = (V, E, I)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$. Graf G je *k-regulárny*, ak pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) = k$. Graf G je regulárny, ak je k-regulárny pre nejaké k.

8. Nájdite všetky dvojice $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ také, že existuje aspoň jeden k-regulárny graf rádu n.
9. Nájdite všetky dvojice $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ také, že existuje aspoň jeden k-regulárny jednoduchý graf rádu n.
10. Nájdite všetky 3-regulárne grafy rádu 6.
11. Pre každé z nasledujúcich tvrdení dokážte alebo vyvráťte jeho platnosť pre všetky $n \geq 1$:
    a) Kompletný graf K_n je regulárny.
    b) Každý podgraf grafu K_n je regulárny.
    c) Každý indukovaný podgraf grafu K_n je regulárny.
    d) Každý faktor grafu K_n je regulárny.
12. Dokážte alebo vyvráťte: každý indukovaný podgraf regulárneho grafu je regulárny.

Definícia 11. Nech $G = (V, E, I)$ je graf a $u, v \in V$ sú jeho vrcholy. Pod *u-v-sledom* v grafe G rozumieme konečnú postupnosť $W = (u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n)$ takú, že:

(*i*) Pre $i = 0, \ldots, n$ platí $u_i \in V$.

(*ii*) Pre $i = 1, \ldots, n$ platí $e_i \in E$.

(*iii*) Platí $u_0 = u$ a $u_n = v$.

(*iv*) Pre $i = 1, \ldots, n$ platí $I(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$.

Pod *sledom* rozumieme u-v-sled pre ľubovoľné $u, v \in V$. Pod *uzavretým sledom* rozumieme u-u-sled pre ľubovoľné $u \in V$. Pod *ťahom* rozumieme sled, ktorého hrany sú po dvoch rôzne. Pod *cestou* rozumieme sled, ktorého vrcholy sú po dvoch rôzne. Pod *kružnicou* rozumieme uzavretý sled $W = (u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_0)$ taký, že $n \geq 1$ a vrcholy $u_0, \ldots, u_{n-1}$ aj hrany $e_1, \ldots, e_n$ sú po dvoch rôzne. Pod *dĺžkou* u-v-sledu $W = (u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n)$ rozumieme číslo n.

Definícia 12. Nech $G = (V, E, I)$ je graf. Hovoríme, že graf G je *súvislý*, ak pre každé $u, v \in V$ existuje v G aspoň jeden u-v-sled.

13. Nech $G = (V, E, I)$ je ľubovoľný graf. Dokážte alebo vyvráťte:
    a) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.
    b) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý sled nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.
14. Dokážte, že ak graf $G = (V, E, I)$ obsahuje aspoň jeden uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.
15. Nech $G = (V, E, I)$ je graf taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq 2$. Dokážte, že graf G musí nutne obsahovať kružnicu.
16. Dokážte, že v ľubovoľnom 2-regulárnom grafe leží každý vrchol na práve jednej kružnici.
17. Popíšte všetky grafy, ktoré neobsahujú žiadnu cestu dĺžky 3.
18. Nech $n \geq 1$. Nájdite najmenšie $k(n) \in \mathbb{N}$ také, že všetky jednoduché grafy rádu n s $k(n)$ hranami sú súvislé.
19. Nech $G = (V, E, I)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq (n-1)/2$. Dokážte, že graf G musí byť nutne súvislý.

Definícia 13. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf a $u, v \in V$ sú jeho vrcholy. Pod *vzdialenosťou* vrcholov u a v v grafe G rozumieme dĺžku najkratšieho u-v-sledu. Vzdialenosť vrcholov u a v označujeme symbolom $\mathrm{dist}_G(u, v)$.

Definícia 14. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Priemer* grafu G je číslo

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{\mathrm{dist}_G(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Definícia 15. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf a $v \in V$ je jeho vrchol. *Excentricita* vrcholu v je číslo

$$\mathrm{ex}_G(v) = \max\{\mathrm{dist}_G(u, v) \mid u \in V\}.$$

Definícia 16. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Polomer* grafu G je číslo

$$\mathrm{rad}(G) = \min\{\mathrm{ex}_G(v) \mid v \in V\}.$$

Definícia 17. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Centrum* grafu G je množina vrcholov

$$\mathrm{cent}(G) = \{v \in V \mid \mathrm{ex}_G(v) = \mathrm{rad}(G)\}.$$

20. Nech $G = (V, E, I)$ je ľubovoľný súvislý graf. Dokážte, že $\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2\mathrm{rad}(G)$.

Definícia 18. Nech $G = (V, E, I)$ je graf s $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ pre nejaké $n \geq 1$. *Matica susednosti* grafu G je matica $A(G) = (a_{i,j})_{n \times n}$ taká, že pre všetky $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$a_{i,j} = |\{e \in E \mid I(e) = \{v_i, v_j\}\}|.$$

21. Nech $G = (V, E, I)$ je graf s $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ pre nejaké $n \geq 1$. Dokážte, že matica $A(G)$ je nutne symetrická.
22. Nech $G = (V, E, I)$ je graf s $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ pre nejaké $n \geq 1$, nech $k \in \mathbb{N}$. Dokážte, že pre maticu $(A(G))^k$ platí $(A(G))^k = (a_{i,j}^{(k)})_{n \times n}$, kde pre všetky $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ je $a_{i,j}^{(k)}$ rovné počtu všetkých v_i-v_j-sledov dĺžky k v grafe G.

Definícia 19. Graf $G = (V, E, I)$ je *acyklický*, ak neobsahuje žiadnu kružnicu. *Strom* je ľubovoľný súvislý acyklický graf.

Veta 1. *Nech $G = (V, E, I)$ je jednoduchý graf. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(*i*) *G je strom.*

(*ii*) *Ľubovoľné dva vrcholy grafu G sú spojené práve jednou cestou.*

(*iii*) *Graf G je súvislý a po odobraní ľubovoľnej hrany vznikne z grafu G nesúvislý graf.*

(*iv*) *Graf G je acyklický a po pridaní ľubovoľnej hrany vznikne kružnica.*

(*v*) *G je súvislý graf rádu $n \in \mathbb{N}$ s $n-1$ hranami.*

Definícia 20. Nech $T = (V, E, I)$ je strom. *List* je ľubovoľný vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 1$.

23. Dokážte vetu 1.

24. Nájdite všetky stromy $T = (V, E, I)$ obsahujúce vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 0$.

25. Nech $T = (V, E, I)$ je strom rádu $n \geq 3$. Nech v je list stromu T a u je susedný vrchol listu v. Dokážte, že $\mathrm{ex}_T(u) = \mathrm{ex}_T(v) - 1$.

26. Nech $T = (V, E, I)$ je strom rádu $n \geq 3$ a nech $v \in \mathrm{cent}(T)$. Dokážte, že $\deg_T(v) \geq 2$.

27. Nájdite všetky regulárne stromy.

Definícia 21. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Kostra grafu G* je ľubovoľný strom T, ktorý je faktorom grafu G.

28. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf a T je jeho kostra. Dokážte, že $\mathrm{diam}(T) \geq \mathrm{diam}(G)$.

29. Dokážte alebo vyvráťte: každý súvislý graf $G = (V, E, I)$ má aspoň jednu kostru T takú, že $\mathrm{diam}(T) = \mathrm{diam}(G)$.

Definícia 22. Graf $G = (V, E, I)$ je *bipartitný*, ak existujú neprázdne množiny V_1 a V_2 tak, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ a pre všetky $e \in E$ platí $I(e) \cap V_1 \neq \emptyset$ a $I(e) \cap V_2 \neq \emptyset$.

30. Dokážte, že každý strom je bipartitný graf.

31. Nech $n, m \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých bipartitných grafov na množine vrcholov $V = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$, ktorých partie sú dané množinami vrcholov $V_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ a $V_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$.

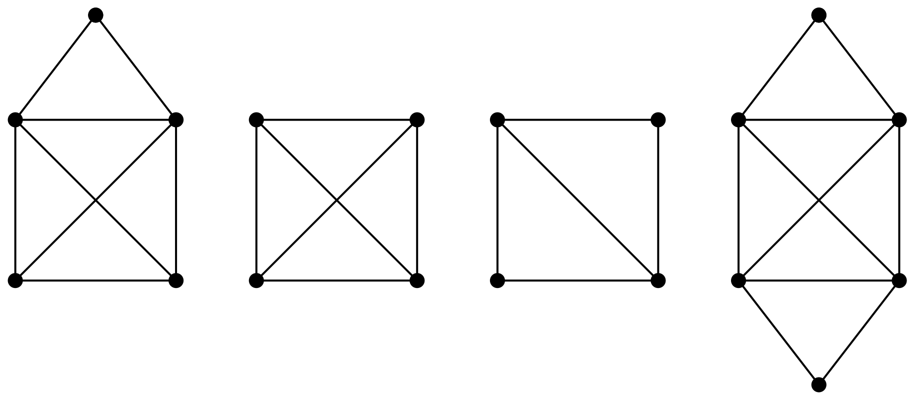
32. Dokážte, že každý regulárny bipartitný graf musí mať párny počet vrcholov. Nájdite vhodné zosilnenie tohto tvrdenia.

Definícia 23. Súvislý graf $G = (V, E, I)$ je *eulerovský*, ak v ňom existuje uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany (*eulerovský ťah*).

Veta 2. *Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. Graf G je eulerovský práve vtedy, keď sú stupne všetkých jeho vrcholov párne.*

Veta 3. *Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. V grafe G existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany práve vtedy, keď v grafe G existujú práve dva vrcholy nepárneho stupňa.*

33. Zistite, či sú nasledujúce grafy eulerovské:



34. Zistite, či v grafoch z predchádzajúcej úlohy existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany.

35. Nájdite všetky $n \geq 1$ také, že kompletný graf K_n je eulerovský.

Definícia 24. Graf G nazývame planárny, ak sa dá nakresliť do roviny tak, že sa žiadne dve hrany nekrižujú. Stretávať sa môžu iba hrany, ktoré majú spoločný vrchol a to konkrétne v tomto vrchole.

Definícia 25. *Oblasť* rovinného grafu (planárny graf nakreslený v rovine) G je časť plochy ohraničená hranami, ktoré nazývame *hranicou. Dĺžka hranice* je počet hrán v hranici. Hrany, ktoré neoddeľujú dve oblasti sa počítajú do dĺžky hrancie dvakrát.

Veta 4 (Eulerova veta)**.** *Pre súvislý rovinný graf G platí: $|V(G)| + |F(G)| - |E(G)| = 2$, kde $V(G)$ je množina vrcholov, $F(G)$ je množina oblastí a $E(G)$ je množina hrán.*

Definícia 26. *Subdivízia* grafu G je graf, ktorý vznikne z G rozdelením hrán vrcholmi stupňa dva.

Veta 5 (Kuratowského veta)**.** *Graf G je planárny práve vtedy, keď žiaden jeho podgraf nie je izomorfný subdivízií grafu K_5 (kompletný graf na 5 vrcholoch) ani $K_{3,3}$ (kompletný bipartitný graf na s partiami veľkosti 3)*

36. Nájdite všetky Platónské telesá. Platónské telesá sú pre nás regulárne planárne grafy, ktoré sa dajú nakresliť tak, že hranice všetkých oblastí majú rovnakú dĺžku.

37. Dokážte, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nie su planárne.

38. Nájdite graf, ktorý má dve rôzne nakreslenia do roviny. (Hint: nesmie byť 3-súvislý)