Riešenia druhej sady domácich úloh

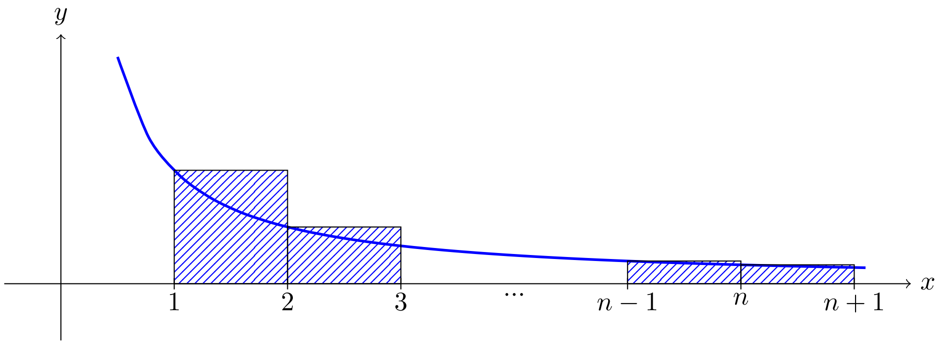
Anna Kompišová

28. mája 2018

Úloha 1. Dokážte, že
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$$

Riešenie. Potrebujeme ukázať, že $\log n = O(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$ a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = O(\log n)$. Sumu odhadneme zhora aj zdola funkciou, ktoráje rádovo $\log n$ a upravíme tento odhad tak, aby sme ukázali to, čo chceme priamo z decinície. Na oba odhady použijeme určitý integrál.

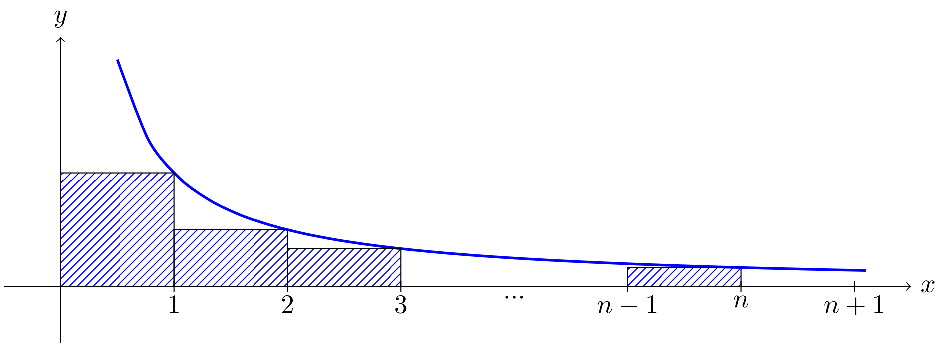
Najprv spravme dolný odhad. Nakreslime si funkciu $1/x$ a do obrázku dokreslime obĺžniky, ktorých plocha sa rovná sume $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.



Keďže funcia je klesajúca, vidíme, že plocha obdĺžnikov je väčšia ako plocha pod funciou $1/x$ na intervale $(1, n+1)$.
$$\int_{1}^{n+1} 1/x \; dx = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Vieme, že logaritmus je rastúca funcia, preto $\ln(n) \leq \ln(n+1)$. Zároveň vieme $\ln n = \frac{\log n}{\log e}$. Dostávame:
$$\log n \leq \log e \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$$
Podľa definície sme našli konštantu $c = \log e$ pre ktorú platí, že pre všetky $n > 0$ platí $\log n \geq c. \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Tým sme dokázali, že $\log n = O(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$

Aby sme dokázali druhú rovnosť, urobíme pre zmenu odhad z hora. Nakreslíme si ten istý obrázok, ale obdĺžniky posunieme doľava.



Z Obrázku vidno, že suma je menšia ako 1 plus plocha pod funkciou $1/x$ na intervale $(1, n)$.
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_{1}^{n} 1/x dx = 1 + [\ln x]_1^n = 1 + \ln n$$

Ak $n > e$ potom platí odhad $1 + \ln n \leq 2 \ln n$. Navyše zase môžeme použiť rovnosť $\ln n = \frac{\log n}{\log e}$.

Podľa definície sme našli konštantu $c = \frac{2}{\log e}$ pre ktorú platí, že pre všetky $n > e$ platí $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq c \log n$. Tým sme dokázali, že $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = O(\log n)$ □

Úloha 2. Dokážte, že vrcholová súvislosť a hranová súvislosť jednoduchého kubického grafu sa rovnajú.

Riešenie. Označme si hranovú súvislosť grafu G ako $\lambda(G)$ a vrcholovú súvislosť ako $\kappa(G)$.

Ak graf nie je súvislý, potom má hranovú aj vrcholovú súvislosť rovnú 0. Stačí sa teda zamerať len na súvislé grafy.

Najprv sa pozrime na najmenší jednoduchý kubický graf, a to je kompletný graf na štyroch vrcholoch. O tomto grafe z definície vieme, že $\lambda(K_4) = \kappa(K_4) = 3$. Z toho vyplýva, že pre tento graf tvrdenie platí. Žiaden ďalší jednoduchý kubický graf na štyroch vrcholoch neexistuje, preto stačí tvrdenie dokázať pre grafy, ktoré majú aspoň 6 vrcholov.

Pre každý graf G, ktorý má aspoň 6 vrcholov, dokážeme $\lambda(G) \geq \kappa(G)$. Teda vrcholová súvislosť nemôže presiahnuť hranovú.

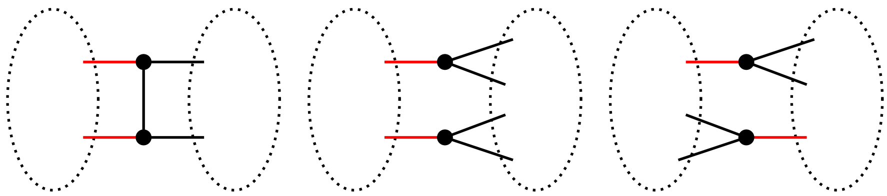
Keď odstránime z grafu G hrany nejakého rezu, graf sa rozpadne na (nie nutne súvislé) časti A a B. Zjavne minimálny rez musí mať $\lambda(G)$ hrán. Zoberme si teraz minimálny rez taký, že počet vrcholov v časti A je viac ako $\lambda(G)$. Ak z pôvodného grafu odstránime koncové vrcholy hrán vybratého minimálneho rezu, ktoré sú zároveň v časti A, odstráme tým všetky hrany pôvodného rezu a zároveň v časti A ešte zostanem nejaký vrchol. Preto takto upravený graf bude mať viac komponentov. Z toho vieme, že po odstránení najviac $\lambda(G)$ vrcholov sa graf rozpadne a teda $\lambda(G) \geq \kappa(G)$.

Zostáva iba preveriť, či taký minimálny rez existuje. Z dirichletovho princípu vieme, že aspoň jedno z A alebo B musí mať aspoň 3 vrcholy (celkovo ich je aspoň 6). To pokryje možnosti $\lambda(G) = 1$ a $\lambda(G) = 2$. Ak $\lambda(G) = 3$, tak stačí zobrať ľubovoľný triviálny rez a ako B dosadiť vrchol, ktorému tento triviálny rez prislúcha. Všetko ostatné bude v časti A. Kubické grafy nemôžu mať väčšiu hranovú súvislosť ako 3.

Aby sme dokončili dôkaz, musíme preveriť aj opačnú nerovnosť. Z toho, čo sme už dokázali vieme, že ak $\kappa(G) = 3$, tak aj $\lambda(G) = 3$. Zostáve preveriť možnosti $\kappa(G) = 1$ alebo $\kappa(G) = 2$

- $\kappa(G) = 1$: Nech odstránením jedného vrcholu v sa graf rozpadne na viac častí. Môže sa rozpadnúť na dve alebo tri časti. V každom prípade existuje komponent, do ktorého ide z v práve jedna hrana (u, v). Preto hrana (u, v) je mostom v grafe G. Z toho vyplýva, že $\lambda(G) \leq 1 = \kappa(G)$.

- $\kappa(G) = 2$: Nech odstránením vrcholov v_1, v_2 sa graf rozpadne aspoň na dve časti a neexistuje žiadna artikulácia. Na obrázkoch nižšie môžete vidieť všetky možné sitácie, ktoré môžu nastať.



Bodkované ovály znázorňujú časti, na ktoré sa graf G rozpadne. Tieto časti nemusia byť nutne súvislé. V každom obrázku vieme nájsť 2-rez (červené hrany), ktorý oddeľuje jednu časť od druhej. Z toho vyplýva, že $\lambda(G) \leq 2 = \kappa(G)$.

Tým sme dokázali tvrdenie zo zadania. □