Úlohy k cvičeniu č. 12

Definícia 1. Nech $G = (V, E, I)$ je graf s $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ pre nejaké $n \geq 1$. *Matica susednosti* grafu G je matica $A(G) = (a_{i,j})_{n \times n}$ taká, že pre všetky $i, j \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$a_{i,j} = |\{e \in E \mid I(e) = \{v_i, v_j\}\}|.$$

1. Nech $G = (V, E, I)$ je graf s $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ pre nejaké $n \geq 1$. Dokážte, že matica $A(G)$ je nutne symetrická.
2. Nech $G = (V, E, I)$ je graf s $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ pre nejaké $n \geq 1$, nech $k \in \mathbb{N}$. Dokážte, že pre maticu $(A(G))^k$ platí $(A(G))^k = (a_{i,j}^{(k)})_{n \times n}$, kde pre všetky $i, j \in \{1, \dots, n\}$ je $a_{i,j}^{(k)}$ rovné počtu všetkých v_i-v_j-sledov dĺžky k v grafe G.

Definícia 2. Graf $G = (V, E, I)$ je *acyklický*, ak neobsahuje žiadnu kružnicu. *Strom* je ľubovoľný súvislý acyklický graf.

Veta 1. *Nech $G = (V, E, I)$ je jednoduchý graf. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

- (i) *G je strom.*
- (ii) *Ľubovoľné dva vrcholy grafu G sú spojené práve jednou cestou.*
- (iii) *Graf G je súvislý a po odobraní ľubovoľnej hrany vznikne z grafu G nesúvislý graf.*
- (iv) *Graf G je acyklický a po pridaní ľubovoľnej hrany vznikne kružnica.*
- (v) *G je súvislý graf rádu $n \in \mathbb{N}$ s $n - 1$ hranami.*

Definícia 3. Nech $T = (V, E, I)$ je strom. *List* je ľubovoľný vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 1$.

3. Dokážte vetu 1.
4. Nájdite všetky stromy $T = (V, E, I)$ obsahujúce vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 0$.
5. Nech $T = (V, E, I)$ je strom rádu $n \geq 3$. Nech v je list stromu T a u je susedný vrchol listu v. Dokážte, že $\mathrm{ex}_T(u) = \mathrm{ex}_T(v) - 1$.
6. Nech $T = (V, E, I)$ je strom rádu $n \geq 3$ a nech $v \in \mathrm{cent}(T)$. Dokážte, že $\deg_T(v) \geq 2$.
7. Nájdite všetky regulárne stromy.

Definícia 4. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Kostra grafu G* je ľubovoľný strom T, ktorý je faktorom grafu G.

8. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf a T je jeho kostra. Dokážte, že $\mathrm{diam}(T) \geq \mathrm{diam}(G)$.
9. Dokážte alebo vyvráťte: každý súvislý graf $G = (V, E, I)$ má aspoň jednu kostru T takú, že $\mathrm{diam}(T) = \mathrm{diam}(G)$.

Definícia 5. Graf $G = (V, E, I)$ je *bipartitný*, ak existujú neprázdne množiny V_1 a V_2 tak, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ a pre všetky $e \in E$ platí $I(e) \cap V_1 \neq \emptyset$ a $I(e) \cap V_2 \neq \emptyset$.

10. Dokážte, že každý strom je bipartitný graf.
11. Nech $n, m \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých bipartitných grafov na množine vrcholov $V = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$, ktorých partie sú dané množinami vrcholov $V_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ a $V_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$.
12. Dokážte, že každý regulárny bipartitný graf musí mať párny počet vrcholov. Nájdite vhodné zosilnenie tohto tvrdenia.

Definícia 6. Súvislý graf $G = (V, E, I)$ je *eulerovský*, ak v ňom existuje uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany (*eulerovský ťah*).

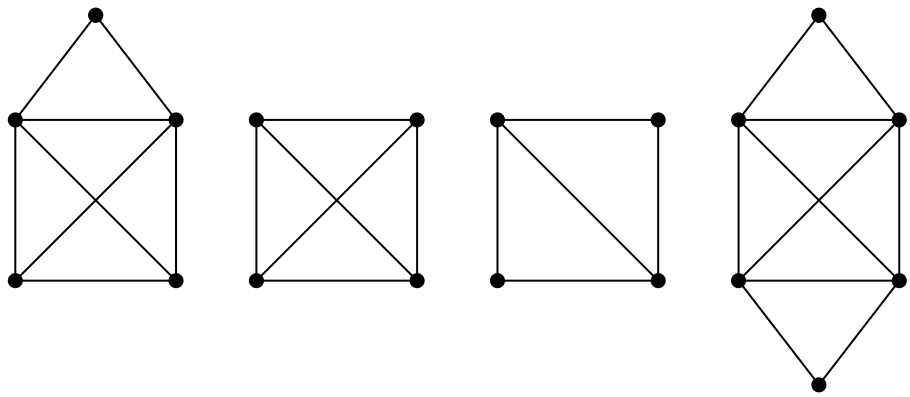
Veta 2. *Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. Graf G je eulerovský práve vtedy, keď sú stupne všetkých jeho vrcholov párne.*

Veta 3. *Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. V grafe G existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany práve vtedy, keď v grafe G existujú práve dva vrcholy nepárneho stupňa.*

Definícia 7. Súvislý graf je *hamiltonoský*, ak v ňom existuje kružnica prechádzajúca cez všetky vrcholy.

Definícia 8. *Hranový graf* $L(G)$ grafu G je graf, ktorého vrcholmi sú hrany grafu G a dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď hrany, ktoré sú reprezentované vrcholmi $L(G)$, majú spoločný vrchol.

13. Zistite, či sú nasledujúce grafy eulerovské:



14. Zistite, či v grafoch z predchádzajúcej úlohy existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany.
15. Nájdite všetky $n \geq 1$ také, že kompletný graf K_n je eulerovský.
16. Dokážte, alebo vyvráťte masledujúce implikácie:
    (a) Graf G je eulerovský $\Rightarrow$ hranový graf $L(G)$ je eulerovský.
    (b) Hranový graf $L(G)$ je eulerovský $\Rightarrow$ graf G je eulerovský.
17. Dokážte, že bipartitiný hamiltonovský graf má obe partície rovnakej veľkosti.
18. Dokážte, že ak G je hamiltonovský alebo eulerovský, tak hranový graf $L(G)$ je hamiltonovský.

Definícia 9. Súvislý graf $G = (V, E, I)$ je *planárny*, ak sa dá nakresliť do roviny bez kríženia hrán.

Definícia 10. Nech súvislý graf $G = (V, E, I)$ je nakreslený do roviny (*rovinný graf*). Oblasť rovinného grafu G je plocha ohraničená hranami grafu G. *Veľkosť oblasti* je dĺžka najkratšieho uzavretého sledu obsahujúceho hrany ohraničujúce oblasť.

Veta 4. *Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý rovinný graf a nech F je množina jeho oblastí. Potom platí*

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

19. Nájdite planárny graf, ktorý má dve rôzne nakreslenia. To znamená, že sa dá nakresliť dvomi rôznymi spôsomi tak, že veľkosti oblastí jedného nakreslenia sú iné ako veľkosti oblastí druhého nakreslenia.
20. Dokážte, že $K_{3,3}$ (kompletný bipartitný graf, ktorého obe patrície sú veľkosti tri) a K_5 (kompletný graf na piatich vrcholoch) nie su planárne.
21. Nájdite všetky platónske telesá. Sú to rovinné grafy, pre ktoré platí, že všetky ich oblasti majú rovnakú veľkosť a všetky vrcholy majú rovnaký stupeň.