Riešenia tretej sady domácich úloh

Anna Kompišová

30. apríla 2019

Úloha 1. Developer stavia novú ulicu, na ktorej je $2n$ domov (všetky sú v jednom rade). Domy chce nafarbiť n farbami tak, aby každou z n farieb boli natreté práve dva domy. Koľkými spôsobmi to môže urobiť, ak domy rovnakej farby nesmú byť vedľa seba? Výsledok môžete uviesť v tvare jednej sumy.

Riešenie. Farby máme dané a preto zostáva určiť, ako ich rozmiestnime. Všetkých možných rozmiestnení je toľko, koľko je permutácii s opakovaním n prvkov, ak sa každý prvok v permutácii nachádza dvakrát. Tých je $\frac{(2n)!}{2^n}$. Od tohto počtu musíme odpočítať tie permutácie, kde sa nejaká farba vyskytuje za sebou. Označme M_i množinu permutácií farieb, v ktorých sa farba i vyskytuje za sebou. Všetky permutácie v množine M_i nechceme započítať, takže ich odpočítame. Pri počítaní $|M_i|$ môžeme domy farby i považovať za jeden prvok a ostatné môžeme preusporiadať ľubovoľne. Preto $\frac{|M_i|=(2n-1)!}{2^{(n-1)}}$. Všetkých takýchto množín je n, preto musímeodpočítať $n\frac{(2n-1)!}{2^{(n-1)}}$. Lenže teraz sme dvakrát odpočítali permutáciu, v ktorej dve farby porušovali pravidlo, že dva domy nimi natreté nesmú stáť vedľa seba. Tieto zas musíme pripočítať. Pomaly sa dostávame k tomu, že výsledný počet rôznych prípustných ofarbení domov sa bude počítať princípom zapojenia a vypojenia. Na to budeme potrebovať vypočítať pre ľubovoľnú podmnožinu farieb X, koľko je takých farbení, že dva domy ľubovoľnej farby z množiny X sú vedľa seba. Domy farieb z X môžeme brať ako |X| blokov. V každom bloku sú dva domy rovnakej farby. Ostatné farby môžeme rozmiestniť ľubovoľne. Máme teda $(2n - |X|)$ prvkov, ktoré musíme rozmiestniť z toho $(n - |X|)$-krát sú tam dva rovnaké. Počet takých rozmiestnení je $\frac{(2n-|X|)!}{2^{(n-|X|)}}$. Rôznych podmnožín X veľkosti k je $\binom{n}{k}$. Spolu máme

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(2n-k)!}{2^{(n-k)}}.$$

□

Úloha 2. Nech $f, g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Formálne dokážte alebo vyvráťte: ak $f(n) = \omega(g(n))$ a zároveň $g(n) = \Theta(h(n))$, tak $h(n) = O(f(n))$

Riešenie. Dokážeme, že to platí. Z definície ω vieme, že $g(n) = o(f(n))$, t.j. $\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = 0$. Z definície limity preto platí, že existuje n_0 také, že $|\frac{g(n)}{f(n)}| \leq 1$, pre všetky $n > n_0$. Vieme, že $|\frac{g(n)}{f(n)}| = \frac{|g(n)|}{|f(n)|}$ preto

$$\begin{aligned}\frac{|g(n)|}{|f(n)|} &\leq 1\\ |g(n)| &\leq |f(n)|\end{aligned}$$

pre všetky $n > n_0$. Z definície O potom vyplýva, že platí $g(n) = O(f(n))$.

Zároveň vieme z definície Θ, že $h(n) = O(g(n))$ a teda existuje c a m_0 také, že pre ľubovaľné $n > m_0$ platí $|h(n)| \leq c|g(n)|$. Vezmime $k_0 = \max\{n_0, m_0\}$. Potom vieme,že pre ľubovoľné $n > k_0$ platí

$$\begin{aligned}|g(n)| &\leq |f(n)|, \quad \text{a}\\ |h(n)| &\leq c|g(n)|.\end{aligned}$$

Spojením týchto nerovností dostáveme, že existuje konštanta c, že pre ľubovoľné $n > k_0$ platí

$$|h(n)| \leq c|f(n)|.$$

Funkcie h a f teda spĺňajú definíciu O a platí $h(n) = O(f(n))$. □