Hankelova integrálna reprezentácia funkcie $1/\Gamma(z)$

Peter Kostolányi

1. apríla 2020

Koncom minulého semestra[1] sme preskúmali základné vlastnosti komplexnej funkcie gama – dnes k týmto poznatkom pridáme poslednú ingredienciu, ktorú budeme v súvislosti s funkciou gama potrebovať pri dôkazoch tvrdení, na ktorých je založená *metóda analýzy singularít*. Pôjde o alternatívnu, *Hankelovu integrálnu reprezentáciu* funkcie $1/\Gamma(z)$, ktorá bude – na rozdiel od Eulerovho integrálu pre funkciu gama – túto funkciu udávať *vo všetkých bodoch komplexnej roviny*. Avšak na rozdiel od Eulerovho integrálu, ktorý je nevlastným integrálom komplexnej funkcie reálnej premennej, bude Hankelova integrálna reprezentácia *nevlastným krivkovým integrálom* komplexnej funkcie komplexnej premennej, čo je typ integrálu, ktorým sme sa doposiaľ nezapodievali. Okrem analytickej kombinatoriky (metóda analýzy singularít) nachádza Hankelova integrálna reprezentácia bohaté uplatnenie napríklad aj v numerickej matematike.

Funkcia gama: opakovanie z minulého semestra

Funkciu gama možno definovať pre všetky $z \in \mathbb{C}$ také, že $\operatorname{Re} z > 0$ prostredníctvom *Eulerovho integrálu*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t;$$

minulý semester sme pritom dokazovali ako existenciu tohto (obojstranne) nevlastného integrálu, tak aj holomorfnosť ním reprezentovanej funkcie. Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z > 0$ navyše funkcia $\Gamma(z)$ spĺňa rekurentný vzťah $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; dôležitými hodnotami funkcie gama sú $\Gamma(1) = 1$ a $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. V dôsledku uvedeného rekurentného vzťahu a hodnoty funkcie gama v bode 1 zisťujeme, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\Gamma(n+1) = n!$ – funkciu gama tak možno chápať ako spojité rozšírenie faktoriálu.

Pomocou rekurentného vzťahu

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)},$$

ktorý očividne platí pre všetky z z jej pôvodného definičného oboru, možno funkciu gama analyticky predĺžiť na definičný obor $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Dokázali sme pritom, že body $0, -1, -2, \ldots$ sú jednoduché póly funkcie gama.

V samom závere minulého semestra sme dokázali dôležitý vzťah poukazujúci na súvis funkcie gama so sínusom: pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ platí

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{1}$$

Napríklad odtiaľto možno vidieť, že funkcia $\Gamma(z)$ je na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ – a teda v dôsledku jej súvisu s faktoriálom aj na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ – nenulová. Funkcia $1/\Gamma(z)$ je teda po odstránení jej odstrániteľných singularít – čo je spôsob, akým budeme túto funkciu v nasledujúcom vždy chápať – *celá*, t.j. holomorfná na $\mathbb{C}$: vďaka nenulovosti funkcie gama je holomorfná na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, pričom jednoduché póly funkcie $\Gamma(z)$ v bodoch $0, -1, -2, \ldots$ sa premietnu do jednoduchých koreňov funkcie $1/\Gamma(z)$.

Nevlastné krivky a integrály pozdĺž nich

V minulom semestri sme pod *krivkou* rozumeli vždy len konečnú krivku, danú nejakým spojitým zobrazením $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, kde $\alpha \leq \beta$ sú reálne čísla. Dôležitými triedami kriviek pritom pre nás boli *hladké* a *po častiach hladké* krivky.

Budeme teraz nútení uvažovať o niečo všeobecnejší pojem krivky, zahŕňajúci tzv. *nevlastné* – alebo „nekonečné“ – krivky. Pod (vlastnou alebo nevlastnou) krivkou budeme rozumieť ľubovoľné

[1] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 12 až cvičenie 13.

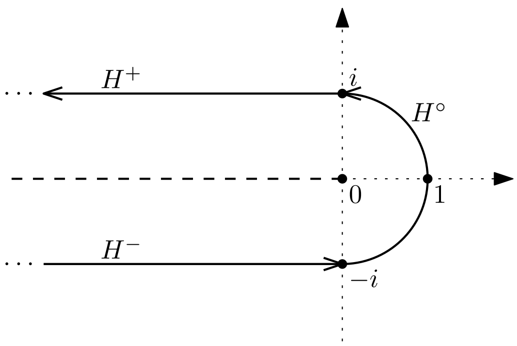
spojité zobrazenie $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$, kde I je neprázdny uzavretý interval reálnej osi. Interval I teda môže byť typu $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \infty)$, $(-\infty, \beta]$, alebo $(-\infty, \infty)$, kde $\alpha \leq \beta$ sú reálne čísla; v prvom prípade hovoríme o vlastnej krivke a vo zvyšných prípadoch o (jednostranne resp. obojstranne) nevlastnej krivke.

Pojmy hladkej a po častiach hladkej krivky možno na nevlastné krivky rozšíriť prirodzeným spôsobom. Integrály pozdĺž nevlastných kriviek definujeme rovnako ako v prípade konečných kriviek;[2] ide však v tomto prípade o nevlastné integrály. Tie nemusia vždy existovať ani v prípade, keď je krivka hladká resp. po častiach hladká – stačí si uvedomiť, že špeciálnym prípadom nevlastnej krivky je napríklad aj reálna os alebo polos, a teda každý nevlastný integrál funkcie reálnej premennej možno chápať aj ako integrál pozdĺž nevlastnej krivky.

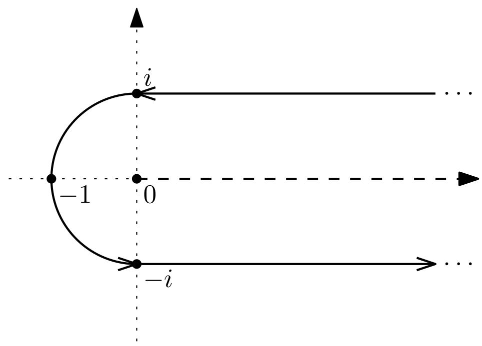
Cvičenie 1. Sformulujte a dokážte obdobu tvrdenia o reparametrizácii[3] pre integrály pozdĺž nevlastných kriviek, vďaka ktorému nebude nutné nevlastné krivky vždy parametrizovať explicitne.

Funkcia $1/\Gamma(z)$ ako integrál pozdĺž Hankelovej krivky

Pod *Hankelovou integrálnou reprezentáciou* funkcie $1/\Gamma(z)$ sa rozumie jej vyjadrenie pre všetky $z \in \mathbb{C}$ pomocou integrálu pozdĺž nevlastnej krivky, napríklad tak ako v nasledujúcich dvoch vetách, ktoré budeme po zvyšok tohto textu dokazovať.[4]



(a) Hankelova krivka H.



(b) Hankelova krivka G.

Obr. 1: Hankelove krivky z viet 2 a 4. „Čiarkovane" je znázornený uvažovaný rez komplexnej roviny.

Veta 2. *Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ platí*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_H e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w,$$

kde H je krivka na obrázku 1a. Pri funkcii w^{-z} pritom uvažujeme jej hlavnú vetvu *na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; t.j. pre všetky $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ je*

$$w^{-z} = e^{(\ln|w| + i \arg w)(-z)},$$

kde logaritmus je reálny a argument vyberáme z intervalu $(-\pi, \pi)$.[5]

Uveďme aj formálnu definíciu krivky H: môžeme položiť

$$H := H^- + H^\circ + H^+,$$

kde $H^-\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $t \in (-\infty, 0]$ predpisom $H^-(t) = t - i$, $H^\circ\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ predpisom $H^\circ(t) = e^{it}$ a $H^+\colon [0, \infty) \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $t \in [0, \infty)$ predpisom $H^+(t) = -t + i$.

[2] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 3, definícia P3.12.

[3] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 3, tvrdenie P3.21.

[4] Skôr než o jedno konkrétne tvrdenie ide o skupinu podobných tvrdení, pričom nevlastné krivky v nich používané sú vždy – až na drobné detaily – veľmi podobné; takéto krivky sa niekedy zvyknú nazývať *Hankelovými krivkami* alebo *krivkami Hankelovho typu*.

[5] Možno tiež povedať, že ide o vetvu funkcie w^{-z} takú, že platí $1^{-z} = 1$.

Poznámka 3. Hlavnú vetvu funkcie w^{-z} uvažujeme v rozrezanej rovine $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Z minulého semestra však vieme, že singularitou tejto funkcie môže byť iba bod $w = 0$; v bodoch $w \in (-\infty, 0)$ naopak možno túto funkciu „analyticky predĺžiť do potenciálne inej vetvy". V nasledujúcom bude užitočné uvažovať hodnoty funkcie w^{-z} aj na reze $(-\infty, 0)$, pričom budeme rozlišovať medzi hodnotami „na vrchnej a spodnej strane" rezu – pre všetky $w \in (-\infty, 0)$ *definujeme* $(w+0i)^{-z}$ ako hodnotu funkcie w^{-z} získanú jej priamym analytickým predĺžením v nejakom bode $w + \varepsilon i$ pre $\varepsilon > 0$; podobne pre všetky $w \in (-\infty, 0)$ definujeme $(w - 0i)^{-z}$ ako hodnotu w^{-z} získanú priamym analytickým predĺžením tejto funkcie v nejakom bode $w - \varepsilon i$ pre $\varepsilon > 0$. Pre všetky $w \in (-\infty, 0)$ teda

$$(w - 0i)^{-z} = |w|^{-z} e^{i\pi z},$$
$$(w + 0i)^{-z} = |w|^{-z} e^{-i\pi z},$$

pričom hodnota $|w|^{-z}$ je daná hlavnou vetvou w^{-z}, t.j. $|w|^{-z} = e^{(\ln|w|)(-z)}$, kde logaritmus je reálny.

Nasledujúcu alternatívnu formuláciu Hankelovej integrálnej reprezentácie využijeme v súvislosti s metódou analýzy singularít. Pôjde pritom o jednoduchý dôsledok vety 2.

Veta 4. *Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ platí*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_G e^{-u} (-u)^{-z} \, \mathrm{d}u,$$

kde G je krivka na obrázku 1b. Pri funkcii $(-u)^{-z}$ pritom uvažujeme jej hlavnú vetvu *na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$; t.j. pre všetky $u \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ je*

$$(-u)^{-z} = e^{(\ln|u| + i \arg(-u))(-z)},$$

kde logaritmus je reálny a argument vyberáme z intervalu $(-\pi, \pi)$.

Dôkaz. Stačí na reprezentáciu z vety 2 použiť substitúciu $w = -u$. Z $\mathrm{d}u$ sa potom stane $-\,\mathrm{d}w$ a pre u opisujúce krivku G opíše w krivku H. □

Dôkaz Hankelovej integrálnej reprezentácie

Budeme postupne dokazovať vetu 2 (a tým aj vetu 4). Najprv ukážeme, že nevlastný integrál

$$\frac{1}{2\pi i} \int_H e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w \tag{2}$$

z vety 2 konverguje pre všetky $z \in \mathbb{C}$. To nám očividne zaručí nasledujúca lema. Vo zvyšku tohto textu pre všetky $n \in \mathbb{N}$ kladieme $H_n^- := H^- \restriction [-n, 0]$ a $H_n^+ := H^+ \restriction [0, n]$.

Pripomeňme si z minulého semestra[6] pojem *lokálne rovnomernej konvergencie* postupnosti funkcií – čiže konvergencie, ktorá je pre každé z z definičného oboru rovnomerná na nejakom okolí bodu z. Podobne ako pri „obyčajnej" rovnomernej konvergencii[7] platia vety o zámene lokálne konvergentných limít s krivkovými integrálmi.[8] Na dôkaz existencie integrálu (2) by nám v nasledujúcej leme stačilo ukázať bodovú konvergenciu – vlastnosť lokálne rovnomernej konvergencie ale využijeme neskôr.

Lema 5. *Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ položme*

$$I_n^-(z) := \int_{H_n^-} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w \qquad a \qquad I_n^+(z) := \int_{H_n^+} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w.$$

Potom sú postupnosti funkcií $(I_n^-(z))_{n=0}^{\infty}$ a $(I_n^+(z))_{n=0}^{\infty}$ premennej z lokálne rovnomerne konvergentné, a teda pre $n \to \infty$ platí

$$\int_{H_n^-} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} \int_{H^-} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w,$$
$$\int_{H_n^+} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} \int_{H^+} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w,$$

kde nevlastné integrály na pravej strane sú dobre definované.

[6] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 12.
[7] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 5, veta P5.16.
[8] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 12.

Dôkaz. Lemu dokážeme pre integrál pozdĺž H^+ – pre krivku H^- by sme mohli argumentovať analogicky. Označme

$$I_n^+(z) := \int_{H_n^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_0^n e^{-t+i}(-t+i)^{-z}(-1)\,\mathrm{d}t = -\int_0^n e^{-t+i}(-t+i)^{-z}\,\mathrm{d}t.$$

Potrebujeme ukázať, že postupnosť funkcií $(I_n^+(z))_{n=0}^\infty$ pre $n\to\infty$ na $\mathbb{C}$ lokálne rovnomerne konverguje. Zafixujme preto $a\in\mathbb{C}$ a ľubovoľnú *ohraničenú* oblasť S takú, že $a\in S$. Ukážeme, že postupnosť funkcií $(I_n^+(z))_{n=0}^\infty$ na S konverguje rovnomerne. Budeme pritom v skutočnosti dokazovať, že táto postupnosť funkcií je na S „rovnomerne cauchyovská“: pre všetky $\varepsilon>0$ existuje $n_0\in\mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n>m>n_0$ a všetky $z\in S$ platí

$$\left|I_n^+(z)-I_m^+(z)\right|<\varepsilon.$$

Počítajme teda:

$$\left|I_n^+(z)-I_m^+(z)\right| = \left|\int_m^n e^{-t+i}(-t+i)^{-z}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_m^n \left|e^{-t+i}(-t+i)^{-z}\right|\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Pre ľubovoľné $t\in\mathbb{R}$ ale, pri výbere argumentov z intervalu $(-\pi,\pi)$,

$$\begin{aligned}
\left|e^{-t+i}(-t+i)^{-z}\right| &= \left|e^{-t+i}e^{(-z)(\ln|-t+i|+i\arg(-t+i))}\right| = \\
&= \left|e^{-t+i}e^{(-\operatorname{Re} z)(\ln|-t+i|+i\arg(-t+i))}e^{(-i\operatorname{Im} z)(\ln|-t+i|+i\arg(-t+i))}\right| = \\
&= \left|e^{-t}e^{i}e^{(-\operatorname{Re} z)\ln|-t+i|}e^{i(-\operatorname{Re} z)\arg(-t+i)}e^{-i(\operatorname{Im} z)\ln|-t+i|}e^{(\operatorname{Im} z)\arg(-t+i)}\right| = \\
&= e^{-t}\,|-t+i|^{-\operatorname{Re} z}\left|e^{\arg(-t+i)\operatorname{Im} z}\right| \le e^{-t}\,|-t+i|^{-\operatorname{Re} z}\,e^{\pi|\operatorname{Im} z|}.
\end{aligned}$$

Z (3) preto

$$\left|I_n^+(z)-I_m^+(z)\right| \le \int_m^n e^{-t}\,|-t+i|^{-\operatorname{Re} z}\,e^{\pi|\operatorname{Im} z|}\,\mathrm{d}t = e^{\pi|\operatorname{Im} z|}\int_m^n e^{-t}\,|-t+i|^{-\operatorname{Re} z}\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Číslo $n_0\in\mathbb{N}$ teraz môžeme zvoliť tak, aby pre všetky $z\in S$ a všetky $t\ge n_0$ platilo

$$|-t+i|^{-\operatorname{Re} z}\le e^{t/2};$$

špeciálne bude táto vlastnosť splnená aj pre všetky $t\in[m,n]$ a z nerovnosti (4) dostaneme

$$\begin{aligned}
\left|I_n^+(z)-I_m^+(z)\right| &\le e^{\pi|\operatorname{Im} z|}\int_m^n e^{-t/2}\,\mathrm{d}t \le e^{\pi|\operatorname{Im} z|}\int_m^\infty e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = \\
&= e^{\pi|\operatorname{Im} z|}\lim_{n\to\infty}\left[-2e^{-t/2}\right]_m^n = 2e^{\pi|\operatorname{Im} z|}e^{-m/2} \le \\
&\le 2e^{\pi|\operatorname{Im} z|}e^{-n_0/2},
\end{aligned}$$

pričom túto hodnotu možno vhodnou voľbou n_0 stlačiť pod ľubovoľné $\varepsilon>0$. Lema je dokázaná. □

Z lemy 5 tak dostávame aj existenciu integrálu (2), keďže existencia integrálu funkcie $e^w w^{-z}$ pozdĺž konečnej krivky H° je triviálna.

Naším najbližším cieľom teraz bude dokázať, že funkcia premennej z daná integrálom (2) je celá. Popri leme 5 bude kľúčom k dôkazu tejto vlastnosti nasledujúca lema 6.

Lema 6. *Nech γ s $\gamma^*\subseteq\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ je po častiach hladká* vlastná *krivka. Potom je funkcia*

$$F(z) := \int_\gamma e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w$$

celá (t.j. holomorfná na $\mathbb{C}$).

Dôkaz. Dokážeme najprv, že funkcia $F(z)$ je *spojitá* na $\mathbb{C}$. Zvoľme teda $a \in \mathbb{C}$ pevne; ukážeme spojitosť funkcie $F(z)$ v bode a. Položme $g(z, w) := e^w w^{-z}$. Takto definovaná funkcia je očividne spojitá na množine $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.[9] Keďže je množina γ^* kompaktná, existujú ohraničené oblasti $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{C}$ také, že platí:

(*i*) $a \in T_1$,

(*ii*) $\gamma^* \subseteq T_2$ a $\overline{T_2} \subseteq \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Funkcia $g(z, w)$ je teda spojitá na kompaktnej oblasti $\overline{T_1} \times \overline{T_2}$, a preto musí byť na tejto oblasti rovnomerne spojitá. To znamená, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z_1, z_2 \in \overline{T_1}$ a všetky $w_1, w_2 \in \overline{T_2}$ platí

$$|z_1 - z_2| < \delta \ \wedge \ |w_1 - w_2| < \delta \Rightarrow |g(z_1, w_1) - g(z_2, w_2)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Uvažujme teraz ľubovoľnú postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ prvkov množiny $\overline{T_1}$ takú, že $a_n \to a$ pre $n \to \infty$. Pre všetky $\delta > 0$ teda existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq n_0$ platí

$$|a_n - a| < \delta. \tag{6}$$

Z (5) a (6) dohromady vyplýva, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq n_0$ a všetky $w \in \overline{T_2}$ platí

$$|g(a_n, w) - g(a, w)| < \varepsilon.$$

Postupnosť funkcií $g(a_n, w)$ premennej w teda konverguje na $\overline{T_2}$ pre $n \to \infty$ rovnomerne k funkcii $g(a, w)$. S použitím zámeny krivkového integrálu s rovnomernou limitou[10] teda dostávame

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F(a_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_\gamma e^w w^{-a_n} \, \mathrm{d}w = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma g(a_n, w) \, \mathrm{d}w = \\ &= \int_\gamma \lim_{n\to\infty} g(a_n, w) \, \mathrm{d}w = \int_\gamma g(a, w) \, \mathrm{d}w = \int_\gamma e^w w^{-a} \, \mathrm{d}w = F(a).\end{aligned}$$

Keďže je $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ľubovoľnou postupnosťou prvkov $\overline{T_1}$ a keďže $a \in T_1$, z Heineho definície limity dostávame

$$\lim_{z\to a} F(z) = F(a)$$

a funkcia $F(z)$ je skutočne spojitá v bode a. Tým je dokázaná spojitosť funkcie $F(z)$ na $\mathbb{C}$.

Zostáva dokázať holomorfnosť funkcie $F(z)$ na $\mathbb{C}$. Vieme už, že funkcia $F(z)$ je spojitá a že funkcia $g(z, w) = e^w w^{-z}$ je spojitá na $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$. Pre fixné $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ je navyše funkcia

$$e^w w^{-z} = e^w e^{-z \ln w}$$

premennej z očividne holomorfná na $\mathbb{C}$. Z Cauchyho integrálnej vety pre trojuholník[11] tak pre ľubovoľný trojuholník γ_Δ s $\gamma_\Delta^* \subseteq \mathbb{C}$ dostávame

$$\int_{\gamma_\Delta} F(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_\Delta} \int_\gamma e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w \, \mathrm{d}z = \int_\gamma \int_{\gamma_\Delta} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}w = \int_\gamma 0 \, \mathrm{d}w = 0,$$

kde zámena integrálov je odôvodnená spojitosťou funkcie $e^w w^{-z}$ na $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.[12] Z Morerovej vety[13] teda vyplýva, že funkcia $F(z)$ je holomorfná na $\mathbb{C}$, t.j. celá. □

[9] Spojitosť funkcie $g(z, w)$ bude jediným predpokladom na túto funkciu, ktorý potrebujeme na dôkaz spojitosti funkcie $F(z)$. Rovnako by sme teda vedeli dokázať spojitosť širokej škály funkcií definovaných krivkovými integrálmi.

[10] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 5, veta P5.16.

[11] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 4, veta P4.1.

[12] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 7, lema P7.11.

[13] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 7, veta P7.8.

Dôsledok 7. *Integrál (2) definuje celú funkciu*

$$I(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_H e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Podľa lemy 6 sú celé všetky nasledujúce funkcie premennej z, pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{H_n^-} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w, \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{H^\circ} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w, \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{H_n^+} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w.$$

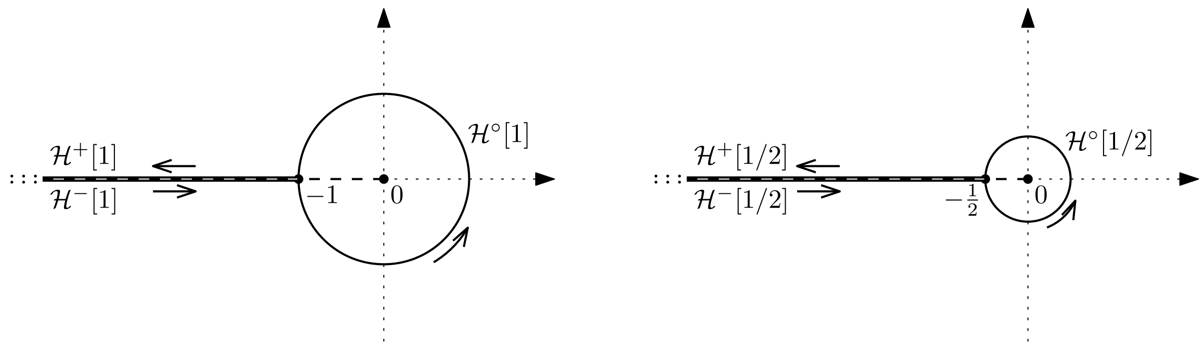
Vďaka leme 5 a skutočnosti, že lokálne rovnomerná limita holomorfných funkcií je holomorfná[14] ďalej zisťujeme, že musia byť celé funkcie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{H^-} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{H^+} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w,$$

v dôsledku čoho je celá aj funkcia $I(z)$. □

Zostáva ukázať, že celá funkcia $I(z)$ z predchádzajúceho dôsledku je v skutočnosti rovná $1/\Gamma(z)$. Náš postup bude nasledovný: dokážeme túto rovnosť funkcií pre všetky $z < -1$ a následne ju rozšírime na všetky $z \in \mathbb{C}$ pomocou vety o jednoznačnosti.[15]

V nasledujúcom budeme uvažovať pre každé $\varepsilon > 0$ modifikáciu Hankelovej krivky H, ktorú označíme $\mathcal{H}[\varepsilon]$. Pôjde pritom o krivku v rozrezanej komplexnej rovine $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$, ktorú však chápeme ako v poznámke 3 – budeme rozlišovať medzi vrchnou a spodnou stranou zápornej reálnej osi $(-\infty, 0)$, pričom pre každé reálne číslo $x < 0$ budeme jeho „vrchnú stranu“ označovať $x + 0i$ a jeho „spodnú stranu“ $x - 0i$. Samozrejme ide v oboch prípadoch o rovnaký bod komplexnej roviny; význam tejto notácie spočíva v tom, že sa pri vyhodnocovaní integrálu podľa w, obsahujúceho v integrande w^{-z} (prípadne inú funkciu premennej w, ktorú možno v tomto bode považovať za analytickú v zmysle poznámky 3), pozdĺž krivky prechádzajúcej cez bod $w = x + 0i$, použije hodnota $(x + 0i)^{-z}$. Podobne pre $w = x - 0i$ sa použije hodnota $(x - 0i)^{-z}$. Formálnu definíciu kriviek v takto „obohatenej“ rozrezanej rovine prenechávame čitateľovi. Je však dôležité si uvedomiť, že celý tento koncept nie je ničím iným, než skratkou pre inak pomerne zložitú, avšak presnú, konštrukciu.



(a) Krivka $\mathcal{H}[1]$.

(b) Krivka $\mathcal{H}[1/2]$.

Obr. 2: Krivky $\mathcal{H}[1]$ a $\mathcal{H}[1/2]$.

Krivku $\mathcal{H}[\varepsilon]$ v duchu práve uvedených konvencií definujeme pre každé $\varepsilon > 0$ takto:

$$\mathcal{H}[\varepsilon] := \mathcal{H}^-[\varepsilon] + \mathcal{H}^\circ[\varepsilon] + \mathcal{H}^+[\varepsilon],$$

kde krivka $\mathcal{H}^-[\varepsilon]\colon (-\infty, -\varepsilon] \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $t \in (-\infty, -\varepsilon]$ predpisom $\mathcal{H}^-[\varepsilon](t) = t - 0i$, krivka $\mathcal{H}^\circ[\varepsilon]\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $t \in [-\pi, \pi]$ predpisom[16] $\mathcal{H}^\circ[\varepsilon](t) = \varepsilon e^{it}$ a krivka $\mathcal{H}^+[\varepsilon]\colon [\varepsilon, \infty) \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $t \in [\varepsilon, \infty)$ predpisom $\mathcal{H}^+[\varepsilon](t) = -t + 0i$. Krivky $\mathcal{H}[1]$ a $\mathcal{H}[1/2]$ sú znázornené na obrázku 2.

[14] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 12.
[15] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 6, veta P6.7.
[16] Za konvencie $\varepsilon e^{-i\pi} = -\varepsilon - 0i$ a $\varepsilon e^{i\pi} = -\varepsilon + 0i$.

Pre všetky $\varepsilon > 0$ a $z \in \mathbb{C}$ také, že $\operatorname{Re} z < 0$, teraz dokážeme existenciu integrálu

$$\int_{\mathcal{H}[\varepsilon]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w.$$

Stačí pritom dokázať existenciu integrálov pozdĺž $\mathcal{H}^-[\varepsilon]$ a $\mathcal{H}^+[\varepsilon]$. Avšak

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}^-[\varepsilon]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{t-0i}(t-0i)^{-z}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}(-t-0i)^{-z}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{-z}e^{i\pi z}\,\mathrm{d}t = e^{i\pi z}\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{-z}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

pričom integrál

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{-z}\,\mathrm{d}t$$

existuje vďaka teórii okolo funkcie gama z minulého semestra.[17] Od Eulerovho integrálu pre funkciu $\Gamma(1-z)$ – ktorý je dobre definovaný, keďže predpoklad $\operatorname{Re} z < 0$ implikuje $\operatorname{Re}(1-z) > 0$ – sa totiž tento integrál líši iba dolnou hranicou ε namiesto 0. Podobne dostávame

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}^+[\varepsilon]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w &= \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t+0i}(-t+0i)^{-z}(-1)\,\mathrm{d}t = -\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}(-t+0i)^{-z}\,\mathrm{d}t = \\ &= -\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{-z}e^{-i\pi z}\,\mathrm{d}t = -e^{-i\pi z}\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{-z}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Minulý semester[18] sme tiež videli, že aproximácie Eulerovho integrálu k funkcii gama konvergujú lokálne rovnomerne – zo vzťahov získaných vyššie teda pre $\varepsilon = 1/n$, $n \to \infty$ a $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z < 0$ dostávame

$$\int_{\mathcal{H}^-[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} e^{i\pi z}\,\Gamma(1-z), \tag{7}$$

$$\int_{\mathcal{H}^+[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} -e^{-i\pi z}\,\Gamma(1-z). \tag{8}$$

(Bude nám ale stačiť aj bodová konvergencia.) Dokážeme teraz, že pre z ako vyššie sú hodnoty integrálov funkcie $e^w w^{-z}$ premennej w pozdĺž kriviek $\mathcal{H}[\varepsilon]$ pre rôzne $\varepsilon > 0$ vždy tie isté.

Lema 8. *Nech $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ a $z \in \mathbb{C}$ je také, že $\operatorname{Re} z < 0$. Potom*

$$\int_{\mathcal{H}[\varepsilon_1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\mathcal{H}[\varepsilon_2]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Každú z kriviek $\mathcal{H}[\varepsilon]$ pre $\varepsilon > 0$ rozdeľme na dve časti $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon]$ a $\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon]$, tak ako na obrázku 3. Pre všetky $\varepsilon > 0$ potom možno integrál

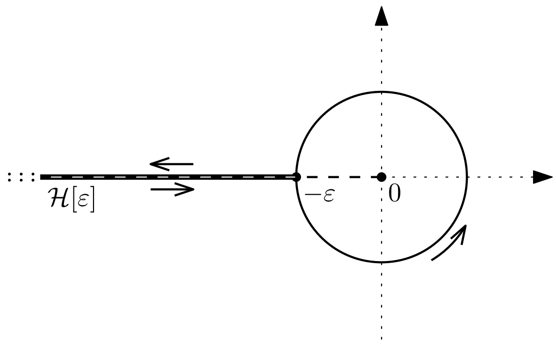
$$\int_{\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w$$

bezo zmeny jeho hodnoty interpretovať aj tak, že integrandom je funkcia $e^w w^{-z}$ pre vetvu funkcie w^{-z} danú ako

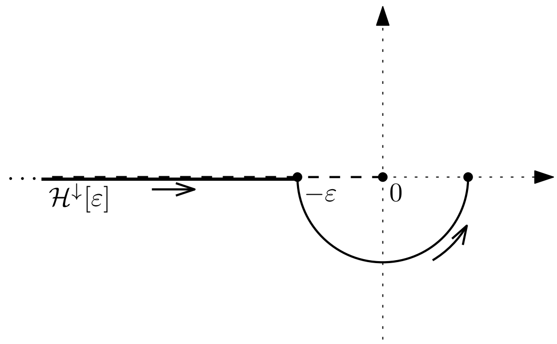
$$w^{-z} = e^{(\ln|w| + i\arg w)(-z)},$$

kde $\arg w$ vyberáme z intervalu $(-3\pi/2, \pi/2)$ – môžeme teda pracovať aj v komplexnej rovine rozrezanej ako na obrázku 4a. Podobne integrál

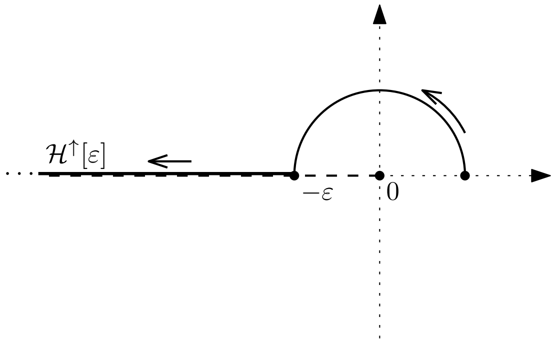
$$\int_{\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w$$



(a) Krivka $\mathcal{H}[\varepsilon]$.

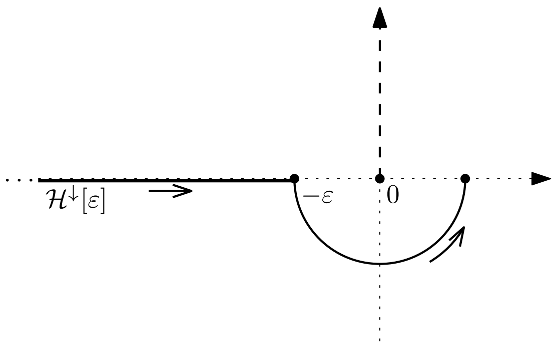


(b) Krivka $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon]$.

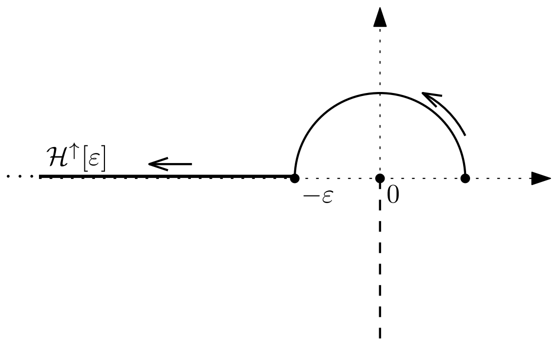


(c) Krivka $\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon]$.

Obr. 3: Rozdelenie krivky $\mathcal{H}[\varepsilon]$ na krivky $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon]$ a $\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon]$.



(a) Argument z intervalu $(-3\pi/2, \pi/2)$ pri $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon]$.



(b) Argument z intervalu $(-\pi/2, 3\pi/2)$ pri $\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon]$.

Obr. 4: Možná zmena rezu komplexnej roviny („čiarkovane") pri integráloch pozdĺž kriviek $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon]$ a $\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon]$.

možno interpretovať aj tak, že jeho integrandom je funkcia $e^w w^{-z}$ pre vetvu w^{-z} danú ako

$$w^{-z} = e^{(\ln|w| + i \arg w)(-z)},$$

kde $\arg w$ vyberáme z intervalu $(-\pi/2, 3\pi/2)$; to zodpovedá rezu komplexnej roviny na obrázku 4b.

Integrandy sú potom v obidvoch prípadoch holomorfné na celej „novo rozrezanej" komplexnej rovine, ktorá je jednoducho súvislá. Integrály pozdĺž $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon_1]$ resp. $\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon_1]$ teda môžeme bezo zmeny ich hodnoty premeniť na integrály pozdĺž $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon_2] + [\varepsilon_2, \varepsilon_1]$ resp. $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] + \mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon_2]$, pretože v oboch prípadoch nahrádzame nejakú „vlastnú podkrivku" inou vlastnou krivkou s rovnakým počiatočným aj koncovým bodom.[19]

[17] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 12.
[18] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 12.
[19] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 4, dôsledok P4.14b.

Platí teda

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}[\varepsilon_1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w &= \int_{\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon_1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon_1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \\ &= \int_{\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon_2]+[\varepsilon_2,\varepsilon_1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{[\varepsilon_1,\varepsilon_2]+\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon_2]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \\ &= \int_{\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon_2]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon_2]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{[\varepsilon_2,\varepsilon_1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{[\varepsilon_1,\varepsilon_2]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \\ &= \int_{\mathcal{H}[\varepsilon_2]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Vráťme sa teraz k pôvodne uvažovanému integrálu pozdĺž Hankelovej krivky H – dokážeme, že pre $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z < 0$ v ňom možno krivku H nahradiť *ľubovoľnou* z kriviek $\mathcal{H}[\varepsilon]$.

Lema 9. *Nech $z \in \mathbb{C}$ je také, že $\operatorname{Re} z < 0$. Potom pre všetky $\varepsilon > 0$ je*

$$\int_H e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\mathcal{H}[\varepsilon]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w.$$

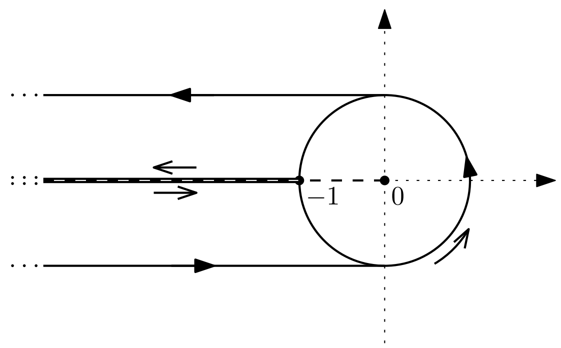
Dôkaz. Vďaka leme 8 stačí tvrdenie dokázať len pre $\varepsilon = 1$. Z tvaru kriviek H a $\mathcal{H}[1]$ – znázornených aj na obrázku 5 – ľahko vidieť, že stačí dokázať rovnosti

$$\int_{H^-} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\mathcal{H}^-[1]+(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[-\pi,-\pi/2])} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w$$

a

$$\int_{H^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_{(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[\pi/2,\pi])+\mathcal{H}^+[1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w.$$

Dokážeme druhú z týchto rovností – prvá by sa dokazovala analogicky.



Obr. 5: Krivky H (plné šípky na krivke) a $\mathcal{H}[1]$ (jednoduché šípky vedľa krivky).

Podobne ako v dôkaze lemy 8 môžeme pri krivkách H^+ a $(\mathcal{H}^\circ[1] \restriction [\pi/2,\pi]) + \mathcal{H}^+[1]$ bezo zmeny hodnoty integrálov zmeniť uvažovaný rez komplexnej roviny – napríklad na $[0,\infty)$, pričom integrand

$$e^w w^{-z} = e^w e^{(\ln|w|+i\arg w)(-z)},$$

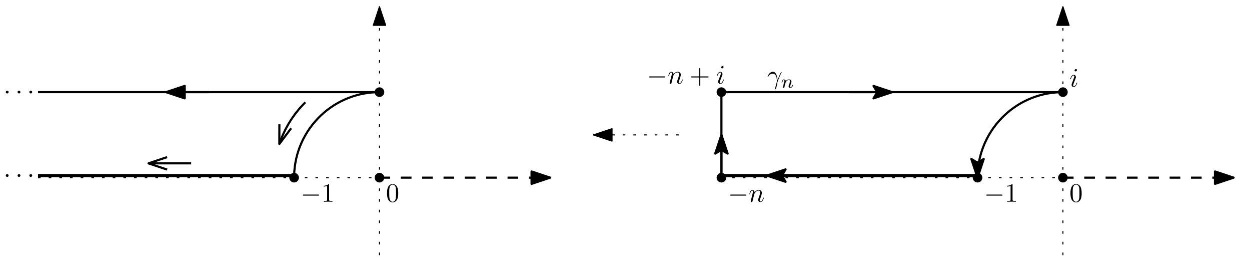
interpretujeme ako daný vetvou, v ktorej $\arg w$ vyberáme z intervalu $(0, 2\pi)$.[20] Táto situácia je znázornená na obrázku 6a.

Pre všetky prirodzené $n \geq 2$ teraz označme $\mathcal{H}^+_n[1] := \mathcal{H}^+_n[1] \restriction [1,n] = [-1+0i, -n+0i]$; pripomeňme tiež, že $H^+_n = H^+ \restriction [0,n] = [i, -n+i]$. Definujme uzavretú krivku

$$\gamma_n := (\mathcal{H}^\circ[1] \restriction [\pi/2,\pi]) + \mathcal{H}^+_n[1] + [-n+0i, -n+i] + (-H^+_n).$$

Tá je znázornená na obrázku 6b.

[20]Pre krivky H^- a $\mathcal{H}^-[1] + (\mathcal{H}^\circ[1] \restriction [-\pi,-\pi/2])$ by sme mohli použiť rovnaký rez, ktorý by však v tomto prípade zodpovedal výberu argumentu z intervalu $(-2\pi, 0)$.



(a) Zmena rezu komplexnej roviny. **(b)** Uzavretá krivka γ_n.

Obr. 6: Dôkaz rovnosti integrálov pre krivky H^+ a $(\mathcal{H}^\circ[1] \restriction [\pi/2, \pi]) + \mathcal{H}^+[1]$.

Z Cauchyho integrálnej vety pre jednoducho súvislú oblasť[21] potom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dostávame

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\gamma_n} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \\ &= \int_{(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[\pi/2,\pi])+\mathcal{H}_n^+[1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{[-n+0i,-n+i]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w - \int_{H_n^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Avšak

$$\int_{[-n+0i,-n+i]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_0^1 e^{-n+ti}(-n+ti)^{-z}\,\mathrm{d}t, \tag{9}$$

pričom pre dostatočne veľké n a fixné z máme

$$\left|(-n+ti)^{-z}\right| \le e^{n/2}$$

pre všetky $t \in [0,1]$. Preto

$$\left|\int_0^1 e^{-n+ti}(-n+ti)^{-z}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 \left|e^{-n+ti}(-n+ti)^{-z}\right|\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 e^{-n}e^{n/2}\,\mathrm{d}t = e^{-n/2},$$

z čoho vďaka (9) dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-n+0i,-n+i]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-n+ti}(-n+ti)^{-z}\,\mathrm{d}t = 0.$$

V dôsledku toho

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[\pi/2,\pi])+\mathcal{H}_n^+[1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{[-n+0i,-n+i]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w - \int_{H_n^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[\pi/2,\pi])+\mathcal{H}_n^+[1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w - \lim_{n\to\infty}\int_{H_n^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \\ &= \int_{(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[\pi/2,\pi])+\mathcal{H}^+[1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w - \int_{H_n^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

čiže

$$\int_{H_n^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_{(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[\pi/2,\pi])+\mathcal{H}^+[1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w,$$

čo bolo treba dokázať. □

Môžeme teraz pristúpiť k dôkazu samotnej Hankelovej integrálnej reprezentácie funkcie $1/\Gamma(z)$ z vety 2, ktorú pre osvieženie pamäti aj znova vyslovíme.

[21] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 4, veta P4.13.

Veta 2. *Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ platí*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_H e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w,$$

kde H je krivka na obrázku 1a. Pri funkcii w^{-z} pritom uvažujeme jej hlavnú vetvu *na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; t.j. pre všetky $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ je*

$$w^{-z} = e^{(\ln|w| + i \arg w)(-z)},$$

kde logaritmus je reálny a argument vyberáme z intervalu $(-\pi, \pi)$.[22]

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že $z < -1$ je reálne. Vďaka leme 9 pre všetky prirodzené $n \geq 1$ platí

$$\int_H e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w = \int_{\mathcal{H}[1/n]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w,$$

v dôsledku čoho aj

$$\begin{aligned}\int_H e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w &= \lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{H}[1/n]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w = \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(\int_{\mathcal{H}^-[1/n]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w + \int_{\mathcal{H}^\circ[1/n]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w + \int_{\mathcal{H}^+[1/n]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w \right).\end{aligned}$$

Keďže ale $z < -1$, s použitím vety o odhade[23] pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dostávame

$$\left| \int_{\mathcal{H}^\circ[1/n]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w \right| \leq \frac{2\pi e}{n},$$

a teda

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{H}^\circ[1/n]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w = 0.$$

Podľa (7), (8) a (1) potom

$$\begin{aligned}\int_H e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w &= \lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{H}^-[1/n]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w + \lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{H}^\circ[1/n]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w + \lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{H}^+[1/n]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w = \\ &= e^{i\pi z}\Gamma(1-z) - e^{-i\pi z}\Gamma(1-z) = 2i \left(\frac{e^{i\pi z} - e^{i\pi z}}{2i} \right) \Gamma(1-z) = 2i \sin(\pi z)\Gamma(1-z) = \\ &= \frac{2\pi i}{\Gamma(z)}.\end{aligned}$$

Pre všetky $z < -1$ teda

$$\frac{1}{2\pi i} \int_H e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w = \frac{1}{\Gamma(z)}.$$

Keďže sú navyše funkcie na oboch stranách celé, z vety o jednoznačnosti[24] dostávame platnosť uvedeného vzťahu aj pre všetky $z \in \mathbb{C}$, čím je dôkaz Hankelovej integrálnej reprezentácie dokončený. □

Odkazy na literatúru

Menej podrobne spracovaný dôkaz Hankelovej integrálnej reprezentácie funkcie $1/\Gamma(z)$ (vo verzii vety 4) možno nájsť v dodatku B.3 knihy Flajoleta a Sedgewicka [1]. Dôkaz trochu inej verzie tejto reprezentácie možno nájsť u Henriciho [2].

Literatúra

[1] Flajolet, P.; Sedgewick, R.: *Analytic Combinatorics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[2] Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 2.* New York: John Wiley & Sons, 1977.

[22] Možno tiež povedať, že ide o vetvu funkcie w^{-z} takú, že platí $1^{-z} = 1$.

[23] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 3, veta P3.24.

[24] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 6, veta P6.7.