Vytvárajúce funkcie viacerých premenných

Peter Kostolányi

21. mája 2020

Kľúčom k mnohým praktickým aplikáciám analytickej kombinatoriky sú techniky založené na použití vytvárajúcich funkcií viacerých premenných. Tie umožňujú zahrnúť do analýzy okrem *veľkosti* kombinatorických objektov aj ďalšie ich *parametre* – možno takto napríklad skúmať počet výskytov k nejakého symbolu v slovách dĺžky n, počet cyklov k v permutáciách n-prvkovej množiny, atď. Keďže takéto kombinatorické parametre možno chápať aj ako náhodné premenné, stávajú sa vytvárajúce funkcie viacerých premenných užitočným nástrojom na asymptotickú analýzu rozdelení pravdepodobnosti, stredných hodnôt a rôznych štatistických ukazovateľov. Tieto techniky sú okrem iného aj základom pre aplikácie analytickej kombinatoriky pri analýze časovej zložitosti algoritmov v priemernom prípade.

Tento text je len jemným úvodom do pomerne rozsiahlej problematiky vytvárajúcich funkcií viacerých premenných a niektorých ich aplikácií – omnoho hlbšie rozpracovanie tohto materiálu možno nájsť v knihe Flajoleta a Sedgewicka [2]. V zhode s Flajoletom a Sedgewickom [2] v tomto texte *nebudeme* vytvárajúce funkcie viacerých premenných chápať ako analytické objekty – to by si okrem iného vyžadovalo využívať techniky z teórie funkcií niekoľkých komplexných premenných. Namiesto toho budeme s vytvárajúcimi funkciami viacerých premenných pracovať len na symbolickej úrovni formálnych mocninových radov, pričom naším cieľom zvyčajne bude dospieť k vhodnej vytvárajúcej funkcii jednej premennej, na ktorú bude následne možné aplikovať analytické metódy. Poznamenajme však, že existuje aj relatívne nová oblasť *viacrozmernej analytickej kombinatoriky*, ktorá je v tomto zmysle „plnohodnotným“ rozšírením analytickej kombinatoriky na prípad vytvárajúcich funkcií niekoľkých premenných. Ako úvod do tejto značne netriviálnej oblasti výskumu môže poslúžiť predovšetkým monografia Pemantla a Wilsona [3].

Formálne mocninové rady o niekoľkých komutatívnych premenných

Podobným spôsobom, ako sme v úvode semestra definovali formálne mocninové rady o jednej premennej z – všetky takéto rady tvoria obor integrity $\mathbb{C}[\![z]\!]$ – možno definovať aj formálne mocninové rady o niekoľkých komutatívnych[1] premenných $z_1, \ldots, z_m$ s komplexnými koeficientmi. Rovnako ako sú formálne mocninové rady o jednej premennej len odlišným zápisom pre postupnosť ich koeficientov, sú aj formálne mocninové rady o viacerých premenných odlišne zapísaným (viacrozmerným) systémom ich koeficientov, pričom motiváciou za odlišným zápisom je odlišná uvažovaná multiplikatívna operácia. Formálne bude takýto rad R daný zobrazením, ktoré pre každú m-ticu exponentov $k_1, \ldots, k_m$ vráti koeficient pri $z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m}$; ide teda o *funkciu exponentov.* Rovnako ako pri radoch o jednej premennej však budeme na posilnenie intuície používať zápis evokujúci, že R je *funkciou premenných* $z_1, \ldots, z_m$; budeme teda písať $R = R(z_1, \ldots, z_m)$.

Definícia 1. Nech $m \geq 1$ je prirodzené číslo. *Formálnym mocninovým radom* o m premenných $z_1, \ldots, z_m$ nazveme ľubovoľné zobrazenie $R\colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{C}$. Ak je pre všetky $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ výstupná hodnota zobrazenia R pri argumentoch $(k_1, \ldots, k_m)$ rovná $a_{k_1,\ldots,k_m}$, tak samotný rad R píšeme ako

$$R = R(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{k_1,\ldots,k_m \geq 0} a_{k_1,\ldots,k_m} z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m}.$$

Pre výstupnú hodnotu zobrazenia R pri argumentoch $(k_1, \ldots, k_m)$ namiesto $R(k_1, \ldots, k_m)$ píšeme

$$\left[z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m}\right] R(z_1, \ldots, z_m)$$

a túto hodnotu nazývame *koeficientom* radu R pri $z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m}$. Množinu všetkých formálnych mocninových radov o premenných $z_1, \ldots, z_m$ označujeme $\mathbb{C}[\![z_1, \ldots, z_m]\!]$.

[1] Komutativita premenných znamená, že ako obvykle pre každú dvojicu premenných z_r, z_s platí $z_r z_s = z_s z_r$. Na tomto mieste ju zdôrazňujeme najmä kvôli odlíšeniu od radov o niekoľkých *nekomutatívnych* premenných, ktoré sú prirodzeným zovšeobecnením formálnych jazykov. V nasledujúcom budeme komutatívnosť premenných považovať za samozrejmú a nebudeme na ňu explicitne upozorňovať.

Väčšinu operácií na formálnych mocninových radoch z $\mathbb{C}[\![z_1, \dots, z_m]\!]$ možno zaviesť úplne rovnakým spôsobom ako pre rady z $\mathbb{C}[\![z]\!]$, pričom aj ich vlastnosti sú podobné ako v jednorozmernom prípade – túto úlohu teda prenechávame čitateľovi ako jednoduché cvičenie. Špeciálne platí, že spoločne so súčtom radov (definovaným po zložkách) a Cauchyho súčinom radov tvorí $\mathbb{C}[\![z_1, \dots, z_m]\!]$ obor integrity.

Z hľadiska operácií na formálnych mocninových radoch sa rozdiel medzi prípadom jednej a viacerých premenných najmarkantnejšie prejaví v prípade formálnej derivácie, kde je pri radoch s $m \geq 2$ premennými nutné uvažovať formálne parciálne derivácie: pre všetky

$$R(z_1, \dots, z_m) = \sum_{k_1, \dots, k_m \geq 0} a_{k_1, \dots, k_m} z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m} \in \mathbb{C}[\![z_1, \dots, z_m]\!]$$

a $j = 1, \dots, m$ definujeme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_j} R(z_1, \dots, z_m) = R_{z_j}(z_1, \dots, z_m) &:= \sum_{k_1, \dots, k_m \geq 0} (k_j + 1) a_{k_1, \dots, k_{j-1}, (k_j+1), k_{j+1}, \dots, k_m} z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m} = \\ &= \sum_{\substack{k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_m \geq 0 \\ k_j \geq 1}} k_j a_{k_1, \dots, k_m} z_1^{k_1} \dots z_{j-1}^{k_{j-1}} z_j^{k_j - 1} z_{j+1}^{k_{j+1}} \dots z_m^{k_m}.\end{aligned}$$

V nasledujúcom sa budeme zaoberať najmä formálnymi mocninovými radmi *dvoch* premenných. V takom prípade budeme väčšinou používať označenia z, u pre premenné, n pre exponent premennej z a k pre exponent premennej u. Typický formálny mocninový rad dvoch premenných teda možno zapísať ako

$$R(z, u) = \sum_{n, k \geq 0} a_{n,k} z^n u^k.$$

Vytvárajúce funkcie dvoch premenných

V nasledujúcom sa zameriame na vytvárajúce funkcie *dvoch* premenných – obdobne by sme však mohli skúmať vytvárajúce funkcie ľubovoľného konečného počtu premenných. Tak, ako (obyčajné alebo exponenciálne) vytvárajúce funkcie jednej premennej z prirodzene zodpovedajú kombinatorickým triedam (neoznačených alebo označených objektov), prislúchajú vytvárajúce funkcie dvoch premenných ku *kombinatorickým triedam s parametrom.*[2] Ide o kombinatorické triedy, na ktorých je okrem zvyčajnej funkcie pre *veľkosť* jednotlivých objektov definované ešte jedno zobrazenie – tzv. *parameter* – χ priraďujúci každému objektu nejaké iné prirodzené číslo (napr. počet výskytov daného symbolu v slove, počet cyklov permutácie, atď.). Koeficient zodpovedajúcej vytvárajúcej funkcie pri $z^n u^k$ potom závisí od počtu objektov veľkosti n s hodnotou parametra k; umožňuje sa tak podstatne jemnejšia klasifikácia, než v prípade vytvárajúcich funkcií jednej premennej.

Definícia 2. *Kombinatorická trieda s parametrom* je trojica $(\mathcal{A}, |\cdot|, \chi)$, kde $(\mathcal{A}, |\cdot|)$ je kombinatorická trieda a $\chi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ je ľubovoľné zobrazenie.

Z definície kombinatorickej triedy vyplýva, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je vzor čísla n pri zobrazení $|\cdot|$, daný množinou

$$\mathcal{A}_n = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid |\alpha| = n\},$$

konečný. Pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ je teda konečná aj množina

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid |\alpha| = n;\ \chi(\alpha) = k\},$$

čím je odôvodnená zmysluplnosť nasledujúcich dvoch definícií.

[2] Vytvárajúce funkcie m premenných by potom zodpovedali kombinatorickým triedam s $m - 1$ parametrami.

Definícia 3. Nech $(\mathcal{A}, |\cdot|, \chi)$ je kombinatorická trieda s parametrom. *Obyčajnou vytvárajúcou funkciou dvoch premenných* triedy $(\mathcal{A}, |\cdot|, \chi)$ nazývame formálny mocninový rad

$$A(z,u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} u^{\chi(\alpha)} = \sum_{n,k \geq 0} a_{n,k} z^n u^k,$$

kde $a_{n,k}$ je pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ dané ako $a_{n,k} := |\mathcal{A}_{n,k}|$.

Definícia 4. Nech $(\mathcal{A}, |\cdot|, \chi)$ je kombinatorická trieda s parametrom. *Exponenciálnou vytvárajúcou funkciou dvoch premenných* triedy $(\mathcal{A}, |\cdot|, \chi)$ nazývame formálny mocninový rad

$$E(z,u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} u^{\chi(\alpha)} = \sum_{n,k \geq 0} \frac{a_{n,k}}{n!} z^n u^k,$$

kde $a_{n,k}$ je pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ dané ako $a_{n,k} := |\mathcal{A}_{n,k}|$.

Vzhľadom na to, že pre každú kombinatorickú triedu s parametrom $(\mathcal{A}, |\cdot|, \chi)$ je $(\mathcal{A}, |\cdot|)$ bežná kombinatorická trieda, môže pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existovať iba konečne veľa rôznych $k \in \mathbb{N}$ takých, že $a_{n,k} = |\mathcal{A}_{n,k}|$ je nenulové. Existuje preto aj súčet

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k},$$

ktorý je daný konečným súčtom všetkých nenulových $a_{n,k}$. V dôsledku toho môžeme pre obyčajné aj exponenciálne vytvárajúce funkcie dvoch premenných uvažovať *dosadenie hodnoty* 1 *za premennú* u: ak je $A(z,u)$ obyčajná vytvárajúca funkcia triedy $(\mathcal{A}, |\cdot|, \chi)$ a $E(z,u)$ je jej exponenciálna vytvárajúca funkcia, kladieme

$$\begin{aligned} A(z,1) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \\ E(z,1) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n. \end{aligned}$$

Ľahko vidieť, že $A(z) := A(z,1)$ je obyčajnou vytvárajúcou funkciou triedy $(\mathcal{A}, |\cdot|)$ a $E(z) := E(z,1)$ je jej exponenciálnou vytvárajúcou funkciou.

Symbolická metóda pre kombinatorické triedy s parametrami

Na prípad kombinatorických tried s parametrami a nim zodpovedajúcich vytvárajúcich funkcií dvoch premenných možno rozšíriť ako symbolickú metódu pre neoznačené objekty, tak aj symbolickú metódu pre označené objekty. V oboch prípadoch sa *atomická trieda* $\mathcal{Z}$ aj *neutrálna trieda* $\mathcal{E}$ interpretujú ako jednoprvkové kombinatorické triedy s *nulovým* parametrom – čiže $\mathcal{Z}$ označuje triedu $(\{\bullet\}, |\cdot|, \chi)$, kde $|\bullet| = 1$ a $\chi(\bullet) = 0$ a $\mathcal{E}$ označuje triedu $(\{\circ\}, |\cdot|, \chi)$, kde $|\circ| = 0$ a $\chi(\circ) = 0$. Okrem nich však navyše uvažujeme aj takzvanú *značku*, čo je trieda $\mathcal{U} = (\{\diamond\}, |\cdot|, \chi)$, kde $|\diamond| = 0$ a $\chi(\diamond) = 1$.

Operácie na kombinatorických triedach s parametrami, z ktorých možno vytvárať kombinatorické špecifikácie (napríklad súčet, karteziánsky súčin, postupnosť, atď.), sú pre neoznačené aj označené objekty veľmi podobné ako pri kombinatorických triedach bez parametrov. Nosná množina, ako aj funkcia veľkosti, sú zakaždým definované rovnako ako pre operácie na triedach bez parametrov. Jediný rozdiel teda spočíva v nutnosti definovať pre výslednú kombinatorickú triedu funkciu parametra. Pri operáciách, ktoré budeme uvažovať, bude na výslednej triede vždy definovaný tzv. *zdedený parameter*, ktorý sa definuje nasledujúcim spôsobom: pri operácii *súčtu* kombinatorických tried $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}_1, |\cdot|_1, \chi_1)$, $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{A}_2, |\cdot|_2, \chi_2)$ – či už neoznačených alebo označených objektov – je hodnota parametra $\chi(\alpha)$ každého prvku α triedy $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ definovaná ako $\chi(\alpha) = \chi_1(\alpha)$ pre prvky $\mathcal{A}_1$ a ako $\chi(\alpha) = \chi_2(\alpha)$ pre prvky $\mathcal{A}_2$; pri multiplikatívnych operáciách $\times$ (pre neoznačené triedy) a $\star$

(pre označené triedy) je zdedenou hodnotou parametra pre (α, β) hodnota $\chi(\alpha, \beta) = \chi_1(\alpha) + \chi_2(\beta)$; pre postupnosti $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ prvkov triedy $\mathcal{A}' = (\mathcal{A}', |\cdot|', \chi')$ (či už v neoznačenom alebo označenom prípade) je táto hodnota daná ako $\chi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \chi'(\alpha_1) + \ldots + \chi'(\alpha_m)$; pre zvyšné operácie, ktoré možno vyjadriť pomocou relácií ekvivalencie na postupnostiach, vychádza táto hodnota z hodnoty pre postupnosti. Napríklad $\mathcal{U}^2 \times \mathcal{Z}$ tak pozostáva z jediného prvku veľkosti 1 s hodnotou parametra 2.

Nasledujúce dve vety popisujú vzťahy medzi operáciami na kombinatorických triedach s parametrami a zodpovedajúcimi operáciami na vytvárajúcich funkciách dvoch premenných; prvá z nich sa pritom zameriava na triedy neoznačených objektov a nim zodpovedajúce obyčajné vytvárajúce funkcie a druhá na triedy označených objektov a nim zodpovedajúce exponenciálne vytvárajúce funkcie. V oboch prípadoch sú dôkazy prakticky rovnaké ako pre kombinatorické triedy bez parametra; prenechávame ich teda čitateľovi ako jednoduché cvičenie. Reláciu prislúchajúcej obyčajnej resp. exponenciálnej vytvárajúcej funkcie budeme označovať ako $\overset{\text{OBGF}}{\longleftrightarrow}$ resp. $\overset{\text{EBGF}}{\longleftrightarrow}$.[3]

Veta 5. *Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, |\cdot|_{\mathcal{A}}, \chi_{\mathcal{A}})$ a $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}}, \chi_{\mathcal{B}})$ sú kombinatorické triedy neoznačených objektov s parametrom. Nech $\mathcal{A} \overset{\text{OBGF}}{\longleftrightarrow} A(z,u)$ a $\mathcal{B} \overset{\text{OBGF}}{\longleftrightarrow} B(z,u)$. Potom*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} + \mathcal{B} &\overset{\text{OBGF}}{\longleftrightarrow} A(z,u) + B(z,u), \\
\mathcal{A} \times \mathcal{B} &\overset{\text{OBGF}}{\longleftrightarrow} A(z,u)B(z,u), \\
\mathrm{SEQ}(\mathcal{A}) &\overset{\text{OBGF}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - A(z,u)} && (\textit{ak } \mathcal{A}_0 = \emptyset), \\
\mathrm{PSET}(\mathcal{A}) &\overset{\text{OBGF}}{\longleftrightarrow} \exp\left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{t+1}}{t} A(z^t, u^t)\right) && (\textit{ak } \mathcal{A}_0 = \emptyset), \\
\mathrm{MSET}(\mathcal{A}) &\overset{\text{OBGF}}{\longleftrightarrow} \exp\left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t} A(z^t, u^t)\right) && (\textit{ak } \mathcal{A}_0 = \emptyset).
\end{aligned}$$

Veta 6. *Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, |\cdot|_{\mathcal{A}}, \chi_{\mathcal{A}})$ a $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}}, \chi_{\mathcal{B}})$ sú kombinatorické triedy označených objektov s parametrom. Nech $\mathcal{A} \overset{\text{EBGF}}{\longleftrightarrow} E(z,u)$ a $\mathcal{B} \overset{\text{EBGF}}{\longleftrightarrow} F(z,u)$. Potom*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} + \mathcal{B} &\overset{\text{EBGF}}{\longleftrightarrow} E(z,u) + F(z,u), \\
\mathcal{A} \star \mathcal{B} &\overset{\text{EBGF}}{\longleftrightarrow} E(z,u)F(z,u), \\
\mathrm{SEQ}(\mathcal{A}) &\overset{\text{EBGF}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - E(z,u)} && (\textit{ak } \mathcal{A}_0 = \emptyset), \\
\mathrm{SET}(\mathcal{A}) &\overset{\text{EBGF}}{\longleftrightarrow} \exp\left(E(z,u)\right) && (\textit{ak } \mathcal{A}_0 = \emptyset), \\
\mathrm{CYC}(\mathcal{A}) &\overset{\text{EBGF}}{\longleftrightarrow} \ln \frac{1}{1 - E(z,u)} && (\textit{ak } \mathcal{A}_0 = \emptyset).
\end{aligned}$$

Kumulatívne vytvárajúce funkcie a stredné hodnoty

Vyššie sme videli, že ak k triede s parametrom $(\mathcal{A}, |\cdot|, \chi)$ zodpovedá obyčajná vytvárajúca funkcia $A(z,u)$ a exponenciálna vytvárajúca funkcia $E(z,u)$, tak $A(z) = A(z,1)$ je obyčajná vytvárajúca funkcia triedy bez parametra $(\mathcal{A}, |\cdot|)$ a $E(z) = E(z,1)$ je jej exponenciálna vytvárajúca funkcia. Ľahko to vidieť aj z kombinatorického tvaru vytvárajúcich funkcií, pretože

$$\begin{aligned}
A(z,1) = [A(z,u)]_{u=1} &= \left[\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} u^{\chi(\alpha)}\right]_{u=1} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} 1^{\chi(\alpha)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} = A(z), \\
E(z,1) = [E(z,u)]_{u=1} &= \left[\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} u^{\chi(\alpha)}\right]_{u=1} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} 1^{\chi(\alpha)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} = E(z);
\end{aligned}$$

dosadením $u = 1$ teda každý objekt α triedy $\mathcal{A}$ započítame práve raz.

[3] Skratka OBGF je z angl. *ordinary bivariate generating function* a EBGF je z angl. *exponential bivariate generating function.*

Ak teraz vytvárajúce funkcie $A(z,u)$ a $E(z,u)$ najprv formálne zderivujeme podľa u a až následne za u dosadíme hodnotu 1, dostaneme formálne mocninové rady

$$A^c(z) := \left[\frac{\partial}{\partial u}A(z,u)\right]_{u=1} = \left[\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\chi(\alpha)z^{|\alpha|}u^{\chi(\alpha)-1}\right]_{u=1} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\chi(\alpha)z^{|\alpha|}1^{\chi(\alpha)-1} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\chi(\alpha)z^{|\alpha|},$$

$$E^c(z) := \left[\frac{\partial}{\partial u}E(z,u)\right]_{u=1} = \left[\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\chi(\alpha)\frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!}u^{\chi(\alpha)-1}\right]_{u=1} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\chi(\alpha)\frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!}1^{\chi(\alpha)-1} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\chi(\alpha)\frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!}.$$

Ľahko vidieť, že

$$[z^n]A^c(z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_n}\chi(\alpha) \qquad \text{a} \qquad [z^n]E^c(z) = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_n}\chi(\alpha).$$

Koeficientom pri z^n v $A^c(z)$ je teda *kumulatívna hodnota* parametra χ objektov veľkosti n v triede $\mathcal{A}$; v koeficientoch radu $E^c(z)$ je táto hodnota ešte predelená $n!$. Rad $A^c(z)$ resp. $E^c(z)$ teda nazývame obyčajnou resp. exponenciálnou *kumulatívnou vytvárajúcou funkciou* triedy $(\mathcal{A},|\cdot|,\chi)$.

Kumulatívne vytvárajúce funkcie možno použiť na vyjadrenie strednej hodnoty parametra χ pri rovnomerne náhodnom výbere objektov triedy $\mathcal{A}_n$. Ak túto strednú hodnotu pre dané $n\in\mathbb{N}$ označíme ako $\mathbb{E}_n(\chi)$, očividne

$$\mathbb{E}_n(\chi) = \frac{[z^n]A^c(z)}{[z^n]A(z)} = \frac{[z^n]E^c(z)}{[z^n]E(z)}.$$

Na nájdenie asymptotického odhadu pre koeficienty vytvárajúcich funkcií $A(z)$, $A^c(z)$, $E(z)$ a $E^c(z)$ možno často použiť metódu analýzy singularít. V takom prípade možno túto informáciu využiť na analýzu strednej hodnoty parametra χ pre rovnomerne náhodne vybrané objekty veľkosti n a $n\to\infty$. To je často užitočné v praxi (napríklad pri analýze zložitosti algoritmov v priemernom prípade).

Poznamenajme tiež, že podobným spôsobom možno analyzovať aj ďalšie ukazovatele parametra χ chápaného ako náhodná premenná, napríklad jeho disperziu. Podrobnosti možno nájsť v [2].

Pravdepodobnostné vytvárajúce funkcie

Nech $(\mathcal{A},|\cdot|,\chi)$ je kombinatorická trieda s parametrom. Podobne ako stredné hodnoty parametra χ možno z vytvárajúcich funkcií dvoch premenných získať aj kompletnú informáciu o distribúcii náhodnej premennej χ v prípade, že objekty danej veľkosti n vyberáme rovnomerne náhodne.

Pre ľubovoľný formálny mocninový rad dvoch premenných $F(z,u)$ môžeme symbolom $[z^n]F(z,u)$ označiť, pre všetky $n\in\mathbb{N}$, formálny mocninový rad o jednej premennej u definovaný ako

$$[z^n]F(z,u) := \sum_{k=0}^{\infty}\Big([z^n u^k]F(z,u)\Big)\,u^k.$$

Ak teraz triede $(\mathcal{A},|\cdot|,\chi)$ zodpovedá obyčajná vytvárajúca funkcia $A(z,u)$ a exponenciálna vytvárajúca funkcia $E(z,u)$ a ak symbolom $\mathbb{P}_n[\chi=k]$ označíme pravdepodobnosť, že hodnota parametra rovnomerne náhodne vybraného objektu triedy $\mathcal{A}_n$ je rovná k, očividne platí

$$P_n(u) := \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}_n[\chi=k]u^k = \frac{[z^n]A(z,u)}{[z^n]A(z)} = \frac{[z^n]E(z,u)}{[z^n]E(z)}.$$

Takto definovaný formálny mocninový rad $P_n(u)$ nazývame n-tou *pravdepodobnostnou vytvárajúcou funkciou* triedy $(\mathcal{A},|\cdot|,\chi)$.

Príklady aplikácií

Použitie vytvárajúcich funkcií dvoch premenných teraz demonštrujeme na niekoľkých ukážkových príkladoch ich aplikácií.

Príklad 7. Asi najjednoduchším učebnicovým príkladom vytvárajúcej funkcie dvoch premenných, vhodným najmä na lepšie zžitie sa s týmto konceptom, je obyčajná vytvárajúca funkcia pre binomické koeficienty,

$$B(z,u) = \sum_{n,k \geq 0} \binom{n}{k} z^n u^k.$$

Keďže pre všetky $n \in \mathbb{N}$ podľa binomickej vety platí

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} u^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k = (1+u)^n,$$

zisťujeme, že

$$B(z,u) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+u)^n z^n = \frac{1}{1-z(1+u)}.$$

Táto vytvárajúca funkcia zodpovedá napríklad kombinatorickej triede všetkých slov nad dvojprvkovou abecedou $\{a,b\}$, kde parameter udáva počet výskytov symbolu a. K tomuto pozorovaniu možno ľahko prísť priamym kombinatorickým náhľadom; v nasledujúcom ho ale odvodíme pomocou symbolickej metódy. Kombinatorickou špecifikáciou všetkých takýchto slov je

$$\mathcal{W} = \mathrm{SEQ}\left(\mathcal{U} \times \mathcal{Z}_a + \mathcal{Z}_b\right) = \mathrm{SEQ}\left(\mathcal{U} \times \mathcal{Z} + \mathcal{Z}\right);$$

zodpovedajúca obyčajná vytvárajúca funkcia $W(z,u)$ je teda skutočne daná ako

$$W(z,u) = \frac{1}{1-(zu+z)} = \frac{1}{1-z(1+u)} = B(z,u).$$

Príklad 8. Exponenciálna vytvárajúca funkcia pre binomické koeficienty je daná ako

$$\hat{B}(z,u) = \sum_{n,k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{z^n u^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+u)^n \frac{z^n}{n!} = e^{z(1+u)}.$$

Príklad 9. Pre $n \to \infty$ teraz asymptoticky vyčíslime priemerný počet cyklov v rovnomerne náhodne zvolenej permutácii n-prvkovej množiny. Kombinatorická špecifikácia triedy všetkých permutácií, chápaných ako označené objekty, s parametrom udávajúcim počet cyklov je zjavne

$$\mathcal{P} = \mathrm{SET}\left(\mathcal{U} \star \mathrm{CYC}(\mathcal{Z})\right).$$

Zodpovedajúca exponenciálna vytvárajúca funkcia dvoch premenných je teda daná ako

$$P(z,u) = \exp\left(u \ln \frac{1}{1-z}\right) = (1-z)^{-u}.$$

V dôsledku toho vidíme jednak, že pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $P(z)$ triedy všetkých permutácií bez parametra platí

$$P(z) = P(z,1) = \frac{1}{1-z}$$

a tiež, že pre exponenciálnu kumulatívnu vytvárajúcu funkciu $P^c(z)$ triedy všetkých permutácií s parametrom udávajúcim počet cyklov platí

$$P^c(z) = \left[\frac{\partial}{\partial u} P(z,u)\right]_{u=1} = \left[-(1-z)^{-u} \ln(1-z)\right]_{u=1} = \left[(1-z)^{-u} \ln \frac{1}{1-z}\right]_{u=1} = \frac{1}{1-z} \ln \frac{1}{1-z}.$$

Pomocou metódy analýzy singularít (alebo v tomto jednoduchom prípade aj elementárnymi metódami) ľahko dospejeme k asymptotickým odhadom

$$[z^n]P(z) \sim \frac{n^0}{\Gamma(1)} = 1$$

a

$$[z^n]P^c(z) \sim \frac{n^0}{\Gamma(1)}(\ln n) = \ln n$$

pre $n \to \infty$. Pre očakávaný počet cyklov E_n rovnomerne náhodne zvolenej permutácie n-prvkovej množiny teda pre $n \to \infty$ platí

$$E_n = \frac{[z^n]P^c(z)}{[z^n]P(z)} \sim \ln n.$$

Môžeme teda uzavrieť, že priemerná permutácia n-prvkovej množiny má pre dostatočne veľké n približne $\ln n$ cyklov.

Príklad 10. Predpokladajme, že predavač rovnomerne náhodne vydáva jednokorunové, dvojkorunové a päťkorunové mince. Aký je pre $n \to \infty$ priemerný počet jednokorunových mincí, ktoré tento predavač vydá, ak celková vydávaná čiastka je n korún? Kombinatorickú triedu všetkých sád vydaných mincí (chápaných ako neoznačené objekty), s parametrom udávajúcim počet jednokorunových mincí, môžeme zadať špecifikáciou

$$\mathcal{M} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{U} \times \mathcal{Z}) \times \mathrm{SEQ}(\mathcal{Z}^2) \times \mathrm{SEQ}(\mathcal{Z}^5).$$

Zodpovedajúca obyčajná vytvárajúca funkcia dvoch premenných je teda

$$M(z,u) = \frac{1}{(1-uz)(1-z^2)(1-z^5)}.$$

Pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $M(z)$ zodpovedajúcej triedy bez parametra preto platí

$$M(z) = M(z,1) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)}$$

a kumulatívna vytvárajúca funkcia $M^c(z)$ je daná ako

$$M^c(z) = \left[\frac{\partial}{\partial u} M(z,u)\right]_{u=1} = \left[\frac{z}{(1-uz)^2(1-z^2)(1-z^5)}\right]_{u=1} = \frac{z}{(1-z)^2(1-z^2)(1-z^5)}.$$

Obidve tieto funkcie majú až 6 dominantných singularít. Ľahko však vidieť, že pre funkciu $M(z)$ resp. $M^c(z)$ je bod $z = 1$ pólom tretieho resp. štvrtého rádu, kým zvyšné singularity sú pri oboch funkciách jednoduchými pólmi. Z toho vidieť, že príspevok singularít rôznych od 1 bude pri aplikácii metódy analýzy singularít (pre funkcie s viacerými dominantnými singularitami) zanedbateľný a stačí sa tak sústrediť na singularity v bode $z = 1$. Pre $z \to 1$ pritom platí

$$M(z) = \frac{1}{10(1-z)^3} + O\left((1-z)^{-2}\right),$$
$$M^c(z) = \frac{1}{10(1-z)^4} + O\left((1-z)^{-3}\right).$$

Metódou analýzy singularít dostávame pre $n \to \infty$ odhady

$$[z^n]M(z) \sim \frac{n^2}{10\,\Gamma(3)} = \frac{n^2}{20},$$
$$[z^n]M^c(z) \sim \frac{n^3}{10\,\Gamma(4)} = \frac{n^3}{60}.$$

V dôsledku toho pre očakávaný počet E_n vydaných jednokorunových mincí pre $n \to \infty$ platí

$$E_n = \frac{[z^n]M^c(z)}{[z^n]M(z)} \sim \frac{n}{3}.$$

Príklad 11. Pre $n \to \infty$ teraz vyčíslime očakávaný počet listov v rovnomerne náhodne vybranom (neprázdnom) binárnom strome s n vrcholmi. Kombinatorická špecifikácia zodpovedajúcej triedy (neoznačených objektov) s parametrom je založená na myšlienke, že každý takýto strom je buď samotný list (čo sa prejaví aj v príslušnej značke $\mathcal{U}$), alebo pozostáva z koreňa a dvoch podstromov, z ktorých musí byť minimálne jeden neprázdny; druhý prípad pritom možno prirodzene rozložiť na tri jednoduchšie prípady podľa toho, ktoré z podstromov sú neprázdne. Takto teda prichádzame k špecifikácii

$$\mathcal{B} = \mathcal{U} \times \mathcal{Z} + \mathcal{Z} \times \mathcal{B} + \mathcal{Z} \times \mathcal{B} + \mathcal{Z} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}.$$

Pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu dvoch premenných prislúchajúcu k tejto triede teda platí

$$B(z,u) = uz + 2zB(z,u) + zB(z,u)^2,$$

pričom táto rovnica má dve riešenia

$$B_{\pm}(z,u) = \frac{1 - 2z \pm \sqrt{1 - 4z + 4(1-u)z^2}}{2z}$$

Prirodzené koeficienty má „mínusový" rad – ten je teda hľadanou vytvárajúcou funkciou

$$B(z,u) = \frac{1 - 2z - \sqrt{1 - 4z + 4(1-u)z^2}}{2z}.$$

Pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $B(z)$ zodpovedajúcej triedy bez parametra tak podľa očakávania dostávame

$$B(z) = \frac{1 - 2z - \sqrt{1-4z}}{2z} = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} - 1.$$

Pre kumulatívnu vytvárajúcu funkciu $B^c(z)$ platí

$$B^c(z) = \left[\frac{\partial}{\partial u} B(z,u)\right]_{u=1} = \left[\frac{z}{\sqrt{1 - 4z + 4(1-u)z^2}}\right]_{u=1} = \frac{z}{\sqrt{1-4z}}.$$

Jedinou dominantnou singularitou oboch týchto funkcií je bod $1/4$, pričom pre $z \to 1/4$ máme

$$B(z) = 1 - 2\sqrt{1-4z} + O(1-4z),$$
$$B^c(z) = \frac{1}{4\sqrt{1-4z}} + O(1).$$

Metódou analýzy singularít tak pre $n \to \infty$ prichádzame k odhadom

$$[z^n]B(z) \sim -\frac{2n^{-3/2}4^n}{\Gamma(-1/2)} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}n^{3/2}},$$
$$[z^n]B^c(z) \sim \frac{n^{-1/2}4^n}{4\Gamma(1/2)} = \frac{4^n}{4\sqrt{\pi n}}.$$

Pre $n \to \infty$ je teda očakávaný počet listov E_n v rovnomerne náhodne vybranom binárnom strome daný ako

$$E_n = \frac{[z^n]B^c(z)}{[z^n]B(z)} \sim \frac{n}{4}.$$

Príklad 12. Pre $n \to \infty$ nakoniec vyčíslime priemerný počet výskytov písmena a v slovách dĺžky n bezkontextového jazyka generovaného jednoznačnou gramatikou s pravidlami

$$\sigma \to a\sigma\sigma \mid b\sigma \mid c.$$

Zodpovedajúca kombinatorická trieda (neoznačených objektov) s parametrom má špecifikáciu

$$\mathcal{S} = \mathcal{U} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{S}^2 + \mathcal{Z} \times \mathcal{S} + \mathcal{Z},$$

čomu zodpovedá obyčajná vytvárajúca funkcia dvoch premenných $S(z,u)$ vyhovujúca vzťahu

$$S(z,u) = uzS(z,u)^2 + zS(z,u) + z.$$

Riešenia tejto rovnice sú dané ako

$$S_{\pm}(z,u) = \frac{1 - z \pm \sqrt{1 - 2z + (1-4u)z^2}}{2uz},$$

pričom prirodzené koeficienty má „mínusový" rad

$$S(z,u) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z + (1-4u)z^2}}{2uz}.$$

Vidíme teda, že pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $S(z)$ zodpovedajúcej triedy bez parametra platí

$$S(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z}$$

a pre kumulatívnu vytvárajúcu funkciu $S^c(z)$ platí

$$S^c(z) = \left[\frac{\partial}{\partial u} S(z,u)\right]_{u=1} = \left[\frac{z}{u\sqrt{1 - 2z + (1-4u)z^2}} - \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z + (1-4u)z^2}}{2u^2 z}\right]_{u=1} =$$
$$= \frac{z}{\sqrt{1 - 2z - 3z^2}} - \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z}.$$

Dominantnou singularitou oboch funkcií $S(z)$ a $S^c(z)$ je bod $1/3$, pričom pre $z \to 1/3$ máme

$$S(z) = 1 - \sqrt{3}\sqrt{1 - 3z} + O\left(1 - 3z\right),$$
$$S^c(z) = \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{1 - 3z}} + O(1).$$

Pomocou metódy analýzy singularít teda zisťujeme, že pre $n \to \infty$ platí

$$[z^n]S(z) \sim -\frac{\sqrt{3}n^{-3/2}3^n}{\Gamma(-1/2)} = \frac{\sqrt{3}\,3^n}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}},$$
$$[z^n]S^c(z) \sim \frac{n^{-1/2}3^n}{2\sqrt{3}\,\Gamma(1/2)} = \frac{\sqrt{3}\,3^n}{6\sqrt{\pi n}}.$$

Pre $n \to \infty$ je teda priemerný počet výskytov E_n symbolu a v slovách dĺžky n generovaných uvedenou gramatikou daný ako

$$E_n = \frac{[z^n]S^c(z)}{[z^n]S(z)} \sim \frac{n}{3}.$$

Odkazy na literatúru

Viac sa o vytvárajúcich funkciách niekoľkých premenných a ich použití v analytickej kombinatorike možno dočítať v knihe Flajoleta a Sedgewicka [2] – tento text približne zodpovedá prvým niekoľkým oddielom jej kapitoly III, v ktorej sa však ešte nepredpokladá znalosť metódy analýzy singularít. Analytický prístup k vytvárajúcim funkciám viacerých premenných, značne presahujúci rámec tohto predmetu, je rozpracovaný v monografii Pemantla a Wilsona [3]. Aplikácie metódy analýzy singularít a vytvárajúcich funkcií viacerých premenných na oblasť popisnej zložitosti možno nájsť v [1].

Literatúra

[1] Broda, S.; Machiavelo, A.; Moreira, N.; et al.: A Hitchhiker's Guide to Descriptional Complexity Through Analytic Combinatorics. *Theor. Comput. Sci.*, ročník 528, 2014: s. 85–100.

[2] Flajolet, P.; Sedgewick, R.: *Analytic Combinatorics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[3] Pemantle, R.; Wilson, M. C.: *Analytic Combinatorics in Several Variables*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.