# Analytické vlastnosti vytvárajúcich funkcií

Peter Kostolányi

27. marca 2020

Vytvárajúce funkcie sme doposiaľ chápali výhradne ako *formálne* mocninové rady – nešlo teda o funkcie v pravom slova zmysle, nedávalo zmysel hovoriť o dosadzovaní hodnôt za premennú $z$ a otázky konvergencie radov pri takomto pohľade nehrali žiadnu rolu. V našom ponímaní sú dobre definované aj (obyčajné) vytvárajúce funkcie ako $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} z^n$ alebo $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$, hoci zodpovedajúce „neformálne“ mocninové rady majú nulový polomer konvergencie, a teda nie sú reprezentáciou žiadnej funkcie analytickej v bode 0.

V najbližšej dobe sa budeme zaoberať predovšetkým analýzou asymptotických vlastností koeficientov vytvárajúcich funkcií – jedným z najdôležitejších problémov enumeratívnej kombinatoriky. Tu sa naopak analytický pohľad na vytvárajúce funkcie ukazuje ako rozhodujúci. Uvidíme, že pokiaľ má vytvárajúca funkcia – chápaná ako „neformálny“ mocninový rad – nenulový polomer konvergencie, a teda reprezentuje funkciu analytickú v bode 0, možno na analýzu asymptotických vlastností jej koeficientov aplikovať nástroje komplexnej analýzy, ako napríklad Cauchyho integrálny vzorec; kľúčovú úlohu tu pritom budú zohrávať singularity takto „analyticky“ chápaných vytvárajúcich funkcií. Vstúpime tak na pôdu *analytickej kombinatoriky.*

Namiesto oboru integrity formálnych mocninových radov sa teda po nasledujúcich niekoľko týždňov budeme pohybovať v jeho podokruhu tvorenom komplexnými funkciami analytickými v bode 0. Symbolická metóda – ako aj všetky ďalšie techniky vybudované na čisto formálnej úrovni – však vďaka pozorovaniam učineným v úvode semestra zostanú použiteľné aj naďalej: ak sa napríklad vytvárajúca funkcia nejakej kombinatorickej triedy, získaná symbolickou metódou, ukáže byť konvergentnou na okolí bodu 0, môžeme ihneď prejsť do komplexnej analýzy a takýto nový pohľad využiť na analýzu koeficientov tejto vytvárajúcej funkcie.

V tomto texte sa budeme zaoberať najzákladnejšími analytickými vlastnosťami – obyčajných aj exponenciálnych – vytvárajúcich funkcií. Inak povedané: budeme skúmať vlastnosti holomorfných funkcií, ktorých Maclaurinov rad má nezáporné reálne koeficienty (čo je prípad všetkých vytvárajúcich funkcií) a špeciálne prirodzené koeficienty (ktorými sa vyznačujú *obyčajné* vytvárajúce funkcie). Spoločne s materiálom pokrytým v nadväzujúcom texte, venovanom funkcii gama, pôjde o matematický základ potrebný na skúmanie asymptotických vlastností koeficientov vytvárajúcich funkcií metódou *analýzy singularít*, ktorou sa na tomto predmete budeme zaoberať vzápätí.

## Označenia a elementárne pozorovania

Označenie $\mathbb{C}[\![z]\!]$, ktoré sme používali pre množinu (obor integrity) všetkých formálnych mocninových radov o jednej premennej $z$ a s komplexnými koeficientmi, rozšírime prirodzeným spôsobom aj na iné množiny koeficientov: budeme teda napríklad písať $\mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$ pre množinu formálnych mocninových radov s *nezápornými reálnymi* koeficientmi a $\mathbb{N}[\![z]\!]$ pre množinu radov s *prirodzenými koeficientmi.* Všetky obyčajné vytvárajúce funkcie patria do $\mathbb{N}[\![z]\!]$ (a teda aj do $\mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$); všetky exponenciálne vytvárajúce funkcie patria do $\mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$.

Videli sme tiež, že obor integrity všetkých funkcií holomorfných (alebo analytických) v bode 0, s nosnou množinou

$$\mathbf{H}_0 = \{f \in \mathbf{H}(D(0,\varrho)) \mid \varrho \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\};\ \varrho \text{ je polomer konvergencie funkcie } f\}$$

a bežnými operáciami na funkciách komplexnej premennej,[1] možno prirodzeným spôsobom vnoriť do oboru integrity $(\mathbb{C}[\![z]\!], +, \cdot, 0, 1)$. Vnorením tu je (očividne injektívne) zobrazenie, ktoré funkciu analytickú v bode 0 zobrazí na formálny mocninový rad, ktorého koeficienty sa zhodujú s koeficientmi Maclaurinovho radu tejto funkcie.

[1] Definičný obor výslednej funkcie je tu vždy menší spomedzi definičných oborov jednotlivých operandov.

Pre obor integrity funkcií analytických v bode 0 budeme v nasledujúcom používať označenie $\mathbb{C}(\!(z)\!) = \mathbf{H}_0$, pričom funkcie z $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ budeme *stotožňovať* s ich obrazmi v $\mathbb{C}[\![z]\!]$ pri vnorení popísanom vyššie. Samotný obor integrity $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ teda budeme chápať aj ako podokruh $\mathbb{C}[\![z]\!]$ a voľne budeme používať označenia ako $\mathbb{R}_{\geq 0}(\!(z)\!)$ a $\mathbb{N}(\!(z)\!)$, ktorých význam je definovaný zrejmým spôsobom. V duchu uvedených konvencií treba chápať aj znenie nasledujúceho tvrdenia a jeho dôsledku.

**Tvrdenie 1.** *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$. Potom $R(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$ práve vtedy, keď existuje reálne $r \geq 0$ také, že pre $n \to \infty$ je $|[z^n]R(z)| = O(r^n)$. Pre polomer konvergencie funkcie $R(z)$ v bode 0 v takom prípade platí*

$$\varrho = \frac{1}{\inf\{r \geq 0 \mid |[z^n]R(z)| = O(r^n)\}}$$

*(kde $1/0 = \infty$).*

*Dôkaz.* Minulý semester sme dokázali vetu o polomere konvergencie,[2] podľa ktorej pre polomer konvergencie radu $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ platí[3]

$$\varrho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|}, \tag{1}$$

kde $1/0 = \infty$ a $1/\infty = 0$. Polomer konvergencie $\varrho$ je teda nenulový práve vtedy, keď je horná limita na pravej strane (1) konečná, pričom v takom prípade platí

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|}}.$$

Za rovnakého predpokladu však zároveň platí rovnosť

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|} = \inf\{r \geq 0 \mid |[z^n]R(z)| = O(r^n)\}, \tag{2}$$

o čom sa zostáva presvedčiť. Skutočne:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|} &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \inf\left\{r \geq 0 \;\middle|\; \sup_{n\geq m} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|} \leq r\right\} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \inf\left\{r \geq 0 \;\middle|\; \forall n \geq m : \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|} \leq r\right\} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \inf\{r \geq 0 \mid \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq r^n\} \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} \inf_{m\in\mathbb{N}} \inf\{r \geq 0 \mid \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq r^n\} = \\
&= \inf\{r \geq 0 \mid \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq r^n\} = \\
&= \inf\{r \geq 0 \mid \exists C > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq Cr^n\} = \\
&= \inf\{r \geq 0 \mid |[z^n]R(z)| = O(r^n)\}.
\end{aligned}$$

Rovnosť s označením $(*)$ tu vyplýva z toho, že ide o limitu postupnosti infím rastúceho reťazca množín, ktorá je nutne nerastúca. Predposlednú rovnosť možno dokázať nasledovne: keďže je množina na pravej strane rovnosti nadmnožinou množiny na ľavej strane, nutne

$$\begin{aligned}
&\inf\{r \geq 0 \mid \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq r^n\} \geq \\
&\quad \geq \inf\{r \geq 0 \mid \exists C > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq Cr^n\}.
\end{aligned}$$

[2] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 2, veta P2.12.

[3] Hoci v znení vety o polomere konvergencie nebola zmienka o formálnych mocninových radoch, je zrejmé, že „mocninový rad“ bez ďalšieho predpokladu na jeho polomer konvergencie je prakticky identickým pojmom. Inak povedané: formálne mocninové rady sa hojne využívajú aj v samotnej komplexnej analýze; na rozdiel od kombinatoriky tam ale zvyčajne (na elementárnej úrovni) nie je dôvod skúmať operácie na takýchto radoch, a teda je možné zaobísť sa tam aj bez explicitne zavedeného pojmu formálneho mocninového radu.

Keby bola táto nerovnosť ostrá, muselo by existovať $r_0 \geq 0$ také, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ možno nájsť $r \in [r_0, r_0 + \varepsilon]$ také, že pre nejaké $C > 0$, nejaké $m \in \mathbb{N}$ a všetky $n \geq m$ platí $|[z^n]R(z)| \leq Cr^n$; súčasne však musí existovať $\delta > 0$ také, že pre žiadne $s \in [r_0, r_0 + \delta]$ neexistuje $m' \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq m'$ platí $|[z^n]R(z)| \leq s^n$. To však nie je možné – ak napríklad vezmeme $\varepsilon = \delta/2$ a $s = r + \delta/2$, musí pre dostatočne veľké $n$ platiť $s^n \geq Cr^n$. Vieme teda nájsť aj $m' \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $n \geq m'$ platí $|[z^n]R(z)| \leq s^n$: spor. To dokazuje rovnosť (2), a tým aj celé tvrdenie. □

**Dôsledok 2.** *Nech $R(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$ (resp. $R(z) \in \mathbb{N}[\![z]\!]$). Potom $R(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\!|z|\!)$ (resp. $R(z) \in \mathbb{N}(\!|z|\!)$) práve vtedy, keď existuje reálne $r \geq 0$ také, že pre $n \to \infty$ je $[z^n]R(z) = O(r^n)$. Pre polomer konvergencie funkcie $R(z)$ v bode 0 v takom prípade platí*

$$\varrho = \frac{1}{\inf\{r \geq 0 \mid [z^n]R(z) = O(r^n)\}}$$

*(kde $1/0 = \infty$).*

*Dôkaz.* Vyplýva z tvrdenia 1 a zo zrejmej skutočnosti, že rad $R(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$ (resp. $R(z) \in \mathbb{N}[\![z]\!]$) je v $\mathbb{C}(\!|z|\!)$ práve vtedy, keď je v $\mathbb{R}_{\geq 0}(\!|z|\!)$ (resp. v $\mathbb{N}(\!|z|\!)$). □

## Pringsheimova veta

Vďaka tvrdeniu 1 a dôsledku 2 vidíme, že polomer konvergencie funkcie analytickej v bode 0 úzko súvisí s asymptotickými vlastnosťami koeficientov jej Maclaurinovho radu. Neskôr tieto tvrdenia preformulujeme do podoby vety 9, vhodnejšej na „hrubozrnnú“ analýzu koeficientov vytvárajúcich funkcií. Táto veta bude naším prvým jednoduchým výsledkom z oblasti analytickej kombinatoriky.

V nasledujúcom dokážeme iné dôležité tvrdenie o funkciách, ktorých Maclaurinov rad má nezáporné reálne koeficienty. Minulý semester sme dokázali,[4] že každá funkcia s polomerom konvergencie $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$ v bode 0 musí mať aspoň jednu singularitu s absolútnou hodnotou $\varrho$ – každú takúto singularitu budeme nazývať *dominantnou.* Takzvaná *Pringsheimova veta* je spresnením tohto tvrdenia pre funkcie z $\mathbb{R}_{\geq 0}(\!|z|\!)$ s polomerom konvergencie $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$: hovorí, že singularitou každej takejto funkcie musí byť aj *samotný polomer konvergencie* $\varrho$. Ak má teda funkcia z $\mathbb{R}_{\geq 0}(\!|z|\!)$ singularitu, medzi jej dominantnými singularitami je vždy aj nejaké kladné reálne číslo.

**Veta 3** (Pringsheimova veta)**.** *Nech $R(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\!|z|\!)$ je funkcia s polomerom konvergencie $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$. Potom je bod $\varrho$ singularitou funkcie $R(z)$.*

*Dôkaz.* Predpokladajme, že pre $z \in D(0, \varrho)$ platí

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $a_n$ nezáporné reálne číslo. Z predchádzajúceho semestra[5] vieme, že funkcia $R'(z)$ je tiež holomorfná na $D(0, \varrho)$, pričom platí

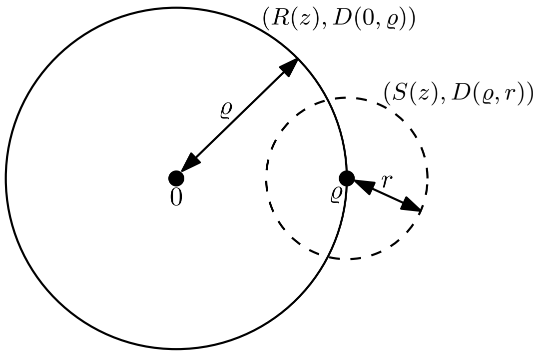
$$R'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

S použitím tohto vzťahu možno matematickou indukciou ľahko dokázať, že pre všetky $m \in \mathbb{N}$ je $m$-tá derivácia funkcie $R(z)$ daná na $D(0, \varrho)$ mocninovým radom

$$R^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n^{\underline{m}} a_n z^{n-m}. \tag{3}$$

Za účelom sporu teraz predpokladajme, že bod $\varrho$ nie je singularitou funkcie $R(z)$. To znamená, že existuje priame analytické predĺženie $(S(z), D(\varrho, r))$ analytického prvku $(R(z), D(0, \varrho))$ v bode $\varrho$, kde $r > 0$ je reálne číslo. Táto situácia je znázornená na obrázku 1.

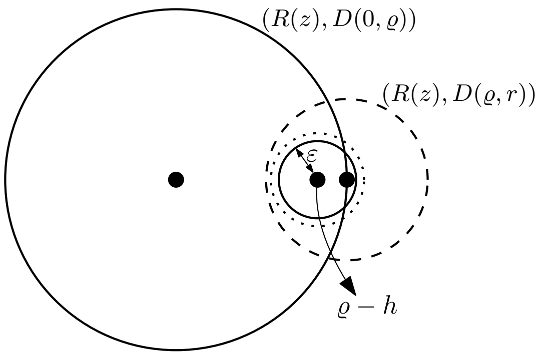
[4] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 10, veta P10.9.
[5] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 2, veta P2.19.




**Obr. 1:** Analytické predĺženie funkcie $R(z)$ v bode $\varrho$.

Z definície priameho analytického predĺženia vyplýva $R(z) = S(z)$ pre všetky $z \in D(0,\varrho) \cap D(\varrho, r)$. Môžeme teda obor definície funkcie $R(z)$ rozšíriť na $D(0,\varrho) \cup D(\varrho, r)$ a namiesto $S(z)$ pre $z \in D(\varrho, r)$ písať opäť len $R(z)$.

Zvoľme teraz reálne $h$ spĺňajúce $0 < h < \varrho$ a reálne $\varepsilon > h$ tak, aby pre nejaké $\delta > 0$ platilo $D(\varrho - h, \varepsilon + \delta) \subseteq D(\varrho, r)$.[6] Táto situácia je znázornená na obrázku 2.




**Obr. 2:** Voľba hodnôt $h$ a $\varepsilon$.

Funkcia $R(z)$ je v (nezápornom reálnom) bode $\varrho - h$ analytická – možno ju tam teda rozvinúť do Taylorovho radu

$$R(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - \varrho + h)^m. \tag{4}$$

Keďže je funkcia $R(z)$ analytická na $D(\varrho - h, \varepsilon + \delta) \subseteq D(\varrho, r)$, z vety o Taylorových radoch[7] vyplýva konvergencia tohto radu pre všetky $z \in \overline{D}(\varrho - h, \varepsilon)$. Podľa tej istej vety a podľa (3) navyše pre koeficienty $b_m$ pre všetky $m \in \mathbb{N}$ dostávame vzťah

$$b_m = \frac{R^{(m)}(\varrho - h)}{m!} = \frac{1}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} n^{\underline{m}} a_n (\varrho - h)^{n-m} = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (\varrho - h)^{n-m}.$$

Keďže sú všetky koeficienty $a_n$ nezáporné reálne a keďže $\varrho - h > 0$, sú všetky koeficienty $b_m$ takisto nezáporné reálne.

[6]Za predpokladu $r \leq \varrho$, nespôsobujúceho ujmu na všeobecnosti, možno vziať napríklad $h < r/3$ a $\varepsilon = 2h$.

[7]*Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 5, veta P5.17.

Vyhodnoťme teraz rad (4) v bode $z = \varrho - h + \varepsilon$. Zisťujeme, že

$$
\begin{aligned}
R(\varrho - h + \varepsilon) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m \varepsilon^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (\varrho - h)^{n-m} \right) \varepsilon^m = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a_n (\varrho - h)^{n-m} \varepsilon^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (\varrho - h)^{n-m} \varepsilon^m \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\varrho - h + \varepsilon\right)^n ,
\end{aligned}
$$

kde všetky rady konvergujú a zámena nekonečných súčtov je odôvodnená nezápornosťou všetkých členov. Maclaurinov rad pre $R(z)$ teda konverguje v bode $\varrho - h + \varepsilon > \varrho$, pričom podľa vety o polomere konvergencie musí v tomto bode divergovať: spor. $\square$

*Cvičenie* 4. Nájdite príklad vytvárajúcej funkcie $R(z) \in \mathbb{N}(\!(z)\!)$ takej, že:

a) $R(z)$ má jedinú dominantnú singularitu (rovnú jej polomeru konvergencie).

b) $R(z)$ má nejaký väčší konečný počet dominantných singularít.

c) $R(z)$ má nekonečne veľa dominantných singularít.

## Singularity vytvárajúcich funkcií a asymptotické vlastnosti koeficientov

Tvrdenie 1 vyjadruje polomer konvergencie analytickej funkcie pomocou asymptotických vlastností koeficientov jej Maclaurinovho radu. Možno ho však chápať aj „naopak" – ako tvrdenie popisujúce asymptotické správanie koeficientov pomocou polomeru konvergencie.

V špeciálnom prípade vytvárajúcich funkcií teda ide o jednoduchý nástroj na „hrubozrnnú" analýzu ich koeficientov na základe polomeru konvergencie, alebo ekvivalentne – podľa Pringsheimovej vety – na základe kladnej dominantnej singularity. Tento ekvivalentný pohľad na tvrdenie 1 explicitne sformulujeme vo vete 9, ktorá sa tak stane naším prvým jednoduchým výsledkom z oblasti analytickej kombinatoriky, umožňujúcim skúmať „exponenciálny rast" (hornej hranice) koeficientov vytvárajúcich funkcií, pričom akákoľvek „subexponenciálna zložka" bude takouto analýzou zanedbaná. Táto idea je sformalizovaná v nasledujúcej definícii.

**Definícia 5.** Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel. Hovoríme, že $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je *exponenciálneho rádu* $q > 0$ – a píšeme $a_n \bowtie q^n$ – ak

$$q = \inf \{ r > 0 \mid |a_n| = O(r^n) \} .$$

Namiesto $a_n \bowtie 1^n$ budeme písať $a_n \bowtie 1$ a namiesto $a_n \bowtie \left(q^{-1}\right)^n$ budeme písať $a_n \bowtie q^{-n}$.

Takto definovaný pojem exponenciálneho rádu možno zachytiť rôznymi ekvivalentnými spôsobmi, ako ukazujú napríklad nasledujúce tri tvrdenia.

**Tvrdenie 6.** *Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel a $q > 0$. Potom $a_n \bowtie q^n$ práve vtedy, keď*

$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

*Dôkaz.* Z tvrdenia 1 vyplýva, že za uvedených predpokladov platí $q = \varrho^{-1}$, kde $\varrho$ je polomer konvergencie mocninového radu

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Vďaka vete o polomere konvergencie však máme aj

$$\varrho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

a tvrdenie je dokázané. $\square$

**Tvrdenie 7.** *Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel a $q > 0$. Potom $a_n \bowtie q^n$ práve vtedy, keď sú pre všetky $\varepsilon > 0$ splnené nasledujúce podmienky:*

*(i) Pre nekonečne veľa rôznych $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| > (q - \varepsilon)^n$.*

*(ii) Pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| < (q + \varepsilon)^n$.*

*Dôkaz.* Platnosť podmienky $(i)$ pre všetky $\varepsilon > 0$ je očividne ekvivalentná s výrokom: „pre žiadne $p < q$ neplatí $|a_n| = O(p^n)$". Podobne platnosť podmienky $(ii)$ pre všetky $\varepsilon > 0$ je ekvivalentná s výrokom: „pre všetky $p > q$ platí $|a_n| = O(p^n)$". Priamo z definície exponenciálneho rádu už potom vyplýva, že obidva tieto výroky sú pravdivé práve vtedy, keď $a_n \bowtie q^n$. □

**Tvrdenie 8.** *Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel a $q > 0$. Potom $a_n \bowtie q^n$ práve vtedy, keď pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$a_n = q^n \alpha(n),$$

*kde $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ je funkcia spĺňajúca $\alpha(n) \bowtie 1$.*[8]

*Dôkaz.* Položme $\alpha(n) := a_n/q^n$. Potom

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha(n)|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{q^n}} = \frac{1}{q} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Z tvrdenia 6 teda vyplýva, že $a_n \bowtie q^n$ práve vtedy, keď $\alpha(n) \bowtie 1$. □

**Veta 9.** *Nech $R(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$ je analytická funkcia s polomerom konvergencie $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$. Potom*

$$[z^n]R(z) \bowtie \varrho^{-n}.$$

*Dôkaz.* Vyplýva bezprostredne z tvrdenia 1 a definície exponenciálneho rádu. □

Ak špeciálne $R(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\!(z)\!)$ – čo je prípad všetkých vytvárajúcich funkcií – je $\varrho$ v predchádzajúcej vete rovné kladnej dominantnej singularite funkcie $R(z)$ a exponenciálny rád hovorí, namiesto o ich absolútnej hodnote, o samotných koeficientoch tejto vytvárajúcej funkcie. Vetu 9 vyslovenú v tomto kontexte Flajolet a Sedgewick [1] nazývajú *prvým princípom asymptotiky koeficientov.* Slovne možno tento princíp zhrnúť tak, že *absolútna hodnota* dominantných singularít vytvárajúcej funkcie udáva *exponenciálny rád* jej koeficientov. Omnoho hlbším tvrdením je *druhý princíp asymptotiky koeficientov*, podľa ktorého je subexponenciálny faktor vytvárajúcich funkcií v určitých (často nastávajúcich) prípadoch daný *charakterom* týchto singularít – napríklad funkcie, ktorých jediná dominantná singularita je pólom, všetky vykazujú veľmi podobné asymptotické vlastnosti koeficientov; podobne aj všetky funkcie, ktorých jediná dominantná singularita je algebraickým bodom vetvenia a podobne. Tento druhý princíp asymptotiky koeficientov je úzko spätý s *metódou analýzy singularít*, ktorou sa na tomto predmete budeme zaoberať neskôr.

## Odkazy na literatúru

Odporúčaným čítaním k tejto prednáške sú oddiely IV.1 a IV.3 knihy [1]. Dôkaz Pringsheimovej vety možno nájsť napríklad aj v [2].

## Literatúra


[1] Flajolet, P.; Sedgewick, R.: *Analytic Combinatorics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[2] Titchmarsh, E. C.: *The Theory of Functions 2nd ed.* Oxford: Oxford University Press, 1976.


[8]Funkcia $\alpha(n)$ sa v tomto kontexte nazýva aj *subexponenciálny faktor*. Ide o funkciu, ktorej horná hranica rastie pomalšie, než ľubovoľná rastúca exponenciálna funkcia (avšak pre nekonečne veľa $n$ sa dá zdola ohraničiť ľubovoľnou klesajúcou exponenciálnou funkciou). Do tejto triedy patria napríklad všetky polynomické alebo logaritmické funkcie.