Úvod do metódy analýzy singularít (1. časť)

Peter Kostolányi

16. apríla 2020

Metóda analýzy singularít, po prvý raz popísaná Flajoletom a Odlyzkom v roku 1990 [1], tvorí samotné jadro analytickej kombinatoriky – umožňuje totiž prejsť, pomocou jednoduchého mechanického postupu, od singulárneho rozvoja (analyticky chápanej) vytvárajúcej funkcie k veľmi presnému asymptotickému odhadu pre jej koeficienty. V tomto texte – a v jeho priamom pokračovaní – sa budeme zaoberať základným variantom tejto metódy, použiteľným pre vytvárajúce funkcie s jedinou dominantnou singularitou, ktorou podľa Pringsheimovej vety musí byť kladné reálne číslo. Už v tejto svojej najjednoduchšej podobe je metóda analýzy singularít použiteľná v širokej škále rôznych kombinatorických aplikácií – tým sa budeme venovať vzápätí. Rozšírením metódy analýzy singularít, aplikovateľným na funkcie s viacerými dominantnými singularitami, sa budeme zaoberať neskôr.

Metóda analýzy singularít v skratke

V nasledujúcom sa budeme zaoberať funkciami $R(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\!(z)\!)$ – čiže funkciami analytickými v bode 0, ktorých Maclaurinov rozvoj má všetky koeficienty nezáporné reálne. Túto podmienku spĺňajú okrem iného všetky obyčajné aj exponenciálne vytvárajúce funkcie. Po zvyšok tohto textu budeme navyše predpokladať existenciu *jedinej* dominantnej singularity funkcie $R(z)$, ktorou podľa Pringsheimovej vety musí byť reálne číslo $\varrho > 0$ rovné polomeru konvergencie funkcie $R(z)$.

Metóda analýzy singularít nám pre širokú podtriedu takýchto funkcií umožní mechanicky prejsť od *singulárneho rozvoja* funkcie $R(z)$ v bode ϱ k *asymptotickému rozvoju* pre koeficienty jej Maclaurinovho radu. Asymptotické vlastnosti koeficientov tak budú dané vlastnosťami singulárneho rozvoja funkcie $R(z)$ v bode ϱ, čiže v konečnom dôsledku *charakterom* singularity ϱ. K nám už známemu prvému princípu asymptotiky koeficientov, dávajúcemu do súvisu *hodnotu* dominantnej singularity ϱ s exponenciálnym rádom postupnosti jej koeficientov, tak pridáme aj *druhý princíp asymptotiky koeficientov* Flajoleta a Sedgewicka [2], podľa ktorého sú subexponenciálne vlastnosti koeficientov funkcie určené práve charakterom dominantnej singularity ϱ.

Idea metódy analýzy singularít spočíva v kombinácii dvoch ingrediencií: asymptotických odhadov pre koeficienty Maclaurinových radov istej *štandardnej triedy funkcií*, ktoré budeme pripúšťať ako možné členy singulárnych rozvojov funkcie $R(z)$ a takzvaných *viet o transfere*, podľa ktorých zanedbateľné členy singulárneho rozvoja za istých podmienok zodpovedajú zanedbateľným členom asymptotického rozvoja pre koeficienty. Asymptotický odhad pre koeficienty funkcie $R(z)$ potom často možno získať nasledujúcim spôsobom: funkciu $R(z)$ lokálne rozvinieme do jej singulárneho rozvoja v bode ϱ, ktorým je nejaký rad funkcií

$$R(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) + c_3 f_3(z) + \ldots,$$

kde $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sú komplexné koeficienty.[1] Zvyčajne je pri takomto rozvoji možné zanedbať všetky až na konečne veľa jeho členov; napríklad

$$R(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) + c_3 f_3(z) + O\left(g(z)\right),$$

kde funkcia g je na okolí bodu ϱ zanedbateľná oproti funkciám f_1, f_2, f_3. Ak teraz funkcie f_1, f_2, f_3 a g patria do štandardnej triedy funkcií a ak sú splnené neveľmi obmedzujúce podmienky vety o transfere, možno koeficienty funkcie $R(z)$ vyjadriť ako

$$[z^n]R(z) = c_1[z^n]f_1(z) + c_2[z^n]f_2(z) + c_3[z^n]f_3(z) + O\left([z^n]g(z)\right),$$

pričom presné asymptotické odhady pre funkcie $[z^n]f_1(z)$, $[z^n]f_2(z)$, $[z^n]f_3(z)$ a $[z^n]g(z)$ premennej n možno získať z „katalógu“ takýchto odhadov pre štandardnú triedu funkcií. V konečnom dôsledku tak získame presný asymptotický odhad pre koeficienty samotnej funkcie $R(z)$.

[1] Tieto koeficienty by samozrejme bolo možné zahrnúť do funkcií $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ Ak je však naším cieľom rad, v ktorom budú tieto funkcie patriť do štandardnej triedy, je užitočnejšie vyjadrenie v uvedenom tvare.

Za *štandardnú triedu funkcií* pritom budeme považovať triedu pozostávajúcu z funkcií typu

$$\left(1-\frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{1-\frac{z}{\varrho}}\right)^{p}$$

pre $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$ a $\varrho > 0$, pričom pre mocninovú funkciu w^{α} a prirodzený logaritmus vždy uvažujeme ich hlavnú vetvu.[2] Definičným oborom týchto funkcií je teda $\mathbb{C} \setminus [\varrho, \infty)$ – v nasledujúcom preto pracujeme v komplexnej rovine narezanej pozdĺž polpriamky $[\varrho, \infty)$.

Poznámka 1. Flajolet a Sedgewick [2] pracujú s o niečo širšou triedou funkcií – namiesto $p \in \mathbb{N}$ uvažujú ľubovoľné $\beta \in \mathbb{C}$. Vzhľadom na nemalé technické problémy spojené s týmto zovšeobecnením[3] a vzhľadom na jeho relatívne menší prínos pre aplikácie, nebudeme tento všeobecnejší prípad v našom texte uvažovať. V pôvodnom článku Flajoleta a Odlyzka [1] sa dokonca uvažuje ešte všeobecnejšia trieda funkcií, zahŕňajúca aj iterované logaritmy.

Keďže $p \in \mathbb{N}$ môže byť aj nulové a pre hlavnú vetvu mocninovej funkcie platí

$$(z-\varrho)^{\alpha} = \varrho^{\alpha}\left(1-\frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha},$$

bude nám takto umožnené analyzovať napríklad funkcie, pre ktoré je singularita ϱ pólom alebo algebraickým bodom vetvenia a sú tak v bode ϱ rozvinuteľné do Laurentovho resp. Puiseuxovho radu. Okrem toho sú vytvárajúce funkcie často už priamo alebo „takmer priamo“ dané požadovaným singulárnym rozvojom, ktorý môže byť aj konečný – ukážkovým príkladom je tu vytvárajúca funkcia pre Catalanove čísla,

$$C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$$

s dominantnou singularitou $\varrho = 1/4$, ktorá je algebraickým bodom vetvenia.[4]

Vety o transfere možno sformulovať v rôznych podobách, využívajúc rôzne asymptotické notácie ako napríklad O, o, alebo $\sim$. Spoločným menovateľom týchto viet je predpoklad na funkcie, pre ktoré sú tieto vety použiteľné: musia byť definované a analytické na určitej špeciálnej oblasti – tzv. Δ-*obore* – neobsahujúcej bod ϱ a „o niečo väčšej“, než $D(0, \varrho)$.

V tomto texte sa budeme zaoberať koeficientmi štandardnej triedy funkcií; vety o transfere budú náplňou jeho pokračovania.

Asymptotika koeficientov štandardnej triedy funkcií

Nech $f(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\!(z)\!)$ je funkcia s polomerom konvergencie $\varrho > 0$ taká, že ϱ je jej jediná dominantná singularita. Funkcia $g(z) := f(\varrho z)$ má potom očividne polomer konvergencie rovný jednej, pričom bod 1 je jej jedinou dominantnou singularitou. Maclaurinov rozvoj funkcie $g(z)$ navyše získame dosadením ϱz za premennú z v Maclaurinovom rozvoji funkcie $f(z)$; z toho je zrejmé, že

$$[z^n]f(z) = \varrho^{-n}[z^n]g(z). \tag{1}$$

V nasledujúcom sa preto bez ujmy na všeobecnosti obmedzíme na funkcie s jedinou dominantnou singularitou $\varrho = 1$; pre ostatné $\varrho > 0$ bude stačiť v závere analýzy použiť vzťah (1). Nami uvažovaná štandardná trieda bude pri tejto voľbe ϱ pozostávať z funkcií

$$(1-z)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^{p}$$

[2] To znamená, že požadujeme $(1 - z/\varrho) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a argument čísla $1 - z/\varrho$ vyberáme z intervalu $(-\pi, \pi)$.

[3] Funkcia $(\ln 1/(1 - z/\varrho))^{\beta}$ je pre všeobecné $\beta \in \mathbb{C}$ zložením dvoch multifunkcií, pričom hlavná vetva výslednej funkcie nie je ani len analytická v bode 0. Riešením je uvažovať pozmenenú funkciu $((1/z)\ln(1/(1 - z/\varrho)))^{\beta}$.

[4] Ľahko vidieť, že v $z = 0$ má táto funkcia odstrániteľnú singularitu, ktorú podľa nášho dohovoru už za singularitu nepokladáme (a naopak „automaticky“ pracujeme s verziou funkcie $C(z)$, v ktorej je už táto singularita odstránená).

pre $\alpha \in \mathbb{C}$ a $p \in \mathbb{N}$, pričom naším prvým cieľom bude nájsť asymptotický rozvoj koeficientov funkcií

$$(1-z)^{\alpha}.$$

Možno si všimnúť, že pre $\alpha \in \mathbb{N}$ je $(1-z)^{\alpha}$ polynomickou funkciou – koeficienty takejto funkcie sú teda počnúc nejakým $n_0 \in \mathbb{N}$ všetky nulové. Tento triviálny prípad už teda nemusíme ďalej uvažovať a môžeme predpokladať $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Určitú intuíciu potom možno získať z binomického rozvoja

$$(1-z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n z^n;$$

ten možno vďaka identite

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{n} &= \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!} = \frac{(\alpha)(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \\ &= (-1)^n \frac{(n-\alpha-1)(n-\alpha-2)\dots(n-\alpha-n)}{n!} = (-1)^n \frac{(n-\alpha-1)^{\underline{n}}}{n!} = \\ &= (-1)^n \binom{n-\alpha-1}{n}\end{aligned}$$

písať aj ako

$$(1-z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\alpha-1}{n} z^n.$$

V špeciálnom prípade $\alpha \in \mathbb{Z}_{\leq -1}$ je potom $n-\alpha-1$ prirodzené číslo väčšie alebo rovné n a

$$\begin{aligned}[z^n]\,(1-z)^{\alpha} &= \binom{n-\alpha-1}{n} = \binom{n-\alpha-1}{-\alpha-1} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n-\alpha-1)}{(-\alpha-1)!} = \\ &= \frac{n^{-\alpha-1}}{(-\alpha-1)!}\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right) = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right).\end{aligned}$$

V nasledujúcom ukážeme, že rovnaký vzťah

$$[z^n]\,(1-z)^{\alpha} = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right)$$

v skutočnosti platí pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Urobíme tak metódou Flajoleta a Odlyzka [1] založenou na použití Cauchyho integrálneho vzorca a Hankelovej integrálnej reprezentácie funkcie $1/\Gamma(z)$. Podstatnú časť nasledujúcej vety by tiež bolo možné dokázať pomocou vyjadrenia zovšeobecneného binomického koeficientu prostredníctvom funkcií gama a následnej aplikácie Stirlingovej aproximácie pre funkciu gama. Metódu využívajúcu Hankelovu integrálnu reprezentáciu však možno, na rozdiel od spomenutého jednoduchšieho prístupu, priamočiaro adaptovať aj na všeobecnejšie triedy funkcií.

Veta 2. *Nech $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Potom*

$$[z^n](1-z)^{\alpha} = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right) \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}.$$

Pre tento koeficient navyše existuje asymptotický rozvoj[5] *v tvare*

$$[z^n](1-z)^{\alpha} \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(\alpha)}{n^k}\right),$$

kde $\varepsilon_k(\alpha)$ je, pre všetky prirodzené $k \geq 1$, polynomická funkcia stupňa $2k$ o premennej α.

[5] Asymptotický rozvoj funkcie udáva jej asymptotickú aproximáciu ľubovoľného rádu – zápis $f(n) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(n)$ treba chápať ako $f(n) = \sum_{k=1}^{s} \varphi_k(n) + O(\varphi_{s+1}(n))$ pre všetky prirodzené $s \geq 1$.

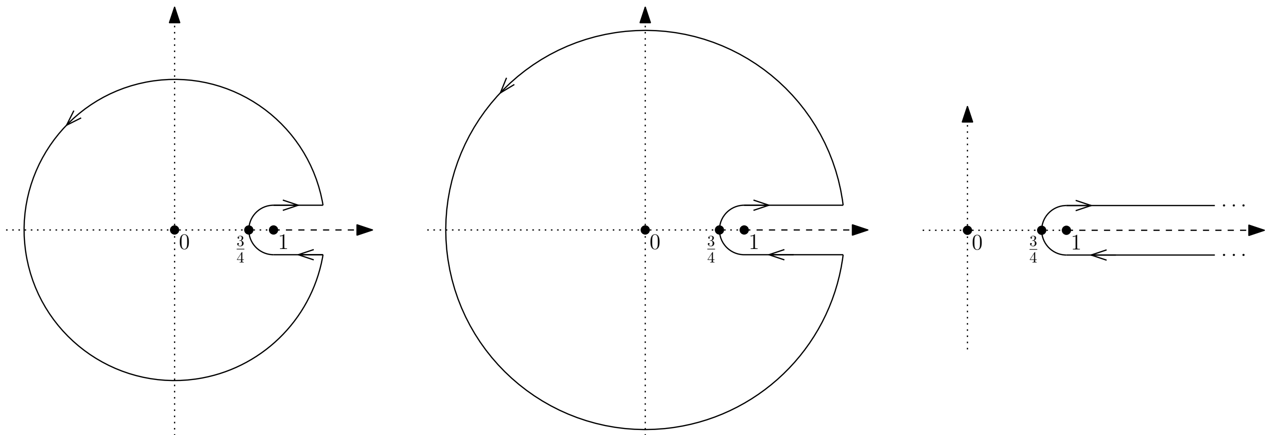
Dôkaz. Nech $n \geq 2$. Označme koeficient $[z^n](1-z)^\alpha$ ako a_n. Podľa Cauchyho integrálneho vzorca pre koeficienty Maclaurinovho radu[6] potom napríklad

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(0,1/2)} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Keďže je hlavná vetva funkcie $(1-z)^\alpha$ holomorfná na $\mathbb{C} \setminus [1,\infty)$, môžeme v Cauchyho integrálnom vzorci vymeniť kružnicu $\kappa(0,1/2)$ za ľubovoľnú kladne orientovanú jednoduchú uzavretú po častiach hladkú krivku v $\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$ takú, že bod 0 leží v jej vnútri. Špeciálne môžeme vziať ľubovoľnú z kriviek $K_n[R]$ pre reálne $R > 1$, daných nasledovne:

$$K_n[R] = \left[Re^{-i\theta}, 1 - \frac{i}{n}\right] - \kappa_{[\pi/2, 3\pi/2]}\left(1, \frac{1}{n}\right) + \left[1 + \frac{i}{n}, Re^{i\theta}\right] + \kappa_{[\theta, 2\pi-\theta]}\,(0,R)\,,$$

kde $\theta \in (0, \pi/2)$ je také, že $R \sin\theta = 1/n$. Typické krivky $K_n[R]$ sú znázornené na obrázkoch 1a a 1b.



(a) Krivka $K_4[3/2]$. **(b)** Krivka $K_4[2]$. **(c)** Hankelovská krivka $K_4[\infty]$.

Obr. 1: Krivky z dôkazu vety 2. Čiarkovane je znázornený uvažovaný rez komplexnej roviny pozdĺž $[1, \infty)$.

Pre integrál pozdĺž „veľkej takmer-kružnice“ $\kappa_1(R) := \kappa_{[\theta,2\pi-\theta]}\,(0,R)$ teraz z vety o odhade[7] vyplýva

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_1(R)} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\kappa(0,R)} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{(R+1)^{\operatorname{Re}\alpha}}{R^{n+1}} = \frac{(R+1)^{\operatorname{Re}\alpha}}{R^n}.$$

Pre dostatočne veľké n teda

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_1(R)} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z = 0.$$

V dôsledku toho pre krivky $\kappa_2(R)$ definované ako

$$\kappa_2(R) := \left[Re^{-i\theta}, 1 - \frac{i}{n}\right] - \kappa_{[\pi/2,3\pi/2]}\left(1, \frac{1}{n}\right) + \left[1 + \frac{i}{n}, Re^{i\theta}\right]$$

zisťujeme, že

$$a_n = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n[R]} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_2(R)} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n[\infty]} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$

[6] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 5, veta P5.17 resp. vety P5.7 až P5.9.
[7] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 3, veta P3.24.

kde $K_n[\infty]$ je nevlastná krivka hankelovského typu znázornená na obrázku 1c. Formálne je táto krivka definovaná nasledovne:

$$K_n[\infty] := K_n^-[\infty] + K_n^\circ[\infty] + K_n^+[\infty],$$

kde polpriamka $K_n^-[\infty]\colon (-\infty, 1] \to \mathbb{C}$ je pre všetky $t \in (-\infty, 1]$ daná ako $K_n^-[\infty](t) = -t - i/n$, polkružnica $K_n^\circ[\infty]$ je daná ako $K_n^\circ[\infty] = -\kappa_{[\pi/2, 3\pi/2]}(1, 1/n)$ a polpriamka $K_n^+[\infty]\colon [1, \infty) \to \mathbb{C}$ je pre všetky $t \in [1, \infty)$ daná ako $K_n^+[\infty](t) = t + i/n$.

Zostáva teda nájsť asymptotický rozvoj pre nevlastný integrál

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n[\infty]} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z. \tag{2}$$

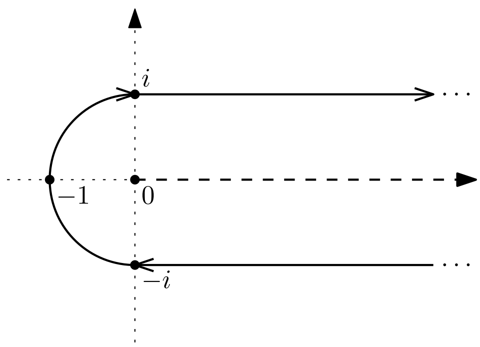
Aplikujme substitúciu $u := n(z-1)$. Integrál (2) sa tým zmení na

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-G} \left(-\frac{u}{n}\right)^\alpha \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n-1} \frac{1}{n} \, \mathrm{d}u = \\ &= \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^\alpha \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{3}$$

kde $-G$, znázornená aj na obrázku 2, je opačne orientovaná Hankelova krivka G z vety 4 textu o Hankelovej integrálnej reprezentácii funkcie $1/\Gamma(z)$, podľa ktorej

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}.$$

Z toho možno získať určitú intuíciu o pôvode faktoru $1/\Gamma(-\alpha)$ v asymptotickom rozvoji zo znenia vety – výraz $(1 + u/n)^{-n-1}$ totiž pre $n \to \infty$ konverguje k e^{-u} a integrál z (3) tak „nápadne pripomína“ práve uvedený Hankelov integrál pre $1/\Gamma(-\alpha)$. Náležitá formalizácia tohto argumentu však vyžaduje o niečo technickejší prístup.



Obr. 2: Hankelova krivka $-G$.

Všimnime si najprv, že v integráli (3) je príspevok získaný integrovaním pozdĺž častí krivky $-G$, na ktorých platí $\operatorname{Re} u \geq (\ln n)^2$, zanedbateľný (t.j. nemá žiaden vplyv na asymptotický rozvoj pre a_n). Pre takéto u totiž máme

$$\left| \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n/2} \right| \leq \left(1 + \frac{(\ln n)^2}{n}\right)^{-n/2} = e^{-(n/2)\ln\left(1 + \frac{(\ln n)^2}{n}\right)}.$$

Keďže pre všetky dostatočne veľké n platí $(\ln n)^2/n < 1$, môžeme „vonkajší“ logaritmus v exponente rozvinúť do Mercatorovho radu, čím dostaneme

$$\left| \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n/2} \right| \leq e^{(-n/2)\left(\frac{(\ln n)^2}{n} + O\left(\frac{(\ln n)^4}{n^2}\right)\right)} = e^{(-1/2)((\ln n)^2 + O(1))} \leq e^{-C(\ln n)^2}$$

pre vhodnú konštantu $C > 0$. Ak teda označíme symbolom $-\overline{G}$ zúženie krivky $-G$ na u také, že $\operatorname{Re} u \geq (\ln n)^2$, môžeme integrál pozdĺž $-\overline{G}$ odhadnúť ako[8]

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i}\int_{-\overline{G}}(-u)^{\alpha}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1}\mathrm{d}u\right| &\leq \frac{n^{\operatorname{Re}\alpha+1}}{2\pi}\left|\int_{-\overline{G}}(-u)^{\alpha}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1}\mathrm{d}u\right| \leq \\
&\leq \frac{n^{\operatorname{Re}\alpha+1}}{2\pi}\left|\int_{-\overline{G}}(-u)^{\alpha}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n/2}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n/2-1}\mathrm{d}u\right| \leq \\
&\leq \frac{n^{\operatorname{Re}\alpha+1}}{\pi}\int_{(\ln n)^2}^{\infty}(t+1)^r e^{-C(\ln n)^2}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n/2-1}\mathrm{d}t \leq \\
&\leq n^{-D\ln n}\int_{(\ln n)^2}^{\infty}(t+1)^r\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n/2-1}\mathrm{d}t \qquad (4)
\end{aligned}$$

pre nejaké vhodné konštanty $r, D > 0$. Nevlastný integrál

$$\int_{(\ln n)^2}^{\infty}(t+1)^r\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n/2-1}\mathrm{d}t \qquad (5)$$

ale pre dostatočne veľké n konverguje k nejakej kladnej hodnote zhora ohraničenej polynomickou funkciou premennej n, pretože po substitúcii $x = t/n$ pre nejaké $s > r$ nezávislé od n dostávame

$$\begin{aligned}
\int_{(\ln n)^2}^{\infty}(t+1)^r\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n/2-1}\mathrm{d}t &= \int_{(\ln n)^2/n}^{\infty}(xn+1)^r(1+x)^{-n/2-1}n\,\mathrm{d}x \leq \\
&\leq \int_{(\ln n)^2/n}^{\infty}(xn)^s(1+x)^{-n/2-1}n\,\mathrm{d}x = \\
&= n^{s+1}\int_{(\ln n)^2/n}^{\infty}x^s(1+x)^{-n/2-1}\mathrm{d}x = \\
&= n^{s+1}\left(\int_{(\ln n)^2/n}^{1}x^s(1+x)^{-n/2-1}\mathrm{d}x + \int_1^{\infty}x^s(1+x)^{-n/2-1}\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

Keďže pre $x \in [(\ln n)^2/n, 1]$ platí $x^s(1+x)^{-n/2-1} \leq 1$, nutne

$$\int_{(\ln n)^2/n}^{1}x^s(1+x)^{-n/2-1}\mathrm{d}x \leq 1;$$

podobne (pre dostatočne veľké n)

$$\int_1^{\infty}x^s(1+x)^{-n/2-1}\mathrm{d}x \leq \int_1^{\infty}x^{-2}\mathrm{d}x = 1.$$

Hodnota integrálu (5) je teda zhora ohraničená polynomickou funkciou $2n^{s+1}$, z čoho vyplýva, že (4) skutočne klesá rýchlejšie, než n^{-k} pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$. V dôsledku toho sa teda v integráli (3) môžeme obmedziť na konečnú krivku zodpovedajúcu u takým, že $\operatorname{Re} u \leq (\ln n)^2$ – príspevok získaný integrovaním pozdĺž zvyšných častí tejto krivky je totiž zanedbateľný.

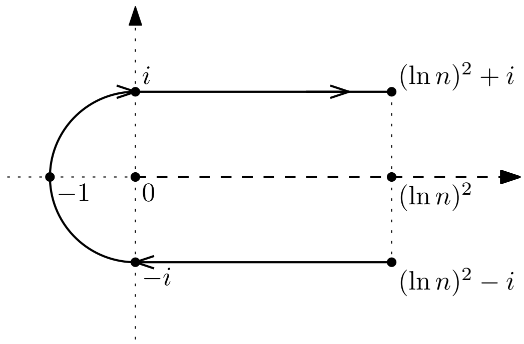
Označme túto konečnú časť krivky $-G$ ako γ. Máme teda

$$\gamma = \gamma^- + \gamma^\circ + \gamma^+,$$

kde

$$\gamma^{-1} = [(\ln n)^2 - i, -i], \qquad \gamma^\circ = -\kappa_{[\pi/2, 3\pi/2]}(0,1) \qquad \text{a} \qquad \gamma^+ = [i, (\ln n)^2 + i].$$

Táto krivka je znázornená na obrázku 3.



Obr. 3: Krivka γ.

Doposiaľ dokázané výsledky potom možno zhrnúť do nasledujúceho vzťahu: pre $a_n = [z^n](1-z)^\alpha$ platí

$$a_n = \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i}\int_\gamma (-u)^\alpha \left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}u + O\left(n^{-c\ln n}\right) \tag{6}$$

pre nejakú konštantu $c > 0$. Na nájdenie asymptotického rozvoja pre a_n teda stačí nájsť takýto rozvoj pre uvedený integrál.

Pre všetky $u \in \gamma^*$ však zjavne $|u| \leq (\ln n)^2 + 1$. Pre dostatočne veľké n potom platí $|u/n| < 1$ a z Maclaurinovho rozvoja funkcie $\ln(1+t/n)$ do Mercatorovho radu a následného Maclaurinovho rozvoja exponenciálnej funkcie pre všetky takéto u dostávame

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1} &= e^{-(n+1)\ln(1+u/n)} = e^{-(n+1)\left(u/n-u^2/(2n^2)+u^3/(3n^3)-u^4/(4n^4)+\ldots\right)} = \\ &= e^{-u}e^{u-(n+1)\left(u/n-u^2/(2n^2)+u^3/(3n^3)-u^4/(4n^4)+\ldots\right)} = \\ &= e^{-u}e^{u-(n+1)u/n+(n+1)u^2/(2n^2)-(n+1)u^3/(3n^3)+\ldots} = \\ &= e^{-u}\left(1+\frac{u^2-2u}{2n}+\frac{3u^4-20u^3+24u^2}{24n^2}+\ldots\right).\end{aligned}$$

Ľahko vidieť, že uvedený vzťah možno písať aj ako

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1} = e^{-u}\left(1+\varphi_1(u)n^{-1}+\varphi_2(u)n^{-2}+\varphi_3(u)n^{-3}+\ldots\right), \tag{7}$$

kde $\varphi_k(u)$ je pre všetky prirodzené $k \geq 1$ polynomická funkcia stupňa $2k$ o premennej u, s najnižším nenulovým koeficientom pri u^k. Z minulého semestra navyše vieme, že každý mocninový rad s polomerom konvergencie ϱ musí konvergovať rovnomerne na $D(0,r)$ pre ľubovoľné $r < \varrho$.[9] Preto aj rad funkcií (7), ktorý konverguje na $D(0,n)$, musí konvergovať rovnomerne na oblasti obsahujúcej γ^*. V dôsledku toho môžeme tento rad integrovať člen po člene.[10] Z (6) teda máme

$$a_n = \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i}\left(\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}\,\mathrm{d}u + \sum_{k=1}^{\infty}\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}\varphi_k(u)n^{-k}\,\mathrm{d}u\right) + O\left(n^{-c\ln n}\right). \tag{8}$$

Všimnime si ďalej, že

$$\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}\,\mathrm{d}u = \int_{-G}(-u)^\alpha e^{-u}\,\mathrm{d}u + O\left(n^{-\ln n}\right) \tag{9}$$

[8] Takto definované $\overline{G}$ nie je krivka, ale pozostáva z dvoch disjunktných kriviek. Integrál pozdĺž $\overline{G}$ ale môžeme priamočiaro definovať ako súčet integrálov pozdĺž týchto dvoch kriviek; v nasledujúcom budeme túto notačnú skratku využívať.

[9] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, cvičenia 5, úloha 4.

[10] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 5, veta P5.16.

a pre všetky prirodzené $k \geq 1$ platí

$$\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u) n^{-k}\, \mathrm{d}u = \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u) n^{-k}\, \mathrm{d}u + O\left(n^{-\ln n}\right). \tag{10}$$

Ide tu o jednoduchý dôsledok toho, že absolútnu hodnotu mocninovej funkcie $(-u)^\alpha$, ako aj polynomických funkcií $\varphi_k(u)$, možno pre dostatočne veľké n a $u \in -G^*$ s $\operatorname{Re} u \geq (\ln n)^2$ zhora odhadnúť napríklad funkciou $e^{\operatorname{Re} u/4}$. V dôsledku toho možno rozdiel medzi integrálmi na ľavej a na pravej strane (10) zhora odhadnúť napríklad integrálom

$$n^{-k} \int_{(\ln n)^2}^{\infty} e^{-t/2}\, \mathrm{d}t = n^{-k} 2 e^{-(\ln n)^2} = O\left(n^{-\ln n}\right)$$

a podobne pre (9). Detaily tu prenechávame čitateľovi ako jednoduché cvičenie.

V konečnom dôsledku teda zisťujeme, že asymptotický rozvoj pre a_n je daný ako

$$a_n \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i} \left(\int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u}\, \mathrm{d}u + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u) n^{-k}\, \mathrm{d}u \right).$$

Z Hankelovej integrálnej reprezentácie však máme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}$$

a každý z integrálov

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u) n^{-k}\, \mathrm{d}u$$

možno – po roznásobení polynómu $\varphi_k(u)$ zvyškom integrandu a integrovaní výsledku člen po člene – vyjadriť ako konečný súčet integrálov typu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} c_j u^j n^{-k}\, \mathrm{d}u = \frac{c_j}{n^k} \frac{1}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^{\alpha+j} e^{-u} = \frac{c_j}{n^k} \frac{1}{\Gamma(-\alpha-j)} = \\ = \frac{c_j(-\alpha-1)(-\alpha-2)\dots(-\alpha-j)}{\Gamma(-\alpha) n^k}, \end{aligned}$$

kde $j = k, \dots, 2k$ a $c_k, \dots, c_{2k}$ sú konštanty. Opätovným pozbieraním jednotlivých členov

$$c_j(-\alpha-1)(-\alpha-2)\dots(-\alpha-j)$$

pre každé $k \in \mathbb{N}$ do polynómu $\varepsilon_k(\alpha)$ tak dostávame existenciu asymptotického rozvoja

$$a_n = [z^n](1-z)^\alpha \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(\alpha)}{n^k} \right)$$

zo znenia vety. Tým je dôkaz dokončený. □

Cvičenie 3. Ukážte, že prvých niekoľko členov asymptotického rozvoja z predchádzajúcej vety je daných ako

$$[z^n](1-z)^\alpha \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \left(1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2n} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(3\alpha-1)}{24n^2} + O\left(n^{-3}\right) \right).$$

Nasledujúca veta poskytuje asymptotický odhad pre koeficienty všetkých funkcií z našej štandardnej triedy. Ide pritom o relatívne priamočiare zovšeobecnenie vety 2.

Veta 4. *Nech $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{N}$. Potom*[11]

$$[z^n](1-z)^\alpha \left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^p = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^p \left(1 + O\left((\ln n)^{-1}\right)\right) \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^p .$$

Dôkaz. Metóda dôkazu je prakticky identická ako pri vete 2 – postup teda naznačíme len v hrubých rysoch. Koeficient $a_n := [z^n](1-z)^\alpha \left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^p$ možno pomocou Cauchyho integrálneho vzorca pre derivácie vyjadriť ako

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(0,1/2)} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^p \mathrm{d}z.$$

Rovnakými metódami ako v dôkaze vety 2 potom možno tento vzorec transformovať na nevlastný integrál pozdĺž hankelovskej krivky $K_n[\infty]$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n[\infty]} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^p \mathrm{d}z.$$

Substitúciou $u := n(z-1)$ následne dostávame, pre Hankelovu krivku $-G$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-G} \left(-\frac{u}{n}\right)^\alpha \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n-1} \left(\ln \left(-\frac{n}{u}\right)\right)^p \frac{1}{n} \mathrm{d}u = \\ &= \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^\alpha \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n-1} (\ln n - \ln(-u))^p \, \mathrm{d}u = \\ &= \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i} (\ln n)^p \int_{-G} (-u)^\alpha \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n-1} \left(1 - \frac{\ln(-u)}{\ln n}\right)^p \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Tým istým postupom ako v dôkaze vety 2 navyše možno ukázať, že sa nedopustíme veľkej chyby[12], ak člen $(1 + u/n)^{-n-1}$ nahradíme za e^{-u}. Vo výsledku tak dostaneme

$$a_n \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i} (\ln n)^p \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \left(1 - \frac{\ln(-u)}{\ln n}\right)^p \mathrm{d}u.$$

Zostáva nájsť odhad pre integrál

$$\int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \left(1 - \frac{\ln(-u)}{\ln n}\right)^p \mathrm{d}u.$$

Tu však s použitím binomickej vety dostávame

$$\int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \left(1 - \frac{\ln(-u)}{\ln n}\right)^p \mathrm{d}u = \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k \left(\frac{\ln(-u)}{\ln n}\right)^k\right) \mathrm{d}u.$$

V konečnom dôsledku tak stojíme pred súčtom niekoľkých výrazov typu

$$\frac{c_k}{(\ln n)^k} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} (\ln(-u))^k \, \mathrm{d}u \tag{11}$$

pre $k = 0, \ldots, p$, kde $c_0, \ldots, c_p$ sú konštanty a $c_0 = 1$. Ľahko možno dokázať, že každý z týchto integrálov je zhora ohraničený konštantou nezávislou od n, čo dokazuje vetu v podobe, v akej sme ju sformulovali. □

[11] Podobne ako vo vete 2 je možné identifikovať aj úplný asymptotický rozvoj pre koeficienty, tentokrát ale pre chyby ľubovoľného rádu $(\ln n)^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$ (čo je o niečo menej presné, než pri funkcii $(1-z)^\alpha$). Podrobnosti možno nájsť v [2].

[12] Presnejšie: chyba bude menšieho rádu, než $(\ln n)^{-k}$ pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$.

Poznámka 5. Naznačenú argumentáciu z dôkazu predošlej vety možno použiť aj na získanie o niečo presnejšieho odhadu (úplného asymptotického rozvoja v rádoch klesajúcich mocnín logaritmov). V tejto poznámke naznačíme techniku takejto analýzy, založenú na derivovaní integrálnych reprezentácií funkcie gama.

Ak v integráli (11) nahradíme konštantu α premennou s, dostávame

$$\frac{c_k}{(\ln n)^k}\int_{-G}(-u)^s e^{-u}(\ln(-u))^k\,\mathrm{d}u = \frac{c_k}{(\ln n)^k}\int_{-G}\frac{\partial^k}{\partial s^k}(-u)^s e^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

O chvíľu zdôvodníme, že v tomto prípade je možná zámena integrálu s deriváciou – vo výsledku teda dostávame integrál

$$\frac{c_k}{(\ln n)^k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\int_{-G}(-u)^s e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{2\pi i c_k}{(\ln n)^k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\frac{1}{\Gamma(-s)}.$$

Vyhodnotením všetkých takýchto výrazov pre $k = 1,\ldots,p$ v bode $s = \alpha$ nakoniec dostaneme hľadané konštanty asymptotického rozvoja pre koeficient a_n.

Zámenu integrálu s deriváciou tu pritom možno odôvodniť variantom Leibnizovho pravidla[13], ktoré vo svojej základnej verzii hovorí, že pre ľubovoľnú spojitú funkciu $f(s,t)$ dvoch reálnych premenných platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b f(s,t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}f(s,t)\,\mathrm{d}t.$$

Toto tvrdenie možno dokázať s použitím kritéria výmeny dvoch určitých integrálov, ktoré je nám známe z minulého semestra.[14] Za uvedených predpokladov totiž pre ľubovoľné s_0 z definičného oboru platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b f(s,t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b (f(s,t)-f(s_0,t))\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b\int_{s_0}^s\left[\frac{\partial}{\partial s}f(s,t)\right]_{s=x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{s_0}^s\int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial s}f(s,t)\right]_{s=x}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_a^b\frac{\partial}{\partial s}f(s,t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{12}$$

Podobne ako minulý semester pri zámene integrálov[15] možno toto tvrdenie priamočiaro rozšíriť aj na krivkové integrály pozdĺž konečných kriviek. V našom prípade je však situácia o niečo sťažená tým, že integrujeme pozdĺž nevlastnej krivky. Tu však možno (podobne ako v texte o Hankelovej integrálnej reprezentácii pre integrál bez logaritmického faktora) dokázať, že integrál

$$\frac{c_k}{(\ln n)^k}\int_{-G}(-u)^s e^{-u}(\ln(-u))^k\,\mathrm{d}u = \frac{c_k}{(\ln n)^k}\int_{-G}\frac{\partial^k}{\partial s^k}(-u)^s e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

konverguje rovnomerne, t.j. je rovnomernou limitou integrálov pozdĺž konečných kriviek. Po prevedení na reálne integrály tak dostávame rovnakú situáciu ako v (12), akurát s jednou limitou navyše – tú však vďaka jej rovnomernosti možno vymeniť s integrálom podľa s.

Upustime teraz od predpokladu $\varrho = 1$. Z vety 4 a (1) potom priamo dostávame nasledujúci dôsledok.

Dôsledok 6. *Nech* $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ *a* $\varrho > 0$. *Potom*

$$[z^n]\left(1-\frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{1-\frac{z}{\varrho}}\right)^p = \varrho^{-n}\frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}(\ln n)^p\left(1+O\left((\ln n)^{-1}\right)\right) \sim \varrho^{-n}\frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}(\ln n)^p.$$

Poznamenajme ešte, že predpoklad $\varrho > 0$ nie je v predchádzajúcom dôsledku vôbec potrebný – analogickou úvahou ako v (1) ľahko dospejeme aj k nasledujúcemu tvrdeniu pre všeobecné $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, ktoré sa zíde najmä pri analýze vytvárajúcich funkcií s viacerými dominantnými singularitami.

[13] V angličtine sa často používa aj termín *differentiation under integral sign*.

[14] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 7, lema P7.10.

[15] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 7, lema P7.11.

Dôsledok 7. *Nech* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ *a* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Potom*

$$[z^n]\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\right)^{p} = \zeta^{-n}\frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}(\ln n)^p\left(1+O\left((\ln n)^{-1}\right)\right) \sim \zeta^{-n}\frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}(\ln n)^p\,.$$

Odkazy na literatúru

Odporúčaným doplňujúcim čítaním k tomuto textu sú oddiely VI.1 a VI.2 knihy [2] a relevantné časti pôvodného článku [1].

Literatúra

[1] Flajolet, P.; Odlyzko, A.: Singularity Analysis of Generating Functions. *SIAM J. Disc. Math.*, ročník 3, č. 2, 1990: s. 216–240.

[2] Flajolet, P.; Sedgewick, R.: *Analytic Combinatorics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009.