Úvod do metódy analýzy singularít (2. časť)

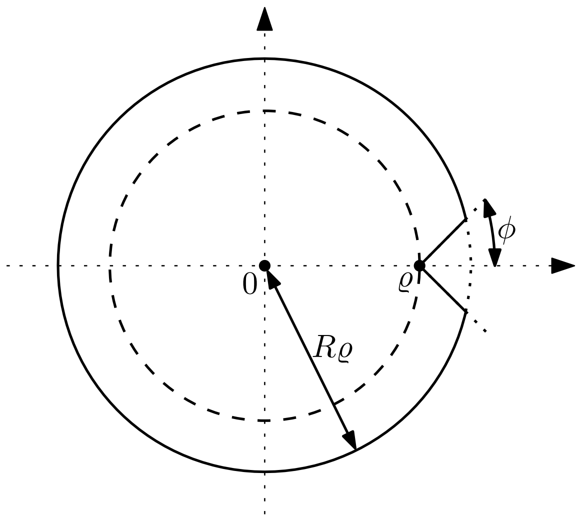
Peter Kostolányi

27. apríla 2020

Budeme sa teraz zaoberať *vetami o transfere*, ktoré – spoločne s asymptotickými odhadmi pre koeficienty funkcií štandardnej triedy odvodenými minule – tvoria základ *metódy analýzy singularít*. Stále pritom zostaneme pri základnom variante, v ktorom majú skúmané vytvárajúce funkcie jedinú dominantnú singularitu, nutne rovnú polomeru konvergencie. Dokázaním viet o transfere získame posledný nástroj potrebný na plnohodnotné použitie metódy analýzy singularít pre takéto vytvárajúce funkcie; aplikáciami tejto metódy sa budeme zaoberať nabudúce.

Vety o transfere

Pod *vetou o transfere* rozumieme, v kontexte analytickej kombinatoriky a v prípade jedinej dominantnej singularity, tvrdenie umožňujúce asymptoticky zhora ohraničiť koeficienty Maclaurinovho radu funkcie $f(z)$ koeficientmi nejakej inej funkcie $g(z)$, ktorá patrí do štandardnej triedy. Možno tak urobiť za predpokladu, že funkcia $f(z)$ samotná je asymptoticky zhora ohraničená funkciou $g(z)$, a to na nejakej vhodnej časti okolia dominantnej singularity $\varrho > 0$ funkcie $g(z)$. Použitie takejto vety v procese analýzy singularít sme si už vysvetlili minule: zanedbateľný člen singulárneho rozvoja analyzovanej funkcie sa – v prípade, že spĺňa predpoklady vety o transfere – priamo „preloží“ na zanedbateľný člen asymptotického rozvoja pre koeficienty analyzovanej funkcie.



Obr. 1: Δ-obor $\Delta(\varrho, R, \phi)$.

Postačujúcou podmienkou použiteľnosti viet o transfere je analytickosť uvažovanej funkcie $f(z)$ na rozrezanej komplexnej rovine $\mathbb{C} \setminus [\varrho, \infty)$. Tieto vety však možno sformulovať aj za omnoho slabšieho predpokladu na funkciu $f(z)$ – stačí jej analytickosť na tzv. Δ-obore, ktorý si teraz definujeme. Typický Δ-obor je znázornený na obrázku 1 – ide o mierne „zväčšené“ okolie $D(0, \varrho)$ neobsahujúce bod ϱ, ktoré možno vytvoriť odstránením vhodného výseku z okolia $D(0, R\varrho)$ pre nejaké $R > 1$.

Definícia 1. Nech ϱ, R, ϕ sú reálne čísla také, že $\varrho > 0$, $R > 1$ a $0 < \phi < \pi/2$. Potom definujeme *Δ-obor* $\Delta(\varrho, R, \phi)$ ako otvorenú množinu

$$\Delta(\varrho, R, \phi) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\varrho;\ \arg(z - \varrho) \in (\phi, 2\pi - \phi)\}\,.$$

Pod *Δ-oborom v bode* $\varrho > 0$ rozumieme ľubovoľný Δ-obor $\Delta(\varrho, R, \phi)$ pre nejaké $R > 1$ a $0 < \phi < \pi/2$.

Podobne ako minule budeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $\varrho = 1$. Môžeme si to dovoliť, pretože pre ľubovoľnú funkciu $f(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$ s polomerom konvergencie $\varrho > 0$ má funkcia $f(\varrho z)$ polomer konvergencie rovný jednej, pričom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$[z^n]f(z) = \varrho^{-n}[z^n]f(\varrho z). \tag{1}$$

Špeciálne teda pre dvojicu funkcií $f(z), g(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$ platí $[z^n]f(z) = O\left([z^n]g(z)\right)$ práve vtedy, keď platí $[z^n]f(\varrho z) = O\left([z^n]g(\varrho z)\right)$ – a podobne pre o a $\sim$.

Poznámka 2. Pripomeňme si hlavný výsledok z prvej časti tohto textu, ktorým je asymptotický odhad pre koeficienty funkcií štandardnej triedy: pre všetky $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ a všetky $p \in \mathbb{N}$ platí

$$[z^n](1-z)^\alpha \left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^p = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^p \left(1 + O\left((\ln n)^{-1}\right)\right) \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^p. \tag{2}$$

Pri takejto formulácii tvrdenia neuvažujeme prípad, keď $\alpha \in \mathbb{N}$ – ten je však možné zahrnúť pomerne jednoducho. Pokiaľ $\alpha \in \mathbb{N}$ a $p = 0$, je uvažovaná funkcia polynomická a jej koeficienty sú tak skoro všetky nulové. Pre $\alpha \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{N}_{>0}$ možno odhad získať (napríklad) drobnou úpravou dôkazu vety 4 prvej časti tohto textu. Ten je založený na aproximácii n-tého koeficientu integrálom

$$\frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i} (\ln n)^p \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k \left(\frac{\ln(-u)}{\ln n}\right)^k\right) \mathrm{d}u,$$

ktorý možno vyjadriť aj ako

$$n^{-\alpha-1} (\ln n)^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k \frac{1}{(\ln n)^k} \frac{1}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} (\ln(-u))^k \, \mathrm{d}u. \tag{3}$$

Pre $k = 0$ je

$$\binom{p}{k} (-1)^k \frac{1}{(\ln n)^k} \frac{1}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} (\ln(-u))^k \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)},$$

čo je vďaka voľbe čísla α rovné nule. V poznámke 5 predchádzajúcej časti tohto textu sme vlastne odvodili hankelovskú integrálnu reprezentáciu pre k-tu deriváciu funkcie $1/\Gamma(-s)$:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \frac{1}{\Gamma(-s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^s e^{-u} (\ln(-u))^k \, \mathrm{d}u.$$

Pre $k = 1, \ldots, p$ tak dostávame

$$\begin{aligned} \binom{p}{k} (-1)^k \frac{1}{(\ln n)^k} \frac{1}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} (\ln(-u))^k \, \mathrm{d}u &= \binom{p}{k} (-1)^k \frac{1}{(\ln n)^k} \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \frac{1}{\Gamma(-s)}\right]_{s=\alpha} = \\ &= \binom{p}{k} \frac{1}{(\ln n)^k} \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \frac{1}{\Gamma(s)}\right]_{s=-\alpha}. \end{aligned} \tag{4}$$

Prvá derivácia funkcia $1/\Gamma(s)$ je v bode $s = -\alpha$ nenulová, čo je dôsledkom jednoduchosti všetkých jej koreňov. Dosadením do (3) teda pre všetky $\alpha \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{N}_{>0}$ dostávame

$$[z^n](1-z)^\alpha \left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^p = Cn^{-\alpha-1} (\ln n)^{p-1} \left(1 + O\left((\ln n)^{-1}\right)\right) \sim Cn^{-\alpha-1} (\ln n)^{p-1}, \tag{5}$$

kde konštantu C možno nájsť vyhodnotením výrazu (4). Z (2), (5) a nulovosti skoro všetkých koeficientov pre $\alpha \in \mathbb{N}$ a $p = 0$ dohromady špeciálne vyplýva, že pre všetky $\alpha \in \mathbb{C}$ a $p \in \mathbb{N}$ je

$$[z^n](1-z)^\alpha \left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^p = O\left(n^{-\alpha-1} (\ln n)^p\right);$$

nie je preto náhoda, že práve takéto funkcie typu $n^{-\alpha-1} (\ln n)^p$ budú vystupovať v nasledujúcich vetách o transfere.

Môžeme teraz vysloviť najdôležitejší výsledok tohto textu – *vetu o O-transfere*, v ktorej sa „asymptotický odhad zhora“ spomínaný vyššie formalizuje pomocou notácie O.

Veta 3. *Nech $\alpha \in \mathbb{R}$ a $p \in \mathbb{N}$.*[1] *Nech $f(z)$ je analytická na nejakom Δ-obore $\Delta(1, R, \phi)$ v bode 1. Ak potom pre $z \in \Delta(1, R, \phi)$ a $z \to 1$ je*

$$f(z) = O\left((1-z)^{\alpha}\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^{p}\right), \tag{6}$$

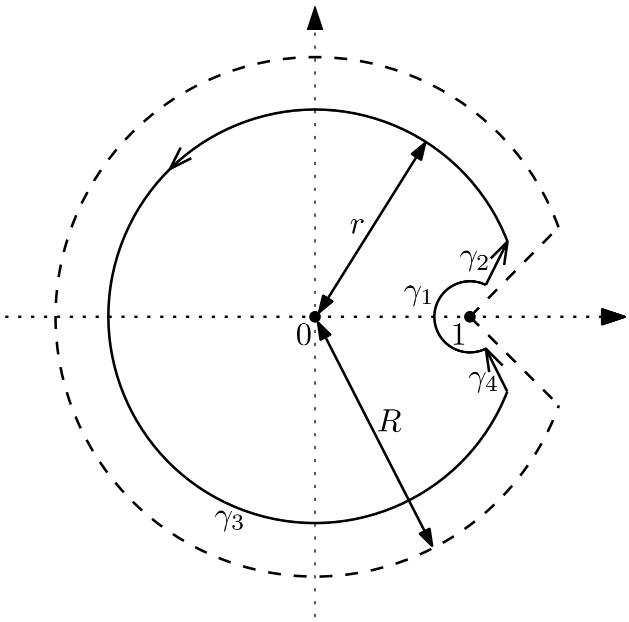
tak pre $n \to \infty$ platí

$$[z^n]f(z) = O\left(n^{-\alpha-1}\left(\ln n\right)^{p}\right).$$

Dôkaz. Nech r, θ sú reálne čísla také, že $1 < r < R$ a $\phi < \theta < \pi/2$. Môžeme predpokladať, že n je dostatočne veľké nato, aby platilo $1/n < r - 1$. Nech ν je uhol $0 < \nu < \pi/2$ taký, že $\arg(re^{i\nu} - 1) = \theta$ a nech γ je krivka daná ako $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, kde

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &:= -\kappa_{[\theta, 2\pi-\theta]}(1, 1/n),\\
\gamma_2 &:= [1 + (1/n)e^{i\theta}, re^{i\nu}],\\
\gamma_3 &:= \kappa_{[\nu, 2\pi-\nu]}(0, r),\\
\gamma_4 &:= [re^{i(2\pi-\nu)}, 1 + (1/n)e^{i(2\pi-\theta)}].
\end{aligned}$$

Táto krivka γ je znázornená aj na obrázku 2.



Obr. 2: Krivka γ (plnou čiarou) v Δ-obore $\Delta(1, R, \phi)$ (čiarkovane). Polomer malého oblúku kružnice je $1/n$. Úsečky γ_2 resp. γ_4 zvierajú s kladnou reálnou osou uhol θ, úsečky hranice Δ-oboru s ňou zvierajú uhol ϕ.

Zjavne $0 \in \mathbf{I}(\gamma)$ a $\gamma^* \subseteq \Delta(1, R, \phi)$. Z Cauchyho integrálneho vzorca pre koeficienty Maclaurinovho radu tak dostávame

$$[z^n]f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Inými slovami: $[z^n]f(z) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, kde pre $k = 1, \ldots, 4$ je

$$I_k := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Na dôkaz vety stačí vhodne zhora odhadnúť tieto štyri integrály.

[1] Predpoklad reálnosti čísla α tu nie je obmedzujúci, pretože pri asymptotických odhadoch sa berie do úvahy len absolútna hodnota funkcie.

Začnime integrálom pozdĺž malého oblúku γ_1. Dĺžka tohto oblúku je určite nanajvýš $2\pi/n$ a absolútnu hodnotu integrandu možno na tomto oblúku pre $n \to \infty$ vďaka (6) odhadnúť ako

$$\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| = |f(z)| \left|\frac{1}{z^{n+1}}\right| = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} (\ln n)^{p}\right) O(1),$$

keďže pre $z \in \gamma_1^*$ je $|1-z| = 1/n$, pričom pre $n \to \infty$ sú hodnoty týchto z stále bližšie k 1, a keďže pre $z \in \gamma_1^*$ a $n \to \infty$ je

$$\left|\frac{1}{z^{n+1}}\right| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n-1} \to e.$$

Z vety o odhade[2] teda dostávame

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} (\ln n)^{p}\right) O(1) \frac{2\pi}{n} = O\left(n^{-\alpha-1} (\ln n)^{p}\right). \tag{7}$$

Uvažujme teraz úsečku γ_2 (pričom rovnakú argumentáciu by sme mohli použiť aj pre úsečku γ_4). Predpoklad (6) znamená, že existujú čísla $\delta > 0$ a $C > 0$ také, že pre všetky $z \in \Delta(1, R, \phi) \cap \overline{D}(1, \delta)$ platí

$$|f(z)| \leq C \left|(1-z)^{\alpha} \left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^{p}\right|. \tag{8}$$

Číslo δ tu nezávisí od n, pričom môžeme predpokladať, že n je dostatočne veľké nato, aby platilo $1/n < \delta$. Pre takéto dostatočne veľké n teda možno úsečku γ_2 rozdeliť na dve časti ako $\gamma_2 = \gamma_{2,1} + \gamma_{2,2}$, kde $\gamma_{2,1}^* \subseteq \overline{D}(1, \delta)$ a $\gamma_{2,2}^* \subseteq \Delta(1, R, \phi) \setminus D(1, \delta)$. Absolútna hodnota analytickej, a tým pádom aj nutne spojitej, funkcie $f(z)$ musí byť na kompaktnej množine $\gamma_{2,2}^*$ zhora ohraničená nejakou konštantou $M \geq 0$.[3] Keďže na tejto úsečke $|z| \geq 1 + \varepsilon$ pre nejaké $\varepsilon > 0$, z vety o odhade ihneď dostávame

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2,2}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z\right| \leq \frac{1}{2\pi} M (1+\varepsilon)^{-n-1} L\left(\gamma_{2,2}\right) \leq \frac{Mr}{2\pi} (1+\varepsilon)^{-n-1} = O\left(n^{-\alpha-1} (\ln n)^{p}\right). \tag{9}$$

Pre úsečku $\gamma_{2,1}$ platí $\gamma_{2,1} = [1 + (1/n)e^{i\theta}, 1 + \delta e^{i\theta}]$ a možno ju parametrizovať ako $\gamma_{2,1} \colon [1, n\delta] \to \mathbb{C}$, kde pre všetky $t \in [1, n\delta]$ je $\gamma_{2,1}(t) = 1 + (t/n)e^{i\theta}$. Preto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2,1}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{1}^{n\delta} f\left(1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right) \left(1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right)^{-n-1} \frac{e^{i\theta}}{n} \, \mathrm{d}t.$$

Z vety o odhade a (8) teda

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2,1}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z\right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{1}^{n\delta} C \left|\left(-\frac{t}{n} e^{i\theta}\right)^{\alpha} \left(\ln\left(-\frac{n}{t} e^{-i\theta}\right)\right)^{p}\right| \left|1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right|^{-n-1} \frac{1}{n} \, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{1}^{n\delta} C \left|\left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha} \left(\ln \frac{n}{t}\right)^{p}\right| \left|1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right|^{-n-1} \frac{1}{n} \, \mathrm{d}t \leq \\
&\leq \frac{C}{2\pi} \int_{1}^{n\delta} \left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha} (\ln n)^{p} \left|1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right|^{-n-1} \frac{1}{n} \, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{C}{2\pi} n^{-\alpha-1} (\ln n)^{p} \int_{1}^{n\delta} t^{\alpha} \left|1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right|^{-n-1} \mathrm{d}t \leq \\
&\leq \frac{C}{2\pi} n^{-\alpha-1} (\ln n)^{p} \int_{1}^{n\delta} t^{\alpha} \operatorname{Re}\left(1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right)^{-n-1} \mathrm{d}t = \\
&= \frac{C}{2\pi} n^{-\alpha-1} (\ln n)^{p} \int_{1}^{n\delta} t^{\alpha} \left(1 + \frac{t \cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{10}$$

[2] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 3, veta P3.24.
[3] *Komplexná analýza pre informatikov 2019/20*, prednáška 1, veta P1.12.

Integrál v uvedenom výraze však možno pre dostatočne veľké n zhora ohraničiť konštantou, čo teraz dokážeme. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\delta < 1$. Pre všetky $t \in [1, n\delta]$ potom $0 < (t\cos\theta)/n < 1$ a v dôsledku toho

$$\left(1+\frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} = e^{-(n+1)\ln\left(1+\frac{t\cos\theta}{n}\right)} = e^{-(n+1)\left(\frac{t\cos\theta}{n}-\frac{t^2(\cos\theta)^2}{2n^2}+\frac{t^3(\cos\theta)^3}{3n^3}-\frac{t^4(\cos\theta)^4}{4n^4}+\dots\right)} =$$
$$= e^{-t\cos\theta}e^{t\cos\theta-\frac{(n+1)t\cos\theta}{n}+\frac{(n+1)t^2(\cos\theta)^2}{2n^2}-\frac{(n+1)t^3(\cos\theta)^3}{3n^3}+\dots} =$$
$$= e^{-t\cos\theta}\left(1+\frac{(\cos\theta)^2t^2-2\cos\theta t}{2n}+\frac{3(\cos\theta)^4t^4-20(\cos\theta)^3t^3+24(\cos\theta)^2t^2}{24n^2}+\dots\right);$$

v uvedenom sme najprv rozvinuli do Maclaurinovho radu logaritmus a následne exponenciálnu funkciu. Podobne ako v dôkaze vety 2 predchádzajúceho textu si môžeme všimnúť, že sme uvedeným dospeli k vyjadreniu

$$\left(1+\frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} = e^{-t\cos\theta}\left(1+\varphi_1(t)n^{-1}+\varphi_2(t)n^{-2}+\varphi_3(t)n^{-3}+\dots\right),$$

kde $\varphi_k(t)$ je pre všetky prirodzené $k \geq 1$ polynomická funkcia stupňa $2k$ premennej t s najnižším nenulovým koeficientom pri t^k a koeficientmi zhora ohraničenými konštantou nezávislou od k a n. Navyše vidíme, že uvedený rad funkcií je v skutočnosti mocninovým radom s polomerom konvergencie aspoň n – musí preto konvergovať rovnomerne na oblasti obsahujúcej $[1, n\delta]$. V dôsledku toho môžeme tento rad integrovať člen po člene a

$$\int_1^{n\delta} t^\alpha \left(1+\frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}t = \int_1^{n\delta} t^\alpha e^{-t\cos\theta}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)n^{-k}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \int_1^{n\delta} t^\alpha e^{-t\cos\theta}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty} n^{-k}\int_1^{n\delta} t^\alpha e^{-t\cos\theta}\varphi_k(t)\,\mathrm{d}t \leq$$
$$\leq \int_1^{\infty} t^\alpha e^{-t\cos\theta}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty} n^{-k}\int_1^{\infty} t^\alpha e^{-t\cos\theta}\varphi_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

Teraz však ľahko vidíme, že

$$\int_1^{\infty} t^\alpha e^{-t\cos\theta}\,\mathrm{d}t \leq O(1) + \int_1^{\infty} e^{-(t\cos\theta)/2}\,\mathrm{d}t = O(1) \tag{11}$$

a rovnako aj pre všetky prirodzené $k \geq 1$ dostávame

$$n^{-k}\int_1^{\infty} t^\alpha e^{-t\cos\theta}\varphi_k(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{c_k}{n^k}, \tag{12}$$

kde c_k nezávisí od n a ako funkcia premennej k pre $k \to \infty$ spĺňa $c_k = O(q^k)$ pre nejakú konštantu $q > 0$. Odhad (12) pritom možno získať roznásobením polynómu $\varphi_k(t) = b_{k,2k}t^{2k} + \ldots + b_{k,k}t^k$ a pozorovaním, že pre dostatočne veľké k je $\alpha + k > 0$, v dôsledku čoho pre $j = k, \ldots, 2k$ použitím substitúcie $s = t\cos\theta$ dostávame

$$n^{-k}\int_1^{\infty} t^\alpha e^{-t\cos\theta}t^j\,\mathrm{d}t = n^{-k}\int_1^{\infty} t^{\alpha+j}e^{-t\cos\theta}\,\mathrm{d}t = n^{-k}\int_{\cos\theta}^{\infty}\left(\frac{s}{\cos\theta}\right)^{\alpha+j}e^{-s}\frac{\mathrm{d}s}{\cos\theta} =$$
$$= \frac{1}{n^k(\cos\theta)^{\alpha+j+1}}\int_{\cos\theta}^{\infty} s^{\alpha+j}e^{-s}\,\mathrm{d}s \leq \frac{1}{n^k(\cos\theta)^{\alpha+2k+1}}\int_0^{\infty} s^{\alpha+j}e^{-s}\,\mathrm{d}s =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+j+1)}{n^k(\cos\theta)^{\alpha+2k+1}} \leq \frac{\Gamma(\alpha+2k+1)}{n^k(\cos\theta)^{\alpha+2k+1}} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2k)\Gamma(\alpha)}{n^k(\cos\theta)^{\alpha+2k+1}} \leq$$
$$\leq \frac{\Gamma(\alpha)(\alpha+2k)^{2k+1}(1/\cos\theta)^{\alpha+2k+1}}{n^k} \leq \frac{Kq^k}{n^k}$$

pre vhodné konštanty $K, q > 0$ nezávislé od k a n. V dôsledku (11) a (12) je teda integrál

$$\int_1^{n\delta} t^\alpha \left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}t$$

z (10) skutočne zhora ohraničený konštantou a

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{2,1}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| = O\left(n^{-\alpha-1}(\ln n)^p\right).$$

To spolu s (9) implikuje

$$|I_2| = O\left(n^{-\alpha-1}(\ln n)^p\right) \tag{13}$$

a obdobnou argumentáciou možno dokázať aj

$$|I_4| = O\left(n^{-\alpha-1}(\ln n)^p\right). \tag{14}$$

Zostáva odhadnúť integrál pozdĺž veľkého oblúku γ_3. Pre všetky $z \in \gamma_3^*$ ale

$$\left|\frac{1}{z^{n+1}}\right| = r^{-n-1},$$

pričom $r > 1$. Spojitá funkcia $f(z)$ musí navyše byť na kompaktnej množine γ_3^* v absolútnej hodnote ohraničená nejakou konštantou $M' > 0$ a dĺžku krivky γ_3 možno zhora odhadnúť konštantou $2\pi r$. Z vety o odhade preto dostávame

$$|I_3| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{1}{2\pi} M' r^{-n-1} 2\pi r = O(r^{n-1}) = O\left(n^{-\alpha-1}(\ln n)^p\right). \tag{15}$$

V tomto momente už len stačí sčítať dohromady jednotlivé odhady (7), (13), (14) a (15) – veta je dokázaná. □

Analogicky k vete o O-transfere možno vysloviť aj *vetu o o-transfere*, ktorej dôkaz je len drobnou variáciou dôkazu vety 3.

Veta 4. *Nech $\alpha \in \mathbb{R}$ a $p \in \mathbb{N}$. Nech $f(z)$ je analytická na nejakom Δ-obore $\Delta(1, R, \phi)$ v bode 1. Ak potom pre $z \in \Delta(1, R, \phi)$ a $z \to 1$ je*

$$f(z) = o\left((1-z)^\alpha \left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^p\right), \tag{16}$$

tak pre $n \to \infty$ platí

$$[z^n]f(z) = o\left(n^{-\alpha-1}(\ln n)^p\right).$$

Dôkaz. Stačí jemne pozmeniť argumentáciu z dôkazu vety 3. Pri analýze integrálov pozdĺž kriviek γ_1, $\gamma_{2,2}$ a γ_3 stačí len zmeniť O na o. Pri krivke $\gamma_{2,1}$ sa namiesto odhadu (8), podľa ktorého platí

$$|f(z)| \le C\left|(1-z)^\alpha \left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^p\right|$$

pre *nejaké* $C > 0$ použije ten istý odhad pre *všetky* $C > 0$, ktorý je dôsledkom predpokladu (16). Z toho potom získame

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{2,1}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{C}{2\pi} n^{-\alpha-1}(\ln n)^p \int_1^{n\delta} t^\alpha \left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}t$$

pre *všetky* $C > 0$ a zvyšok argumentácie je obdobný ako v dôkaze vety 3. □

Nasledujúca *veta o $\sim$-transfere* platí iba za o niečo silnejších predpokladov, než vyššie – na rozdiel od predchádzajúcich dvoch viet táto veta neplatí v prípade, že $\alpha \in \mathbb{N}$. To je dané skutočnosťou, že pre takéto α sa koeficienty funkcií

$$(1-z)^{\alpha}\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^{p}$$

správajú – ako sme pozorovali v poznámke 2 – odlišne, ako pre zvyšné $\alpha \in \mathbb{R}$.

Veta 5. *Nech $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{N}$. Nech $f(z)$ je analytická na nejakom Δ-obore $\Delta(1, R, \phi)$ v bode 1. Ak potom pre $z \in \Delta(1, R, \phi)$ a $z \to 1$ je*

$$f(z) \sim (1-z)^{\alpha}\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^{p}, \tag{17}$$

tak pre $n \to \infty$ platí

$$[z^n]f(z) \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^{p}.$$

Dôkaz. Odhad (17) platí práve vtedy, keď

$$f(z) = (1-z)^{\alpha}\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^{p} + g(z),$$

kde

$$g(z) = o\left((1-z)^{\alpha}\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^{p}\right).$$

Teraz

$$[z^n]f(z) = [z^n]\left((1-z)^{\alpha}\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^{p}\right) + [z^n]g(z). \tag{18}$$

Avšak z vety o koeficientoch funkcií štandardnej triedy vyplýva

$$[z^n]\left((1-z)^{\alpha}\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^{p}\right) \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^{p},$$

čo je to isté ako

$$[z^n]\left((1-z)^{\alpha}\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^{p}\right) = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^{p} + o\left(n^{-\alpha-1} (\ln n)^{p}\right).$$

Z vety 4 ďalej

$$[z^n]g(z) = o\left(n^{-\alpha-1} (\ln n)^{p}\right).$$

Dosadením do (18) teda dostávame

$$[z^n]f(z) = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^{p} + o\left(n^{-\alpha-1} (\ln n)^{p}\right),$$

čiže ekvivalentne

$$[z^n]f(z) \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^{p},$$

čo bolo treba dokázať. □

Pre úplnosť ešte sformulujme dôsledok viet 3, 4 a 5, ktorý je adaptáciou práve dokázaných viet o transfere na prípad funkcií s kladným reálnym polomerom konvergencie rôznym od 1.

Dôsledok 6. *Nech $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ a $\varrho > 0$. Nech $f(z)$ je analytická na nejakom Δ-obore $\Delta(\varrho, R, \phi)$ v bode ϱ. Potom:*

(i) *Ak pre $z \in \Delta(\varrho, R, \phi)$ a $z \to \varrho$ je*

$$f(z) = O\left(\left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha} \left(\ln \frac{1}{1 - \frac{z}{\varrho}}\right)^{p}\right),$$

tak pre $n \to \infty$ platí

$$[z^n]f(z) = O\left(\varrho^{-n} n^{-\alpha-1} (\ln n)^p\right).$$

(ii) *Ak pre $z \in \Delta(\varrho, R, \phi)$ a $z \to \varrho$ je*

$$f(z) = o\left(\left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha} \left(\ln \frac{1}{1 - \frac{z}{\varrho}}\right)^{p}\right),$$

tak pre $n \to \infty$ platí

$$[z^n]f(z) = o\left(\varrho^{-n} n^{-\alpha-1} (\ln n)^p\right).$$

(iii) *Ak $\alpha \notin \mathbb{N}$ a pre $z \in \Delta(\varrho, R, \phi)$ a $z \to \varrho$ je*

$$f(z) \sim \left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha} \left(\ln \frac{1}{1 - \frac{z}{\varrho}}\right)^{p},$$

tak pre $n \to \infty$ platí

$$[z^n]f(z) \sim \frac{\varrho^{-n} n^{-\alpha-1} (\ln n)^p}{\Gamma(-\alpha)}.$$

Dôkaz. Vyplýva z viet 3, 4 a 5, vzťahu (1) a skutočnosti, že funkcia $f(z)$ je analytická na $\Delta(\varrho, R, \phi)$ práve vtedy, keď $f(\varrho z)$ je analytická na $\Delta(1, R, \phi)$. □

Zhrnutie základného variantu metódy analýzy singularít

Máme teraz k dispozícii všetky tvrdenia, na ktorých je založená *metóda analýzy singularít* v prípade funkcií $R(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\!(z)\!)$ s jedinou dominantnou singularitou.[4] Tú možno zhrnúť do nasledujúcich niekoľkých krokov:

1. Nájdenie reálneho polomeru konvergencie $\varrho > 0$ funkcie $R(z)$, ktorý je nutne jej dominantnou singularitou (v prípade, že je polomer konvergencie rovný ∞, metódu analýzy singularít nemožno aplikovať).

2. Overenie, že ϱ je *jedinou* dominantnou singularitou funkcie $R(z)$ a funkcia $R(z)$ je analytická na nejakom Δ-obore $\Delta(\varrho, R, \phi)$ (v prípade, že tieto podmienky nie sú splnené, tento základný variant[5] metódy analýzy singularít nemožno aplikovať).

3. Nájdenie singulárneho rozvoja funkcie $R(z)$ v bode ϱ, ktorého členmi sú konštantné násobky funkcií štandardnej triedy (môže ísť napríklad o Laurentov alebo Puiseuxov rad, prípadne môže byť tento rozvoj aj konečný a funkcia $R(z)$ ním môže byť priamo reprezentovaná).

4. Využitie viet o koeficientoch funkcií štandardnej triedy na „preklad" najvýznamnejšieho člena (resp. niekoľkých najvýznamnejších členov) singulárneho rozvoja na asymptoticky najvýznamnejšiu časť rozvoja pre koeficienty funkcie $R(z)$.

5. Využitie viet o transfere na „preklad" zvyšku singulárneho rozvoja na zvyšok asymptotického rozvoja pre koeficienty funkcie $R(z)$.

[4]Metóda analýzy singularít je aplikovateľná aj na ostatné funkcie $R(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$ za predpokladu, že ich (konečný) polomer konvergencie je ich jedinou dominantnou singularitou. V takom prípade sa nasledujúci postup líši jedine tým, že sa na začiatku overí táto podmienka (čo môže byť jednoduchšie najmä u funkcií získaných inak, než symbolickou metódou).

[5]Neskôr sa budeme zaoberať aj metódou analýzy singularít pre funkcie s konečným počtom dominantných singularít.

Použitie metódy analýzy singularít si teraz demonštrujeme na jednoduchom príklade. Ďalšími príkladmi – vrátane zmysluplnejších aplikácií – sa budeme zaoberať nabudúce.

Príklad 7. Pomocou metódy analýzy singularít nájdeme asymptotický odhad pre koeficienty Maclaurinovho radu funkcie

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{1-z} = 1 + 3z + 5z^2 + \frac{19}{3}z^3 + 7z^4 + \frac{109}{15}z^5 + \ldots$$

Už z týchto prvých niekoľkých členov vidieť, že funkcia $f(z)$ nie je obyčajnou vytvárajúcou funkciou žiadnej kombinatorickej triedy (jej koeficienty nie sú prirodzené). Ide však o exponenciálnu vytvárajúcu funkciu (nájdenie zodpovedajúcej kombinatorickej triedy môže byť užitočným cvičením).

Jedinou singularitou tejto funkcie je očividne polomer konvergencie jej Maclaurinovho radu, $\varrho = 1$; ide tak aj o jej jedinú dominantnú singularitu. Funkcia $f(z)$ je navyše očividne analytická na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, a teda aj na nejakom Δ-obore typu $\Delta(1, R, \phi)$. Môžeme teda nájsť Laurentov rozvoj funkcie $f(z)$ v bode 1:

$$f(z) = \frac{e^2}{1-z} - 2e^2 + 2e^2(1-z) - \frac{4}{3}e^2(1-z)^2 + \ldots = \frac{e^2}{1-z} + O(1).$$

Z viet o asymptotike koeficientov funkcií štandardnej triedy vyplýva, že

$$[z^n]\frac{e^2}{1-z} = e^2[z^n]\frac{1}{1-z} = e^2\left(\frac{n^0}{\Gamma(1)}\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right)\right)$$

a z vety o transfere vyplýva, že pre ľubovoľnú funkciu $g(z) = O(1)$ platí $[z^n]g(z) = O\left(n^{-1}\right)$. V konečnom dôsledku (keďže $\Gamma(1) = 1$) tak pre $n \to \infty$ získavame asymptotický odhad

$$[z^n]\frac{e^2}{1-z} = e^2 + O\left(n^{-1}\right) \sim e^2.$$

Hoci by tento odhad bolo možné ľahko odvodiť aj elementárnymi metódami (čo opäť môže byť užitočným cvičením), demonštrovali sme tu systematický postup, ktorý je použiteľný aj na omnoho komplikovanejšie funkcie. Ďalším aplikáciám metódy analýzy singularít sa budeme venovať nabudúce.

Odkazy na literatúru

Odporúčaným doplňujúcim čítaním k tomuto textu sú oddiely VI.3 a VI.4 knihy [2] a relevantné časti pôvodného článku [1].

Literatúra

[1] Flajolet, P.; Odlyzko, A.: Singularity Analysis of Generating Functions. *SIAM J. Disc. Math.*, ročník 3, č. 2, 1990: s. 216–240.

[2] Flajolet, P.; Sedgewick, R.: *Analytic Combinatorics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.