Jednoduché aplikácie metódy analýzy singularít

Peter Kostolányi

6. mája 2020

Demonštrujeme teraz použitie základného variantu *metódy analýzy singularít* na niekoľkých ukážkových príkladoch jej jednoduchých aplikácií. Spoločnou črtou všetkých týchto príkladov bude existencia jedinej dominantnej singularity uvažovanej vytvárajúcej funkcie – metódu analýzy singularít totiž zatiaľ máme k dispozícii iba pre tento viac-menej špeciálny (aj keď často nastávajúci) prípad. Funkciám s viac ako jednou dominantnou singularitou sa budeme venovať nabudúce. Veľké množstvo ďalších aplikácií metódy analýzy singularít možno nájsť v [1].

Triviality

Začnime niekoľkými triviálnymi príkladmi enumeračných problémov, pri ktorých možno veľmi ľahko prísť k *presnému* výsledku použitím elementárnych metód. V nasledujúcom ukážeme, že postupy analytickej kombinatoriky – čiže nájdenie vytvárajúcej funkcie pomocou *symbolickej metódy* s následným odvodením asymptotického odhadu pre jej koeficienty *metódou analýzy singularít* – vedú k výsledku konzistentnému s presným výsledkom získaným elementárnymi metódami.

Príklad 1. Vieme, že všetkých slov dĺžky n nad dvojprvkovou abecedou $\{a, b\}$ je presne 2^n – ide tu o azda najjednoduchšiu možnú aplikáciu pravidla mocnenia. V nasledujúcom odvodíme asymptotický odhad 2^n pre počet týchto slov pomocou analytickej kombinatoriky.

Uvažujme teda kombinatorickú triedu $\mathcal{W}_2$ pozostávajúcu zo všetkých slov nad abecedou $\{a, b\}$, kde veľkosť každého slova je daná jeho dĺžkou. Ľahko prídeme ku kombinatorickej špecifikácii

$$\mathcal{W}_2 = \mathrm{SEQ}\left(\mathcal{Z} + \mathcal{Z}\right),$$

kde $\mathcal{Z}$ označuje atomickú triedu. Priamočiarou aplikáciou symbolickej metódy na túto špecifikáciu zisťujeme, že pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $W_2(z) \in \mathbb{N}[\![z]\!]$ kombinatorickej triedy $\mathcal{W}_2$ platí

$$W_2(z) = \frac{1}{1-2z}.$$

Už zo samotného tohto vyjadrenia je jasné, že koeficient $[z^n]W_2(z)$ – rovný hľadanému počtu objektov veľkosti n v triede $\mathcal{W}_2$ – je rovný presne 2^n. K rovnakému asymptotickému odhadu sa však môžeme dopracovať aj s použitím metódy analýzy singularít: keďže $W_2(z)$ očividne patrí do $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ a má jedinú dominantnú singularitu v bode $1/2$, dostávame

$$[z^n]W_2(z) = [z^n]\frac{1}{1-2z} \sim 2^n \frac{n^0}{\Gamma(1)} = 2^n.$$

Všimnime si, že sme tu využili fakt, že funkcia $W_2(z)$ je už priamo daná svojím Laurentovým radom, ktorý pozostáva iba z jedného člena. V dôsledku toho sme si pri aplikácii metódy analýzy singularít vystačili s asymptotickými odhadmi pre koeficienty funkcií štandardnej triedy a nemuseli sme použiť vetu o transfere.

Príklad 2. Pozmeňme trochu úlohu z predchádzajúceho príkladu a uvažujme počet všetkých slov dĺžky n nad dvojprvkovou abecedou $\{a, b\}$ a s párnym počtom výskytov písmena a. Ani tu nie je ťažké dospieť k presnému výsledku metódou bijektívnych dôkazov. Pre všetky $n \geq 1$ totiž existuje bijekcia medzi slovami $w \in \{a, b\}^n$ takými, že $|w|_a$ je párne a slovami $w \in \{a, b\}^n$ takými, že $|w|_a$ je nepárne: stačí na prvé písmeno slova aplikovať zobrazenie $a \mapsto b$, $b \mapsto a$.[1] Disjunktným zjednotením týchto dvoch množín navyše získame samotnú množinu $\{a, b\}^n$. Hľadaný počet slov je teda pre $n \geq 1$ rovný presnej polovici počtu všetkých slov z $\{a, b\}^n$, čiže 2^{n-1}; jedine pre $n = 0$ je tento počet rovný jednej. Očakávame teda, že s použitím analytickej kombinatoriky dospejeme k asymptotickému odhadu 2^{n-1}.

[1] Ľahko vidieť, že počet výskytov písmena a tu vždy zvýšime alebo znížime presne o 1, pričom ide o očividnú bijekciu.

Začnime špecifikáciou zodpovedajúcej kombinatorickej triedy $\hat{\mathcal{W}}_2$. Každé slovo s uvedenými vlastnosťami môžeme *jednoznačne* rozložiť na (prípadne aj prázdny) prefix pozostávajúci iba z písmen b a niekoľko slov z jazyka ab^*ab^* (prípadne aj žiadne). Preto

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{W}}_2 &= \mathrm{SEQ}\left(\mathcal{Z}_b\right) \times \mathrm{SEQ}\left(\mathcal{Z}_a \times \mathrm{SEQ}\left(\mathcal{Z}_b\right) \times \mathcal{Z}_a \times \mathrm{SEQ}\left(\mathcal{Z}_b\right)\right) = \\ &= \mathrm{SEQ}\left(\mathcal{Z}\right) \times \mathrm{SEQ}\left(\mathcal{Z} \times \mathrm{SEQ}\left(\mathcal{Z}\right) \times \mathcal{Z} \times \mathrm{SEQ}\left(\mathcal{Z}\right)\right).\end{aligned}$$

Obyčajná vytvárajúca funkcia $\hat{W}_2(z)$ prislúchajúca k triede $\hat{\mathcal{W}}_2$ teda spĺňa

$$\hat{W}_2(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-\frac{z^2}{(1-z)^2}} = \frac{1-z}{1-2z}.$$

Ľahko vidieť, že $\hat{W}_2(z) \in \mathbb{C}\llbracket z \rrbracket$ a jedinou dominantnou singularitou tejto funkcie je jej jednoduchý pól v bode $1/2$. Laurentov rad funkcie $\hat{W}_2(z)$ v bode $1/2$ pozostáva iba z dvoch členov:

$$\hat{W}_2(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2z} + O(1).$$

Je navyše zrejmé, že funkcia $\hat{W}_2(z)$ je analytická na $\mathbb{C} \setminus \{1/2\}$, a teda aj na nejakom Δ-obore v bode $1/2$. Sú teda splnené podmienky vety o transfere a pomocou metódy analýzy singularít zisťujeme, že hľadaný počet slov podľa očakávania spĺňa

$$[z^n]\hat{W}_2(n) = [z^n]\frac{1-z}{1-2z} = \frac{1}{2}[z^n]\frac{1}{1-2z} + O\left(2^n n^{-1}\right) \sim \frac{1}{2} 2^n \frac{n^0}{\Gamma(1)} = 2^{n-1}.$$

Príklad 3. V úvode semestra sme videli, že pomocou vytvárajúcich funkcií možno ľahko odvodiť vyjadrenie *Fibonacciho čísel* v uzavretom tvare; n-té Fibonacciho číslo F_n je definované rekurentným vzťahom

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \qquad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pripomeňme si postup nájdenia obyčajnej vytvárajúcej funkcie $F(z)$ postupnosti $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, pri ktorom si vystačíme so znalosťou operácií na vytvárajúcich funkciách zodpovedajúcich základným operáciám na ich postupnostiach koeficientov – zaobídeme sa teda bez použitia symbolickej metódy.[2] Samotná rekurencia $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, platná pre všetky $n \in \mathbb{N}$, implikuje $(F_{n+2})_{n=0}^{\infty} = (F_{n+1})_{n=0}^{\infty} + (F_n)_{n=0}^{\infty}$, čo sa do reči obyčajných vytvárajúcich funkcií preloží ako

$$\frac{F(z) - F_1 z - F_0}{z^2} = \frac{F(z) - F_0}{z} + F(z),$$

čiže

$$\frac{F(z) - z}{z^2} = \frac{F(z)}{z} + F(z).$$

Z toho úpravou dostávame

$$F(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{z}{(1-\varphi z)(1-\psi z)}, \tag{1}$$

kde $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ a $\psi = (1-\sqrt{5})/2$. Rozkladom na parciálne zlomky potom možno ľahko dospieť k vyjadreniu funkcie $F(z)$ ako lineárnej kombinácie dvoch známych vytvárajúcich funkcií a tak aj k uzavretému tvaru pre F_n:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \psi^n\right).$$

[2] Dalo by sa povedať, že v tomto príklade nájdeme vytvárajúcu funkciu „klasickým“ spôsobom. V minulosti sa totiž vytvárajúce funkcie považovali za viac-menej umelý nástroj na riešenie rekurencií a pri ich použití v kombinatorike sa väčšinou realizoval medzikrok, v ktorom sa hľadaná kvantita vyjadrila rekurentným vzťahom. Poznatok, že vytvárajúce funkcie sú v skutočnosti základným objektom kombinatoriky – úzko súvisiaci so symbolickou metódou alebo inými, do veľkej miery podobnými mechanizmami kombinatorickej špecifikácie – je podstatne mladší.

V tomto príklade dospejeme k asymptotickému odhadu $F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$ s použitím metódy analýzy singularít. Z vyjadrenia (1) vidieť, že $F(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$, pričom jedinou dominantnou singularitou funkcie $F(z)$ je φ^{-1}. Funkcia $F(z)$ je navyše analytická na $\mathbb{C} \setminus \{\varphi^{-1}, \psi^{-1}\}$, a teda aj na nejakom Δ-obore v bode φ^{-1}. Singularita φ^{-1} je jednoduchým pólom funkcie $F(z)$, ktorú v tomto bode možno rozvinúť do Laurentovho radu[3]

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi z)^{-1} - \frac{\varphi}{5} - \frac{1}{5\sqrt{5}}(1-\varphi z) + O\left((1-\varphi z)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi z)^{-1} + O(1),$$

z čoho podľa asymptotických odhadov pre koeficienty funkcií štandardnej triedy a viet o transfere dostávame

$$F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n \frac{n^0}{\Gamma(1)} = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

Príklad 4. Počet všetkých permutácií n-prvkovej množiny je samozrejme $n!$. V nasledujúcom dôjdeme k rovnakému asymptotickému odhadu pomocou analytickej kombinatoriky.

V reči symbolickej metódy nie je permutácia ničím iným, než postupnosťou *označených* atómov – v prípade n-prvkovej postupnosti sa totiž každému atómu jednoznačne priradí jeho číslo z množiny $\{1, \ldots, n\}$, pričom to je možné realizovať ľubovoľným spôsobom. Trieda všetkých takýchto postupností teda naozaj zodpovedá triede všetkých permutácií (kde pod veľkosťou permutácie rozumieme počet permutovaných prvkov). Špecifikácia *označenej* triedy všetkých permutácií teda je

$$\mathcal{P} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{Z}),$$

kde $\mathcal{Z}$ je atomická označená trieda a SEQ (na rozdiel od príkladov vyššie) označuje operáciu postupnosti na *označených* triedach. Uvedená špecifikácia sa preloží na vzťah pre *exponenciálnu* vytvárajúcu funkciu $P(z)$ triedy $\mathcal{P}$:

$$P(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Metódou analýzy singularít (alebo vďaka do očí bijúcej triviálnosti tejto úlohy aj priamym náhľadom) následne dôjdeme k asymptotickému odhadu

$$[z^n]P(z) \sim 1.$$

Keďže tentokrát pracujeme s exponenciálnou vytvárajúcou funkciou, zisťujeme, že počet všetkých permutácií n-prvkovej množiny je

$$n![z^n]P(z) \sim n!,$$

čo súhlasí s tým, že všetkých permutácií n-prvkovej množiny je presne $n!$.

Stromy, Catalanove čísla a Motzkinove čísla

Na prvej prednáške sme dokázali, že počet všetkých plných binárnych stromov[4] s n vnútornými vrcholmi – taký strom má nutne $n+1$ listov – je rovný n-tému Catalanovmu číslu

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Náš bijektívny dôkaz tejto skutočnosti nebol ani zďaleka priamočiary. Ukážeme si teraz, ako odvodiť asymptotický odhad pre počet všetkých plných binárnych stromov s n vnútornými vrcholmi systematicky, s použitím metód analytickej kombinatoriky.

[3]Ručný výpočet tohto rozvoja je približne rovnako prácny ako rozklad na parciálne zlomky vedúci k uzavretému tvaru pre F_n. Algoritmy na rozvoj funkcií do Taylorových, Laurentových, či Puiseuxových radov sú však implementované v každom ozajstnom systéme počítačovej algebry – celý postup je teda možné do veľkej miery zmechanizovať.

[4]Čiže binárnych stromov, v ktorých má každý *vnútorný* vrchol *práve* dvoch synov. Predpokladáme, že každý strom obsahuje najmenej jeden (nie nutne vnútorný) vrchol.

Príklad 5. Nech $\mathcal{T}$ označuje kombinatorickú triedu všetkých plných binárnych stromov, kde veľkosť každého stromu je daná počtom jeho vnútorných vrcholov. Zjavne potom existuje izomorfizmus medzi kombinatorickými triedami $\mathcal{T}$ a $\mathcal{E} + \mathcal{Z} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}$, kde $\mathcal{E}$ označuje neutrálnu triedu a $\mathcal{Z}$ atomickú triedu – každý plný binárny strom totiž buď pozostáva z jediného vrcholu, ktorý je súčasne jeho koreňom aj listom (takýto strom neobsahuje žiaden vnútorný vrchol), alebo pozostáva z koreňa (ktorý je vnútorným vrcholom) a dvoch podstromov – ľavého a pravého – ktoré sú opäť plnými binárnymi stromami. S použitím našej konvencie stotožňovania izomorfných kombinatorických tried teda prichádzame k nasledujúcej rekurzívnej špecifikácii triedy $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{E} + \mathcal{Z} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}.$$

Uvedená špecifikácia sa priamo preloží na vzťah pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $T(z) \in \mathbb{N}[\![z]\!]$ triedy $\mathcal{T}$:

$$T(z) = 1 + zT(z)^2,$$

z čoho

$$zT(z)^2 - T(z) + 1 = z\left(\frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z} - T(z)\right)\left(\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} - T(z)\right) = 0.$$

Táto rovnica o neznámej $T(z)$ má dve riešenia v $\mathbb{C}[\![z]\!]$:

$$T_+(z) = \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z} \qquad \text{a} \qquad T_-(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Ľahko navyše overíme, že $T_+(z) \notin \mathbb{N}[\![z]\!]$; hľadanou obyčajnou vytvárajúcou funkciou $T(z)$ je teda

$$T(z) = T_-(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}. \tag{2}$$

Hľadaný počet plných binárnych stromov s n vnútornými vrcholmi je daný ako $T_n := [z^n]T(z)$. Asymptotický odhad tejto hodnoty pre $n \to \infty$ nájdeme metódou analýzy singularít. Z vyjadrenia (2) je zrejmé, že $T(z) \in \mathbb{C}(\!|z|\!)$, pričom jedinou dominantnou singularitou tejto funkcie[5] je bod $1/4$; funkcia $T(z)$ je navyše analytická na $\mathbb{C} \setminus [1/4, \infty)$, a teda aj na nejakom Δ-obore v bode $1/4$.

Ľahko vidieť, že funkcia $T(z)$ má v bode $1/4$ algebraický bod vetvenia druhého rádu a Puiseuxov rozvoj[6]

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2z}\left(1-\sqrt{1-4z}\right) = \frac{2}{1-(1-4z)}\left(1-\sqrt{1-4z}\right) = \\ &= 2 - 2\sqrt{1-4z} + 2(1-4z) - 2(1-4z)^{3/2} + O\left((1-4z)^2\right) = \\ &= -2\sqrt{1-4z} + O(1-4z). \end{aligned}$$

Z odhadov pre koeficienty funkcií štandardnej triedy a vety o transfere následne dostávame

$$T_n = [z^n]T(z) \sim -2\frac{4^n n^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}n^{3/2}},$$

čo je súčasne aj asymptotickým odhadom pre Catalanove čísla. Ten by ešte bolo možné odvodiť aj s použitím uzavretého tvaru pre Catalanove čísla a Stirlingovej aproximácie. Výhodou prístupu prostredníctvom analytickej kombinatoriky je nezávislosť od znalosti tohto uzavretého tvaru (za ktorým je ukrytý pomerne nepriamočiary bijektívny dôkaz), možnosť zovšeobecnení najrôznejšími smermi – niektoré z nich aj koniec koncov zakrátko preskúmame – a predovšetkým jeho systematickosť, ktorá celý postup nájdenia asymptotického odhadu činí v podstate mechanickým.

[5]V bode 0 má táto funkcia odstrániteľnú singularitu, ktorú za singularitu nepovažujeme; naopak funkciu chápeme tak, ako keby táto odstrániteľná singularita už bola odstránená.

[6]Výpočet Pusieuxovho rozvoja si opäť možno uľahčiť použitím systému počítačovej algebry.

Príklad 6. Podobne ako v predchádzajúcom príklade teraz asymptoticky vyčíslime počet *všetkých* binárnych stromov s n vrcholmi (vrátane listov); na rozdiel od predchádzajúceho príkladu budeme uvažovať aj prázdny strom, ktorý bude jediným stromom veľkosti nula. Rovnako ako vyššie prídeme k rekurzívnej špecifikácii

$$\mathcal{B} = \mathcal{E} + \mathcal{Z} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B},$$

keďže každý binárny strom je buď prázdny, alebo pozostáva z koreňa a dvoch (prípadne aj prázdnych) podstromov. Keďže je táto špecifikácia rovnaká ako vyššie, zisťujeme, že počet B_n binárnych stromov s n vrcholmi je rovnaký ako počet plných binárnych stromov s n vnútornými vrcholmi,[7] čiže

$$B_n = T_n = C_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}.$$

Príklad 7. Je zrejmé, že počet všetkých *neprázdnych* binárnych stromov je pre všetky $n \geq 1$ rovnaký ako vyššie, a teda bude rovnaký aj asymptotický odhad pre túto veličinu. Táto úloha však vedie na trochu odlišnú špecifikáciu:

$$\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{Z} \times (\hat{\mathcal{B}} + \mathcal{E}) \times (\hat{\mathcal{B}} + \mathcal{E});$$

každý neprázdny binárny strom totiž pozostáva z koreňa a dvoch podstromov, ktoré však nemusia byť neprázdne. Z uvedenej špecifikácie získavame nasledujúci vzťah pre zodpovedajúcu obyčajnú vytvárajúcu funkciu $\hat{B}(z)$:

$$\hat{B}(z) = z(\hat{B}(z) + 1)(\hat{B}(z) + 1).$$

Z toho úpravou dostávame rovnicu

$$z\hat{B}(z)^2 + (2z - 1)\hat{B}(z) + z = 0,$$

ktorej dve riešenia sú dané ako

$$\hat{B}_+(z) = \frac{1 - 2z + \sqrt{1 - 4z}}{2z} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} - 1 \quad \text{a} \quad \hat{B}_-(z) = \frac{1 - 2z - \sqrt{1 - 4z}}{2z} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} - 1.$$

Keďže prvé riešenie nemá prirodzené koeficienty, rovnako ako v príklade 5 zisťujeme, že

$$\hat{B}(z) = \hat{B}_-(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} - 1 \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}.$$

Príklad 8. Nájdeme teraz asymptotický odhad pre počet všetkých (neprázdnych) unárno-binárnych stromov – t.j. usporiadaných zakorenených stromov, kde každý vnútorný vrchol má buď jedného, alebo dvoch synov (pričom v prípade jedného syna nerozlišujeme, či ide o syna ľavého alebo pravého) – s n vrcholmi. Označme zodpovedajúcu kombinatorickú triedu ako $\mathcal{U}$. K jej špecifikácii dôjdeme podobne ako u binárnych stromov:

$$\mathcal{U} = \mathcal{Z} + \mathcal{Z} \times \mathcal{U} + \mathcal{Z} \times \mathcal{U} \times \mathcal{U},$$

pretože každý unárno-binárny strom pozostáva z koreňa a žiadneho až dvoch unárno-binárnych podstromov.

Pre zodpovedajúcu obyčajnú vytvárajúcu funkciu $U(z)$ teda dostávame vzťah

$$U(z) = z + zU(z) + zU(z)^2,$$

čiže

$$zU(z)^2 + (z - 1)U(z) + z = 0.$$

Táto kvadratická rovnica má dve riešenia:

$$U_+(z) = \frac{1 - z + \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z} \qquad \text{a} \qquad U_-(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z}.$$

[7] Nájdenie bijekcie medzi oboma triedami prenechávame čitateľovi ako nie veľmi náročné cvičenie.

Ľahko overíme, že $U_+(z) \notin \mathbb{N}[\![z]\!]$; teda

$$U(z) = U_-(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z} = \frac{1 - z - \sqrt{(1 - 3z)(1 + z)}}{2z}.$$

Táto funkcia patrí do $\mathbb{C}(\!|z|\!)$, jej jedinou dominantnou singularitou je bod $1/3$ a je analytická na $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1/3, \infty))$, čiže aj na nejakom Δ-obore v bode $1/3$. Jej Puiseuxovým rozvojom v bode $1/3$ je

$$U(z) = 1 - \sqrt{3}\sqrt{1 - 3z} + O(1 - 3z).$$

Metódou analýzy singularít teda prichádzame k odhadu

$$[z^n]U(z) \sim -\sqrt{3}\frac{3^n n^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}.$$

Koeficienty $[z^n]U(z)$ sa nazývajú aj *Motzkinovými číslami* (v závislosti od zdroja buď n-tými, alebo $(n-1)$-vými).

Dismutácie a ich zovšeobecnenia

Pod *dismutáciou* (angl. *derangement*) n-prvkovej množiny X rozumieme jej permutáciu, ktorá žiaden prvok množiny X nezobrazí na seba samého. Úlohu o počte všetkých dismutácií n-prvkovej množiny, s ktorou sa pri štúdiu informatiky možno stretnúť už v prvom ročníku ako s príkladom použitia princípu zapojenia a vypojenia, sa na populárnej úrovni často formuluje takto: do divadla príde n pánov v navlas rovnakých klobúkoch, ktoré si po príchode odložia v šatni. Pri odchode si každý z pánov náhodne zoberie jeden z odložených klobúkov. Aká je pravdepodobnosť, že vo výsledku nedostane nikto svoj vlastný klobúk? V nasledujúcom vyriešime túto úlohu pomocou analytickej kombinatoriky a následne sa budeme zaoberať aj jej zovšeobecnením.

Príklad 9. Označme kombinatorickú triedu všetkých dismutácií, chápaných ako označené objekty, symbolom $\mathcal{D}$. Triedu všetkých permutácií možno špecifikovať aj inak, ako v príklade 4: permutácie môžeme chápať aj ako množiny označených cyklov – každú permutáciu totiž možno vyjadriť ako zloženie niekoľkých cyklov, pričom takýto rozklad na cykly je jednoznačný až na poradie cyklov. Dismutácie sú potom charakterizované tým, že neobsahujú cykly dĺžky 1, ktoré zodpovedajú pevným bodom permutácie – možno ich teda vyjadriť ako množiny cyklov dĺžky aspoň 2. Tým prichádzame k nasledujúcej špecifikácii označenej kombinatorickej triedy $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \mathrm{SET}\left(\mathrm{CYC}_{\geq 2}(\mathcal{Z})\right) = \mathrm{SET}\left(\mathrm{CYC}_2(\mathcal{Z}) + \mathrm{CYC}_3(\mathcal{Z}) + \mathrm{CYC}_4(\mathcal{Z}) + \dots\right).$$

Táto špecifikácia sa pomocou viet symbolickej metódy pre označené objekty preloží na nasledujúci vzťah pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $D(z)$ triedy $\mathcal{D}$:

$$D(z) = e^{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k}} = e^{-z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}} = e^{-z} e^{\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)} = \frac{e^{-z}}{1 - z}.$$

Asymptotický odhad pre počet $D_n := n![z^n]D(z)$ všetkých dismutácií n-prvkovej množiny ľahko odvodíme metódou analýzy singularít. Zrejme $D(z) \in \mathbb{C}(\!|z|\!)$, pričom jedinou dominantnou singularitou funkcie $D(z)$ je bod 1. Funkcia $D(z)$ je navyše analytická na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, a v dôsledku toho aj na nejakom Δ-obore v bode 1. Rozvinutím funkcie $D(z)$ do Laurentovho radu v bode 1 dostávame

$$\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e}(1 - z) + \frac{1}{6e}(1 - z)^2 + O\left((1 - z)^3\right) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1 - z} + O(1),$$

z čoho podľa vety o asymptotike koeficientov funkcií štandardnej triedy a vety o transfere pre $n \to \infty$ vyplýva

$$[z^n]D(z) \sim \frac{1}{e} \cdot \frac{n^0}{\Gamma(1)} = \frac{1}{e},$$

a teda aj

$$D_n = n![z^n]D(z) \sim \frac{n!}{e}.$$

Pravdepodobnosť, že rovnomerne náhodne zvolená permutácia je dismutáciou – t.j. pravdepodobnosť, že žiaden z pánov nedostane svoj vlastný klobúk – sa teda pre $n \to \infty$ blíži k $(n!/e)/n! = e^{-1}$.

Príklad 10. Prirodzeným zovšeobecnením úlohy z predchádzajúceho príkladu dospejeme k nasledujúcej otázke: aká je pravdepodobnosť, že rovnomerne náhodne zvolená permutácia neobsahuje žiaden cyklus dĺžky $r \in \mathbb{N}$ alebo menej? Označme $\mathcal{D}^{(r)}$ triedu všetkých takýchto permutácií chápaných ako označené objekty. Pre $r = 0$ ide zjavne o triedu všetkých permutácií a pre $r = 1$ o triedu všetkých dismutácií. Ku kombinatorickej špecifikácii tejto triedy označených objektov dospejeme pomocou rovnakých úvah ako v predchádzajúcom príklade:

$$\mathcal{D}^{(r)} = \mathrm{SET}\left(\mathrm{CYC}_{\geq r+1}(\mathcal{Z})\right).$$

Z toho pre zodpovedajúcu exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $D^{(r)}(z)$ dostávame

$$D^{(r)}(z) = e^{\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{z^k}{k}} = e^{-\left(z+\frac{z^2}{2}\dots+\frac{z^r}{r}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}} = e^{-\sum_{k=1}^{r}\frac{z^k}{k}} e^{\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)} = \frac{e^{-\sum_{k=1}^{r}\frac{z^k}{k}}}{1-z}.$$

Podobne ako vyššie ľahko vidieť, že $D^{(r)}(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, pričom jedinou dominantnou singularitou tejto funkcie je bod 1. Funkcia je navyše analytická na $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, a teda aj na nejakom Δ-obore v bode 1. Z jej Laurentovho rozvoja v bode 1 navyše máme

$$D^{(r)}(z) = e^{-H_r}\frac{1}{1-z} + O(1),$$

kde H_r je r-té *harmonické číslo*

$$H_r = \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}.$$

Metódou analýzy singularít teda pre $n \to \infty$ dostávame odhad

$$[z^n]D^{(r)}(z) \sim e^{-H_r}\frac{n^0}{\Gamma(1)} = e^{-H_r}$$

a v dôsledku toho aj

$$D_n^{(r)} := n![z^n]D^{(r)}(z) \sim e^{-H_r}n!.$$

Pravdepodobnosť, že rovnomerne náhodne zvolená permutácia n-prvkovej množiny neobsahuje cyklus veľkosti r alebo menší sa teda pre $n \to \infty$ limitne blíži k hodnote e^{-H_r}.

2-regulárne grafy

Príklad 11. Metódy analytickej kombinatoriky teraz využijeme na odvodenie asymptotického odhadu pre počet všetkých 2-regulárnych grafov o n označených vrcholoch. Je zrejmé, že každý takýto graf pozostáva z niekoľkých vrcholovo disjunktných kružníc, pričom každá kružnica je dĺžky aspoň 3. Pre kombinatorickú triedu $\mathcal{X}$ všetkých označených kružníc platí

$$\mathcal{X} + \mathcal{X} \cong \mathcal{X} \star (\mathcal{E} + \mathcal{E}) \cong \mathrm{CYC}_{\geq 3}(\mathcal{Z}),$$

kde izomorfizmus prvej dvojice tried existuje očividne a pri druhej dvojici tried si stačí uvedomiť, že každý cyklus dĺžky aspoň 3 možno jednoznačne zadať kružnicou dĺžky aspoň 3 a jej orientáciou. Pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $X(z)$ triedy $\mathcal{X}$ teda platí

$$2X(z) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{z^n}{n} = -z - \frac{z^2}{2} + \ln\frac{1}{1-z},$$

z čoho

$$X(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}z^2.$$

Kombinatorickú triedu $\mathcal{G}$ všetkých označených 2-regulárnych grafov potom možno špecifikovať ako

$$\mathcal{G} = \mathrm{SET}(\mathcal{X}),$$

z čoho pre zodpovedajúcu exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $G(z)$ dostávame

$$G(z) = e^{X(z)} = \frac{e^{-z/2-z^2/4}}{\sqrt{1-z}}.$$

Pre počet G_n všetkých 2-regulárnych grafov o n označených vrcholoch teraz platí $G_n = n![z^n]G(z)$. Asymptotický odhad pre $n \to \infty$ nájdeme pomocou metódy analýzy singularít: zjavne $G(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$, pričom jedinou dominantnou singularitou tejto funkcie je bod 1. Funkcia $G(z)$ je analytická na množine $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$, a teda aj na nejakom Δ-obore v bode 1. Z jej Puiseuxovho rozvoja v bode 1 navyše zisťujeme, že

$$G(z) = \frac{e^{-3/4}}{\sqrt{1-z}} + O(\sqrt{1-z}).$$

Vďaka asymptotickým odhadom pre koeficienty funkcií štandardnej triedy a vete o transfere teda pre $n \to \infty$ dostávame

$$[z^n]G(z) \sim e^{-3/4}\frac{n^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{e^{-3/4}}{\sqrt{\pi n}}$$

a

$$G_n = n![z^n]G(z) \sim \frac{e^{-3/4}n!}{\sqrt{\pi n}}.$$

Odkazy na literatúru

Príklady uvedené v tomto texte sú viac-menej prebraté [1]. Množstvo ďalších podobných príkladov je roztrúsených po celej tejto knihe.

Literatúra

[1] Flajolet, P.; Sedgewick, R.: *Analytic Combinatorics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009.