Vytvárajúce funkcie s viacerými dominantnými singularitami

Peter Kostolányi

12. mája 2020

Doposiaľ sme sa zaoberali iba základným variantom metódy analýzy singularít, pri ktorom sme predpokladali, že skúmaná vytvárajúca funkcia má práve jednu dominantnú singularitu rovnú jej polomeru konvergencie. Teraz sa v krátkosti pristavíme pri vytvárajúcich funkciách s viacerými dominantnými singularitami – stále však budeme predpokladať existenciu *konečného počtu* dominantných singularít – a popíšeme metódu analýzy singularít v jej plnej všeobecnosti.

Asymptotické vlastnosti funkcií s viacerými dominantnými singularitami

Uvažujme funkciu $f(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\!(z)\!)$ s reálnym polomerom konvergencie $\varrho > 0$. Z viet, na ktorých je založený základný variant metódy analýzy singularít, vyplýva nasledujúce: ak má funkcia $f(z)$ jedinú dominantnú singularitu – ktorá podľa Pringsheimovej vety musí byť v bode ϱ – možno koeficienty $[z^n]f(z)$ pre $n \to \infty$ veľmi presne asymptoticky odhadnúť nejakou monotónnou funkciou.

Existencia viac ako jednej dominantnej singularity sa typicky prejaví porušením tejto monotónnosti – koeficienty funkcií s konečným počtom dominantných singularít môžu oscilovať, ako napríklad pri nasledujúcich funkciách:

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-z^3} = 1 + z^3 + z^6 + z^9 + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-9z^2} + \frac{1}{1-2z} = 2 + 2z + 13z^2 + 8z^3 + 97z^4 + 32z^5 + 793z^6 + \ldots \tag{1}$$

Dominantné singularity prvej z týchto funkcií sú ± 1, pri druhej funkcii ide o hodnoty $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$ a tretia z uvedených funkcií má dominantné singularity $\pm 1/3$. Vo všetkých troch prípadoch teda ide výlučne o singularity typu $\varrho\omega$, kde ω je niektorá prirodzená komplexná odmocnina jednej. Singularity takéhoto typu sa prejavujú, podobne ako pri trojici funkcií vyššie, periodickým správaním koeficientov, pričom perióda je daná rádom odmocniny ω; pri väčšine funkcií významných z hľadiska kombinatoriky narážame práve na tento prípad. Existencia singularít, ktoré nie sú takéhoto typu, vyústi v oscilácie, ktoré sú o poznanie ťažšie predvídateľné.

Metóda analýzy singularít: prípad viacerých dominantných singularít

Rozšírenie metódy analýzy singularít na prípad vytvárajúcich funkcií s konečným počtom dominantných singularít je z hľadiska jeho použitia veľmi jednoduché – spočíva v lokalizácii všetkých dominantných singularít $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ a následnom nájdení singulárnych rozvojov uvažovanej funkcie $f(z)$ v týchto bodoch. V prípade, že členy týchto singulárnych rozvojov patria do štandardnej triedy funkcií, nájdeme pre asymptoticky najvýznamnejší člen (resp. niekoľko najvýznamnejších členov) každého z nich odhad pre jeho koeficienty. Tieto odhady následne pre $j = 1, \ldots, k$ sčítame, čím – za nie príliš obmedzujúceho predpokladu analytickosti funkcie $f(z)$ na prieniku Δ-oborov v jednotlivých jej dominantných singularitách – získame asymptotický odhad pre koeficienty funkcie $f(z)$.

Poznámka 1. Je dôležité si uvedomiť, že pri takomto sčítaní asymptotických odhadov pre koeficienty najvýznamnejších členov môže niekedy dôjsť k ich vyrušeniu, čo znamená, že pre niektoré n môže byť asymptoticky najvýznamnejšia časť odhadu pre $[z^n]f(z)$ ukrytá v chybovom člene. Uvažujme napríklad funkciu (1): metódou analýzy singularít získame – vďaka vete 2, ktorú zakrátko sformulujeme – odhad

$$[z^n]\left(\frac{1}{1-9z^2} + \frac{1}{1-2z}\right) \sim 3^n + (-3)^n + O\left(n^{-1}3^n\right).$$

Ľahko vidieť, že pre nepárne n sú koeficienty rovné 2^n; avšak táto informácia je zahrnutá v chybovom člene.

Presnejšie je princíp metódy analýzy singularít, v prípade vytvárajúcich funkcií s konečným počtom dominantných singularít, sformulovaný v nasledujúcej vete.

Veta 2. *Nech $f(z) \in \mathbb{C}(\!|z|\!)$ je funkcia s reálnym polomerom konvergencie $\varrho > 0$ a konečným počtom dominantných singularít $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$.*[1] *Predpokladajme navyše, že existuje Δ-obor $\Delta := \Delta(1, R, \phi)$ taký, že $f(z)$ je analytická na množine*

$$D = \bigcap_{j=1}^{k} (\zeta_j \cdot \Delta),$$

kde pre $j = 1, \ldots, k$ je $\zeta_j \cdot \Delta = \{\zeta_j z \mid z \in \Delta\}$. Ak potom pre $j = 1, \ldots, k$, $z \in D$ a $z \to \zeta_j$ platí

$$f(z) = C_j^{(1)} \sigma_j^{(1)}(z/\zeta_j) + \ldots + C_j^{(r)} \sigma_j^{(r)}(z/\zeta_j) + O\left(\left(1 - \frac{z}{\zeta_j}\right)^{\alpha} \left(\ln \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta_j}}\right)^{p}\right),$$

kde $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $C_j^{(1)}, \ldots, C_j^{(r)} \in \mathbb{C}$, pre $s = 1, \ldots, r$ funkcia

$$\sigma_j^{(s)}(z) = (1 - z)^{\alpha_{j,s}} \left(\ln \frac{1}{1 - z}\right)^{p_{j,s}}$$

s $\alpha_{j,s} \in \mathbb{C}$ a $p_{j,s} \in \mathbb{N}$ patrí do štandardnej triedy funkcií a $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ sú čísla nezávislé od j, tak pre $n \to \infty$ platí

$$[z^n] f(z) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{r} C_j^{(s)} \zeta_j^{-n} \left([z^n] \sigma_j^{(s)}(z)\right) + O\left(\varrho^{-n} n^{-\alpha-1} (\ln n)^p\right).$$

Dôkaz. Hrubé rysy dôkazu, ktorý je založený na úplne rovnakých myšlienkach ako v prípade jedinej dominantnej singularity, možno nájsť v [1, str. 398]. □

Príklady

Príklad 3. Nájdeme asymptotický odhad pre koeficienty funkcie

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - z}}{(1 - 4z^2)^2}.$$

Dominantné singularity tejto funkcie zrejme ležia v bodoch $\pm 1/2$, pričom funkcia $f(z)$ je analytická na $\mathbb{C} \setminus (\{1/2, -1/2\} \cup [1, \infty))$; z toho vyplýva jej analytickosť aj na množine $(\Delta/2) \cap (-\Delta/2)$ pre nejaký Δ-obor Δ v bode 1.

Môžeme teda nájsť Laurentove rozvoje funkcie $f(z)$ v bodoch $\pm 1/2$:

$$f(z) = \frac{2 - \sqrt{2}}{8} (1 - 2z)^{-2} + O\left((1 - 2z)^{-1}\right),$$
$$f(z) = \frac{2 - \sqrt{6}}{8} (1 + 2z)^{-2} + O\left((1 + 2z)^{-1}\right).$$

Podľa vety 2 potom pre $n \to \infty$ dostávame

$$[z^n] f(z) = \frac{2 - \sqrt{2}}{8} 2^n \frac{n^1}{\Gamma(2)} + \frac{2 - \sqrt{6}}{8} (-2)^n \frac{n^1}{\Gamma(2)} + O(2^n) \sim \frac{2 - \sqrt{2}}{8} n 2^n + \frac{2 - \sqrt{6}}{8} n (-2)^n.$$

Príklad 4. Uvažujme jednoznačnú bezkontextovú gramatiku s pravidlami

$$\sigma \to a\sigma\sigma \mid b\alpha$$
$$\alpha \to c\alpha\alpha \mid d,$$

[1] Z definície dominantnej singularity nutne $|\zeta_1| = |\zeta_2| = \ldots = |\zeta_k| = \varrho$. Ak navyše $f(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\!|z|\!)$, čo je okrem iného prípad všetkých vytvárajúcich funkcií, musí byť jedno z čísel $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ rovné ϱ.

kde σ, α sú neterminály, σ je počiatočný neterminál a a, b, c, d sú terminály. Pre $n \to \infty$ asymptoticky vyčíslime počet W_n všetkých slov dĺžky n v jazyku generovanom touto gramatikou.

Vďaka jednoznačnosti uvedenej gramatiky je kombinatorická špecifikácia triedy $\mathcal{Y}_1$ všetkých ňou generovaných slov daná ako

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_1 &= \mathcal{Z} \times \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Z} \times \mathcal{Y}_2 \\ \mathcal{Y}_2 &= \mathcal{Z} \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{Y}_2 + \mathcal{Z},\end{aligned}$$

kde $\mathcal{Z}$ označuje atomickú triedu. Vytvárajúce funkcie prislúchajúce k triedam $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ sú teda riešením systému rovníc

$$\begin{aligned}Y_1(z) &= zY_1(z)^2 + zY_2(z) \\ Y_2(z) &= zY_2(z)^2 + z\end{aligned}$$

o neznámych $Y_1(z), Y_2(z)$. Tento systém má štyri riešenia nad $\mathbb{C}[\![z]\!]^2$, pričom práve jedno z nich patrí do $\mathbb{N}[\![z]\!]^2$:

$$Y_1(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2z + 2z\sqrt{1 - 4z^2}}}{2z} \qquad \text{a} \qquad Y_2(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z}.$$

Nami hľadaná vytvárajúca funkcia je teda daná ako

$$Y_1(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2z + 2z\sqrt{1 - 4z^2}}}{2z}$$

a pre hľadaný počet slov dĺžky n, generovaných našou gramatikou, platí $W_n = [z^n]Y_1(z)$.

Asymptotický odhad tejto veličiny pre $n \to \infty$ nájdeme metódou analýzy singularít. Ľahko vidieť, že funkcia $Y_1(z)$ má dve dominantné singularity v bodoch $\pm 1/2$, pričom je splnená aj podmienka jej analytickosti na $(\Delta/2) \cap (-\Delta/2)$ pre nejaký Δ-obor Δ v bode 1. Môžeme teda nájsť Puiseuxove rozvoje funkcie $Y_1(z)$ v bodoch $1/2$ a $-1/2$:

$$\begin{aligned}Y_1(z) &= 1 - \sqrt[4]{2}(1-2z)^{1/4} + O\left((1-2z)^{3/4}\right) = 1 - \sqrt[4]{2}(1-2z)^{1/4} + O\left((1-2z)^{1/2}\right), \\ Y_1(z) &= -1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}(1+2z)^{1/2} + O(1+2z) = -1 + \sqrt{2} + O\left((1-2z)^{1/2}\right).\end{aligned}$$

Keďže 1 aj $-1+\sqrt{2}$ sú konštantné funkcie, z hľadiska asymptotiky nehrajú žiadnu rolu; z vety 2 teda dostávame odhad

$$W_n = [z^n]Y_1(z) = -\sqrt[4]{2}\, 2^n \frac{n^{-5/4}}{\Gamma(-1/4)} + O\left(n^{-3/2}2^n\right) \sim \frac{-\sqrt[4]{2}}{\Gamma(-1/4)} n^{-5/4} 2^n,$$

kde $\Gamma(-1/4)$ je približne $-4,902$.

Odkazy na literatúru

Viac sa o tejto problematike možno dočítať v oddiele VI.5 knihy Flajoleta a Sedgewicka [1].

Literatúra

[1] Flajolet, P.; Sedgewick, R.: *Analytic Combinatorics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009.