ANALYTICKÁ A ENUMERATÍVNA KOMBINATORIKA

Peter Kostolányi

17. apríla 2024

Obsah

Kapitola 1

Úvodné príklady: Catalanove čísla

V rámci *enumeratívnej kombinatoriky* sa typicky zaujímame o nájdenie počtu nejakých kombinatorických objektov – napríklad slov, stromov, či grafov – daného druhu a danej veľkosti $n \in \mathbb{N}$. Nie vždy pritom existuje rozumné vyjadrenie hľadaného počtu objektov v uzavretom tvare; v takom prípade sa obvykle pokúšame nájsť čo možno najpresnejší asymptotický odhad.

Klasický prístup k riešeniu tejto úlohy je založený na metóde *bijektívnych dôkazov*, pri ktorej sa konštruuje bijekcia medzi množinou uvažovaných objektov veľkosti n a nejakou inou množinou, ktorá je vybudovaná z dostatočne jednoduchých konečných množín pomocou štandardných operácií, akými sú napríklad disjunktné zjednotenie, karteziánsky súčin, prechod k množine všetkých kombinácií alebo variácií, a podobne. Na ukážku teraz touto metódou bijektívnych dôkazov vyriešme tri enumeračné úlohy vedúce k rovnakému výsledku.

1.1 Enumerácia dobrých uzátvorkovaní

Príklad 1.1.1. Uvažujme slová zložené zo zátvoriek „(“ a „)“, pričom kvôli prehľadnosti budeme ľavú zátvorku označovať a a pravú $\overline{a}$. Nájdime *počet dobre uzátvorkovaných slov* nad abecedou $\Sigma = \{a, \overline{a}\}$ obsahujúcich práve $n \in \mathbb{N}$ ľavých a pravých zátvoriek – pôjde teda o slová z *Dyckovho jazyka* $D_1 \subseteq \Sigma^*$ definovaného nasledovne:

(*i*) $\varepsilon \in D_1$;

(*ii*) pre všetky $u, v \in D_1$ je $au\overline{a}v \in D_1$;

(*iii*) žiadne iné slovo nie je v D_1.

Hľadanou hodnotou je pre dané $n \in \mathbb{N}$ počet prvkov jazyka $L_n := D_1 \cap \Sigma^{2n}$.

Pre $n = 0$ je $|L_n| = 1$, keďže jazyk L_n obsahuje iba prázdne slovo. Nech teda $n \geq 1$. Každé slovo $w \in L_n$ obsahuje presne n výskytov oboch písmen: $|w|_a = |w|_{\overline{a}} = n$. Nech $U_n = a^n \sqcup \overline{a}^n$ je jazyk všetkých slov nad abecedou Σ s touto vlastnosťou. Označme $L'_n := U_n \setminus L_n$ jazyk všetkých slov nad abecedou Σ, ktoré obsahujú n výskytov oboch písmen, ale nie sú dobre uzátvorkované.

Uvažujme ľubovoľné slovo $w \in L'_n$, kde $w = a_1 \ldots a_{2n}$ pre $a_1, \ldots, a_{2n} \in \Sigma$. Ľahko vidieť, že v takom prípade musí existovať $k \in [2n]$ také, že

$$|a_1 \ldots a_k|_a < |a_1 \ldots a_k|_{\overline{a}}\,.$$

Vezmime *najmenšie* také k; to je zrejme nepárne, pričom $a_k = \overline{a}$ a

$$|a_1 \ldots a_k|_a + 1 = |a_1 \ldots a_k|_{\overline{a}}\,.$$

Pri konvencii $\overline{\overline{a}} = a$ je predpisom $c \mapsto \overline{c}$ pre $c \in \Sigma$ jednoznačne určený automorfizmus na Σ^*. Pre uvažované slovo $w \in L'_n$ a index $k \in [2n]$ položme

$$\varphi(w) := \overline{a_1} \dots \overline{a_k} a_{k+1} \dots a_{2n},$$

čím dostávame zobrazenie $\varphi\colon L'_n \to a^{n+1} \sqcup \overline{a}^{n-1}$; dokážeme, že zobrazenie φ je bijekcia.

Za tým účelom definujme zobrazenie $\psi\colon a^{n+1} \sqcup \overline{a}^{n-1} \to L'_n$ takto: ak $x = b_1 \dots b_{2n} \in a^{n+1} \sqcup \overline{a}^{n-1}$ pre nejaké $b_1, \dots, b_{2n} \in \Sigma$, nutne musí existovať $j \in [2n]$ také, že

$$|b_1 \dots b_j|_a > |b_1 \dots b_j|_{\overline{a}};$$

opäť vezmime *najmenšie* také j a položme

$$\psi(x) := \overline{b_1} \dots \overline{b_j} b_{j+1} \dots b_{2n}.$$

V takom prípade zrejme

$$|b_1 \dots b_j|_a = |b_1 \dots b_j|_{\overline{a}} + 1,$$

takže $|\psi(x)|_a = |\psi(x)|_{\overline{a}}$ a súčasne

$$|\overline{b_1} \dots \overline{b_j}|_a < |\overline{b_1} \dots \overline{b_j}|_{\overline{a}},$$

takže slovo $\psi(x)$ nie je dobre uzátvorkované; naozaj teda dostávame zobrazenie $\psi\colon a^{n+1} \sqcup \overline{a}^{n-1} \to L'_n$.

Dokážeme, že φ a ψ sú vzájomne inverzné bijekcie.

a) Nech $w = a_1 \dots a_{2n} \in L'_n$ pre $a_1, \dots, a_{2n} \in \Sigma$ a $k \in [2n]$ je najmenší index taký, že

$$|a_1 \dots a_k|_a < |a_1 \dots a_k|_{\overline{a}}.$$

Zrejme potom ide aj o najmenší index taký, že

$$|\overline{a_1} \dots \overline{a_k}|_a > |\overline{a_1} \dots \overline{a_k}|_{\overline{a}}.$$

Preto

$$\psi(\varphi(w)) = \psi(\varphi(a_1 \dots a_{2n})) = \psi(\overline{a_1} \dots \overline{a_k} a_{k+1} \dots a_{2n}) = \overline{\overline{a_1}} \dots \overline{\overline{a_k}} a_{k+1} \dots a_{2n} = a_1 \dots a_{2n} = w.$$

b) Nech $x = b_1 \dots b_{2n} \in a^{n+1} \sqcup \overline{a}^{n-1}$ pre $b_1, \dots, b_{2n} \in \Sigma$ a $j \in [2n]$ je najmenší index taký, že

$$|b_1 \dots b_j|_a > |b_1 \dots b_j|_{\overline{a}}.$$

Ide potom aj o najmenší index taký, že

$$|\overline{b_1} \dots \overline{b_j}|_a < |\overline{b_1} \dots \overline{b_j}|_{\overline{a}},$$

takže

$$\varphi(\psi(x)) = \varphi(\psi(b_1 \dots b_{2n})) = \varphi(\overline{b_1} \dots \overline{b_j} b_{j+1} \dots b_{2n}) = \overline{\overline{b_1}} \dots \overline{\overline{b_j}} b_{j+1} \dots b_{2n} = b_1 \dots b_{2n} = x.$$

Vďaka práve dokázanej existencii bijekcie medzi L'_n a $a^{n+1} \sqcup \overline{a}^{n-1}$ teda

$$|L_n| = |U_n \setminus L'_n| = |U_n| - |L'_n| = \binom{2n}{n} - |a^{n+1} \sqcup \overline{a}^{n-1}| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} =$$
$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!} = \frac{(n+1)(2n)! - n(2n)!}{(n+1)!\,n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Tento výsledok pre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je v súlade s pozorovaním $|L_0| = 1$ učineným vyššie; môžeme teda uzavrieť, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$|L_n| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Čísla, ku ktorým sme sa v predchádzajúcom príklade dopracovali, sú v kombinatorike natoľko významné, že si zaslúžili zvláštne pomenovanie.

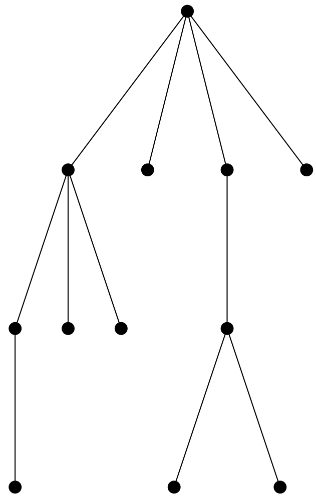
Definícia 1.1.2. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je *n-té Catalanovo číslo* dané ako

$$C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Z uvedeného príkladu vyplýva, že n-té Catalanovo číslo môžeme interpretovať ako počet dobre uzátvorkovaných slov obsahujúcich n ľavých a n pravých zátvoriek jedného typu. V nasledujúcom pridáme ešte dve ďalšie kombinatorické interpretácie Catalanových čísel.

1.2 Usporiadané zakorenené stromy

Príklad 1.2.1. Vyčíslime počet všetkých *usporiadaných zakorenených stromov* o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vrcholoch – čiže zakorenených stromov, v ktorých je pre každý vrchol dané lineárne usporiadanie jeho synov. Príklad takéhoto stromu je na obrázku 1.1.



Obr. 1.1: Usporiadaný zakorenený strom o dvanástich vrcholoch. Od koreňa k listom postupujeme zhora nadol a synovia každého vrcholu sú znázornení v poradí zľava doprava podľa ich usporiadania.

Prehľadajme takýto strom do hĺbky, pričom synov každého vrcholu navštevujme v poradí podľa ich usporiadania – za každú hranu prejdenú smerom nadol si pritom zaznačme ľavú zátvorku a a za každú hranu prejdenú smerom nahor pravú zátvorku $\overline{a}$. Strom o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vrcholoch má presne $n-1$ hrán – výsledkom je tak preň evidentne dobre uzátvorkované slovo $w \in D_1$ dĺžky $2(n-1)$. Napríklad stromu na obrázku 1.1 zodpovedá slovo $aaa\overline{a}\overline{a}a\overline{a}a\overline{a}\overline{a}a\overline{a}aaa\overline{a}a\overline{a}\overline{a}\overline{a}a\overline{a}$.

Ku každému dobre uzátvorkovanému slovu $w \in D_1$ môžeme naopak priradiť usporiadaný zakorenený strom nasledujúcim spôsobom:

(i) Prázdnemu slovu ε priradíme strom o jedinom vrchole.

(ii) Každé iné slovo $w \in D_1$ možno jednoznačne vyjadriť ako $aw_1\overline{a}aw_2\overline{a}\ldots aw_k\overline{a}$, kde $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $w_1, \ldots, w_k \in D_1$. Takémuto slovu priradíme strom, ktorého koreň má k synov a pre $j = 1, \ldots, k$ dostaneme podstrom zakorenený v j-tom synovi ako strom priradený slovu w_j.

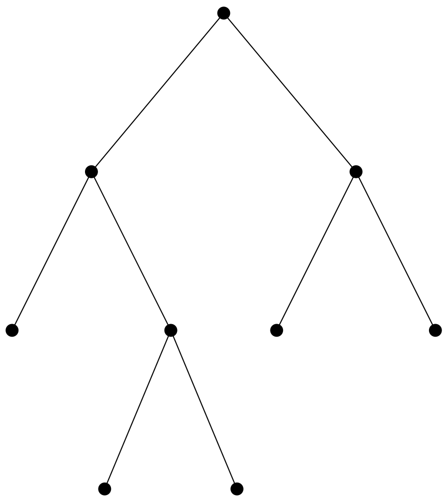
Zjavne sme práve opísali vzájomne inverzné bijekcie medzi množinou všetkých neprázdnych usporiadaných zakorenených stromov a Dyckovým jazykom D_1. Stromu o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vrcholoch pritom zodpovedá slovo dĺžky $2(n-1)$ a naopak. Vďaka príkladu 1.1.1 tak môžeme uzavrieť, že existuje presne

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

usporiadaných zakorenených stromov o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vrcholoch.

1.3 Plné binárne stromy

Príklad 1.3.1. Pod *plným binárnym stromom* rozumieme usporiadaný zakorenený strom, v ktorom má každý vnútorný vrchol práve dvoch synov. Príklad takéhoto stromu je na obrázku 1.2.



Obr. 1.2: Plný binárny strom.

Neprázdny plný binárny strom má vždy pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ presne $2n+1$ vrcholov, spomedzi ktorých je n vnútorných a $n+1$ listov. To ľahko dokážeme indukciou vzhľadom na hĺbku uvažovaného stromu – čiže vzhľadom na najväčšiu vzdialenosť medzi koreňom a niektorým listom. Jediným stromom hĺbky 0 je strom pozostávajúci z jediného listu (ktorý je súčasne koreňom); možno tak vziať $n = 0$. Nech teda tvrdenie platí pre plné binárne stromy hĺbky menšej alebo rovnej k; uvažujme ľubovoľný plný binárny strom hĺbky $k + 1$. Koreň takéhoto stromu musí mať dvoch synov, pričom podstromy zakorenené v týchto synoch sú hĺbky nanajvýš k. Existujú teda $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ také, že podstrom zakorenený v ľavom synovi koreňa má $2n_1 + 1$ vrcholov, spomedzi ktorých je n_1 vnútorných a $n_1 + 1$ listov a podstrom zakorenený v pravom synovi koreňa má $2n_2 + 1$ vrcholov, spomedzi ktorých je n_2 vnútorných a $n_2 + 1$ listov. Celkovo teda strom obsahuje presne

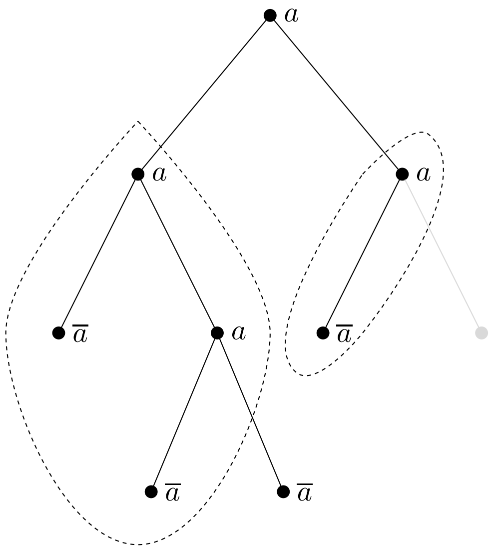
$$(2n_1 + 1) + (2n_2 + 1) + 1 = 2\,(n_1 + n_2 + 1) + 1$$

vrcholov, z ktorých je $n_1 + n_2 + 1$ vnútorných a $(n_1 + 1) + (n_2 + 1) = (n_1 + n_2 + 1) + 1$ listov; možno teda vziať $n = n_1 + n_2 + 1$.

Nájdime teraz počet všetkých neprázdnych plných binárnych stromov o $n \in \mathbb{N}$ vnútorných vrcholoch (resp. o $n + 1$ listoch alebo o $2n + 1$ vrcholoch celkom).

Uvažujme ľubovoľný takýto strom. Každý jeho vnútorný vrchol označme ľavou zátvorkou a a každý list okrem najpravejšieho pravou zátvorkou $\overline{a}$; najpravejší list zo stromu odstráňme. Následne traverzujme výsledný strom v poradí preorder a zapisujme na výstup zátvorky, ktorými sú označené jednotlivé vrcholy. Indukciou ľahko dokážeme, že tak vždy dostaneme dobre uzátvorkované slovo, kde ľavú zátvorku prislúchajúcu k vnútornému vrcholu vždy uzatvára pravá zátvorka v najpravejšom liste jeho ľavého podstromu. Na dôkaz indukciou by sme mohli použiť napríklad rekurzívnu štruktúru stromu naznačenú na obrázku 1.3.

Ku každému dobre uzátvorkovanému slovu dĺžky $2n$ naopak môžeme priradiť plný binárny strom o n vnútorných vrcholoch nasledujúcim spôsobom: prázdnemu slovu ε priradíme strom s jediným listom a slovu $au\overline{a}v$, kde $u, v \in D_1$ sú dobre uzátvorkované slová, priradíme strom, ktorého koreň má dvoch synov, pričom podstrom zakorenený v ľavom synovi je stromom prislúchajúcim k u a podstrom zakorenený v pravom synovi je stromom prislúchajúcim k v.



Obr. 1.3: Každý vnútorný vrchol plného binárneho stromu označíme ľavou zátvorkou a každý list okrem najpravejšieho označíme pravou zátvorkou; najpravejší list odstránime. Ľavá zátvorka v každom vrchole je uzavretá pravou zátvorkou v najpravejšom liste jeho ľavého podstromu.

Opäť nie je ťažké nahliadnuť, že sme práve opísali dve navzájom inverzné bijekcie medzi množinou všetkých neprázdnych plných binárnych stromov o n vnútorných vrcholoch a jazykom všetkých dobre uzátvorkovaných slov dĺžky $2n$. So znalosťou príkladu 1.1.1 tak môžeme uzavrieť, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje presne

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

neprázdnych plných binárnych stromov o n vnútorných vrcholoch.

1.4 Rekurencia a asymptotický odhad pre Catalanove čísla

S pomocou ich interpretácie z príkladu 1.3.1 možno ľahko odvodiť rekurentný vzťah pre Catalanove čísla.

Veta 1.4.1. *Catalanove čísla vyhovujú nasledujúcej rekurencii:* $C_0 = 1$ *a pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$

Dôkaz. Rovnosť $C_0 = 1$ možno overiť priamym výpočtom. Rekurentný vzťah je dôsledkom skutočnosti, že každý neprázdny plný binárny strom s $n+1$ vnútornými vrcholmi pre $n \in \mathbb{N}$ musí pozostávať z koreňa a dvoch neprázdnych plných binárnych podstromov, ktoré majú dohromady n vnútorných vrcholov; ak má teda napríklad ľavý podstrom k vnútorných vrcholov, pravý podstrom ich musí mať $n-k$. □

Hoci sme v uvedených príkladoch zakaždým vyjadrili počet uvažovaných objektov danej veľkosti v uzavretom tvare, nemáme zatiaľ dobrú predstavu o tom, ako rýchlo počet týchto objektov rastie pre $n \to \infty$. Táto informácia pritom býva často cennejšou, než vzorec vyjadrujúci príslušnú kvantitu v uzavretom tvare. Zíde sa nám preto asymptotický odhad pre n-té Catalanovo číslo C_n a $n \to \infty$ – ten môžeme odvodiť napríklad s použitím Stirlingovej aproximácie [5, veta 14.7.7], podľa ktorej pre $n \to \infty$ je

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Veta 1.4.2. *Pre $n \to \infty$ je*

$$C_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Dôkaz. S použitím Stirlingovej aproximácie dostávame

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{1}{n+1}\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}\frac{1}{\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \cdot \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{4^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

□

Naše skúmanie Catalanových čísel týmto nateraz ukončíme – mohli by sme ale pokračovať ďalej, pretože Catalanove čísla sa vynárajú aj vo veľkom množstve ďalších kombinatorických úloh: napríklad Stanleyho kniha [11] uvádza viac ako 200 rôznych kombinatorických interpretácií týchto čísel. Časom by sme ale mali prísť k poznaniu, že (podobne ako napríklad pri Fibonacciho číslach) spočíva význam Catalanových čísel viac ako v nich samotných v tom, že ide o jeden z najjednoduchších príkladov dôležitej triedy postupností – konkrétne postupností s algebraickou vytvárajúcou funkciou.

Kapitola 2

Formálne mocninové rady

2.1 Pojem kombinatorickej triedy

Metóda bijektívnych dôkazov, ktorej použitie sme si v predchádzajúcej kapitole predviedli na niekoľkých príkladoch, bola svojho času považovaná za jediný správny prístup k úlohám enumeratívnej kombinatoriky – naopak vytvárajúce funkcie, na ktorých budú prevažne založené metódy používané v tomto texte, boli dlho zatracované ako nástroj druhej kategórie. Dôvodom bola predovšetkým skutočnosť, že vytvárajúce funkcie boli dlho považované najmä za technickú pomôcku pri riešení rekurencií, ktorej súvis s príslušnými enumeračnými problémami je v zásade náhodný – argumentovalo sa, že na rozdiel od bijektívnych dôkazov použitie vytvárajúcich funkcií neprináša žiaden skutočný vhľad do riešeného problému.

Časom sa ale ukázalo, že presný opak je pravdou. Napriek často pomerne vysokej estetickej hodnote bijektívnych dôkazov sa ukazuje ako prakticky nemožné vybudovať na tejto metóde systematickejšiu teóriu – takmer každý bijektívny dôkaz totiž, zdá sa, vyžaduje vlastnú netriviálnu myšlienku. Naopak súvis vytvárajúcich funkcií s problémami enumeratívnej kombinatoriky v skutočnosti nie je zďaleka náhodný – ako teraz ukážeme, ide o objekty s týmito problémami *fundamentálne späté*. Akonáhle sa nám totiž podarí identifikovať hlavný objekt skúmania enumeratívnej kombinatoriky – takzvané *kombinatorické triedy* – vyplynie potreba uvažovať vytvárajúce funkcie úplne prirodzene.

V typickej úlohe enumeratívnej kombinatoriky býva daná množina objektov, kde každému objektu zodpovedá nejaké prirodzené číslo reprezentujúce jeho veľkosť a pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje konečne veľa objektov veľkosti n. Cieľom je obvykle vyčísliť alebo odhadnúť počet objektov veľkosti n. Prichádzame tak k nasledujúcej definícii základného objektu skúmania enumeratívnej kombinatoriky [3].

Definícia 2.1.1. *Kombinatorická trieda* je dvojica $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|)$, kde $\mathcal{C}$ je množina a $|\cdot|\colon \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ je zobrazenie také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je množina $\mathcal{C}_n := \{x \in \mathcal{C} \mid |x| = n\}$ konečná.

Prvkom množiny $\mathcal{C}$ hovoríme *objekty* a pre každý objekt $x \in \mathcal{C}$ nazývame číslo $|x|$ jeho *veľkosťou*. Množina $\mathcal{C}_n$ tak pozostáva z konečného počtu všetkých objektov veľkosti n.

Definícia 2.1.2. *Enumeračnou postupnosťou* kombinatorickej triedy $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ nazveme nekonečnú postupnosť prirodzených čísel $(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $c_n = |\mathcal{C}_n|$.

Za základný problém enumeratívnej kombinatoriky možno považovať nájdenie čo možno najpresnejšieho opisu enumeračnej postupnosti danej kombinatorickej triedy – môže ísť napríklad o vyjadrenie hodnôt c_n pre všetky $n \in \mathbb{N}$ v uzavretom tvare alebo o asymptotický odhad hodnôt c_n pre $n \to \infty$.

V elementárnej kombinatorike býva predmetom štúdia počet prvkov jednej pevne danej konečnej množiny. S kombinatorickou triedou $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ je naopak daná postupnosť takýchto množín $(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots)$ a skúmame počet prvkov jednotlivých množín $\mathcal{C}_n$ buď pre všetky $n \in \mathbb{N}$, alebo asymptoticky pre $n \to \infty$. Najdôležitejšie konštrukcie elementárnej kombinatoriky – t. j. *disjunktné zjednotenie* (pravidlo súčtu) a *karteziánsky súčin* (pravidlo súčinu) ale môžeme uvažovať aj pre kombinatorické triedy.

Disjunktným zjednotením dvoch nie nutne disjunktných množín S, T nazveme množinu

$$S + T = (S \times \{1\}) \cup (T \times \{2\}).$$

Druhá zložka slúži čisto na odlíšenie prvkov pochádzajúcich z množiny S od prvkov pochádzajúcich z množiny T; čísla $1, 2$ by sme teda mohli nahradiť ľubovoľnou dvojicou rôznych prvkov. Keďže nás väčšinou bude zaujímať iba počet prvkov danej množiny a nie prvky množiny samotné, môžeme písať napríklad aj $S_1 + \ldots + S_n$ pre disjunktné zjednotenie n množín, pričom pod týmto zápisom máme na mysli ľubovoľné z uzátvorkovaní daného výrazu. Aj keď teda operácia $+$ formálne nie je asociatívna, budeme ju za asociatívnu považovať.

Pri disjunktnom zjednotení dvoch kombinatorických tried je navyše každému objektu výslednej triedy ponechaná jeho pôvodná veľkosť.

Definícia 2.1.3. *Disjunktným zjednotením* kombinatorických tried $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_\mathcal{C})$ a $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, |\cdot|_\mathcal{D})$ nazveme kombinatorickú triedu $\mathcal{C}+\mathcal{D} = (\mathcal{C}+\mathcal{D}, |\cdot|)$ takú, že pre všetky $x \in \mathcal{C}$ je $|(x,1)| = |x|_\mathcal{C}$ a pre všetky $y \in \mathcal{D}$ je $|(y,2)| = |y|_\mathcal{D}$.

Tvrdenie 2.1.4. *Nech $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_\mathcal{C})$ a $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, |\cdot|_\mathcal{D})$ sú kombinatorické triedy. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ potom $(\mathcal{C} + \mathcal{D})_n = \mathcal{C}_n + \mathcal{D}_n$.*

Dôkaz. Zrejmé. □

Karteziánsky súčin kombinatorických tried $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ definujeme prirodzeným spôsobom – trieda bude pozostávať zo všetkých dvojíc $(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, pričom veľkosť takejto dvojice bude daná súčtom veľkosti prvku x triedy $\mathcal{C}$ s veľkosťou prvku y triedy $\mathcal{D}$. Napríklad veľkosť dvojice grafov teda môže byť daná celkovým počtom vrcholov v grafoch, ktoré ju tvoria.

Definícia 2.1.5. *Karteziánskym súčinom* kombinatorických tried $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_\mathcal{C})$ a $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, |\cdot|_\mathcal{D})$ nazveme kombinatorickú triedu $\mathcal{C} \times \mathcal{D} = (\mathcal{C} \times \mathcal{D}, |\cdot|)$ takú, že pre všetky $x \in \mathcal{C}$ a $y \in \mathcal{D}$ je $|(x,y)| = |x|_\mathcal{C} + |y|_\mathcal{D}$.

Tvrdenie 2.1.6. *Nech $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_\mathcal{C})$ a $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, |\cdot|_\mathcal{D})$ sú kombinatorické triedy. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je*

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{D})_n = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{C}_k \times \mathcal{D}_{n-k},$$

pričom ide o zjednotenie po dvoch disjunktných množín.

Dôkaz. Nech $x \in \mathcal{C}$ a $y \in \mathcal{D}$. Dvojica (x, y) je potom prvkom $(\mathcal{C} \times \mathcal{D})_n$ práve vtedy, keď $|(x,y)| = n$ – čiže práve vtedy, keď $|x|_\mathcal{C} + |y|_\mathcal{D} = n$. To nastane práve vtedy, keď existuje $k \in \{0, \ldots, n\}$ také, že $|x|_\mathcal{C} = k$ a $|y|_\mathcal{D} = n - k$ – čiže $(x,y) \in \mathcal{C}_k \times \mathcal{D}_{n-k}$. Pre ľubovoľné rôzne $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, n\}$ sú pritom množiny $\mathcal{C}_{k_1} \times \mathcal{D}_{n-k_1}$ a $\mathcal{C}_{k_2} \times \mathcal{D}_{n-k_2}$ očividne disjunktné. □

Môžeme teraz sformulovať výsledok, ktorý je pre kombinatorické triedy obdobou pravidiel súčtu a súčinu z elementárnej kombinatoriky.

Veta 2.1.7. *Nech $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_\mathcal{C})$ a $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, |\cdot|_\mathcal{D})$ sú kombinatorické triedy. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ potom*

$$\left|(\mathcal{C} + \mathcal{D})_n\right| = |\mathcal{C}_n| + |\mathcal{D}_n|$$

a

$$\left|(\mathcal{C} \times \mathcal{D})_n\right| = \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{C}_k| \cdot |\mathcal{D}_{n-k}|.$$

Dôkaz. Tvrdenie pre disjunktné zjednotenie vyplýva z tvrdenia 2.1.4 a pravidla súčtu. Tvrdenie pre karteziánsky súčin je dôsledkom tvrdenia 2.1.6, pravidla súčinu a pravidla súčtu. □

Vráťme sa teraz k hlavnej úlohe enumeratívnej kombinatoriky a skúmajme, akým spôsobom sa operácie disjunktného zjednotenia a karteziánskeho súčinu kombinatorických tried prejavia na úrovni enumeračných postupností. Nech $\mathcal{C}$ je kombinatorická trieda s enumeračnou postupnosťou $(c_0, c_1, c_2, \ldots)$ a $\mathcal{D}$ je kombinatorická trieda s enumeračnou postupnosťou $(d_0, d_1, d_2, \ldots)$. Vďaka vete 2.1.7 je potom enumeračná postupnosť $(s_0, s_1, s_2, \ldots)$ kombinatorickej triedy $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ daná pre všetky $n \in \mathbb{N}$ ako

$$s_n = c_n + d_n, \tag{2.1}$$

kým enumeračná postupnosť $(p_0, p_1, p_2, \ldots)$ kombinatorickej triedy $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ je daná pre všetky $n \in \mathbb{N}$ ako

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}. \tag{2.2}$$

Kým teda enumeračná postupnosť triedy $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ vznikne z enumeračných postupností tried $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ bežným súčtom po zložkách, enumeračná postupnosť triedy $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ nie je bežným súčinom enumeračných postupností tried $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, ale zodpovedá operácii nazývanej *konvolúciou* postupností. Táto situácia nie je zrovna ideálna – vzhľadom na kľúčový význam enumeračných postupností by totiž bolo omnoho vhodnejšie, keby aj prirodzená multiplikatívna operácia na enumeračných postupnostiach zodpovedala multiplikatívnej operácii na kombinatorických triedach, ktorou je karteziánsky súčin.

Riešením je interpretovať enumeračné postupnosti ako *prvky inej algebry* – namiesto s enumeračnými postupnosťami teda budeme pracovať s objektmi nesúcimi rovnakú informáciu a zvolenými tak, aby prirodzená aditívna resp. multiplikatívna operácia na nich zodpovedala vzťahu (2.1) resp. (2.2). Môžeme si pritom všimnúť, že rovnakým spôsobom ako v (2.2) počítame Cauchyho súčin mocninových radov – ponúka sa teda možnosť uvažovať namiesto enumeračných postupností $(c_0, c_1, c_2, \ldots)$ mocninové rady s príslušnými postupnosťami koeficientov; operácie na takýchto radoch by potom zodpovedali operáciám na príslušných kombinatorických triedach. Keďže ale potrebujeme vedieť pracovať s ľubovoľnou kombinatorickou triedou – a tým pádom aj s ľubovoľnou enumeračnou postupnosťou – nesmieme klásť nijaké požiadavky týkajúce sa konvergencie týchto radov, aby sme mohli uvažovať rady s ľubovoľnými postupnosťami koeficientov. Mocninové rady teda nebudeme chápať ako reprezentácie analytických funkcií, ale ako čisto algebraické objekty. Tak prichádzame k pojmu *formálneho mocninového radu*, ktorým budeme – zhruba povedané – rozumieť *formálny zápis*

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

kde $c_n \in \mathbb{C}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a z samé o sebe *a priori* nemá žiaden význam (špeciálne teda nejde o premennú, do ktorej by bolo možné v obvyklom zmysle dosadzovať). Rozdiel medzi mocninovým radom v analytickom zmysle a formálnym mocninovým radom je teda podobný rozdielu medzi polynómom a polynomickou funkciou. Po zvyšok tejto kapitoly budeme budovať exaktnú teóriu formálnych mocninových radov.

Pre ľubovoľnú postupnosť komplexných čísel $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ nazveme *obyčajnou vytvárajúcou funkciou* tejto postupnosti formálny mocninový rad

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n;$$

ak je pritom $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ enumeračnou postupnosťou kombinatorickej triedy $\mathcal{C}$, budeme v súvislosti s $C(z)$ hovoriť aj o obyčajnej vytvárajúcej funkcii triedy $\mathcal{C}$. Obyčajné vytvárajúce funkcie kombinatorických tried sú pritom vždy formálnymi mocninovými radmi s prirodzenými koeficientmi; napriek tomu je však výhodné chápať ich ako špeciálne rady s komplexnými koeficientmi – nielen kvôli bohatšej algebraickej štruktúre radov s komplexnými koeficientmi, ale napríklad aj kvôli neskoršiemu prechodu do matematickej analýzy.

Neskôr sa budeme zaoberať takzvanou *symbolickou metódou*, vďaka ktorej budeme pre množstvo kombinatorických tried schopní mechanicky prejsť od špecifikácie k vyjadreniu vytvárajúcej funkcie pomocou určitých „základných“ funkcií a štandardných operácií na nich. Takáto znalosť vytvárajúcej funkcie nám typicky umožní algoritmicky počítať jej koeficienty – čiže prvky enumeračnej postupnosti uvažovanej kombinatorickej triedy – ktoré v niektorých prípadoch budeme vedieť vyjadriť aj v uzavretom tvare. Často navyše vo výsledku získame vytvárajúcu funkciu, ktorá je formálnou obdobou Maclaurinovho radu funkcie analytickej v bode 0 – chápaná analyticky teda má nenulový polomer konvergencie. Pre významnú triedu takýchto vytvárajúcich funkcií bude možné metódami *analytickej kombinatoriky* mechanicky získať veľmi presný asymptotický odhad pre ich koeficienty.

Pre veľké množstvo kombinatorických tried tak bude získanie asymptotického odhadu pre prvky ich enumeračnej postupnosti iba otázkou dvoch mechanických krokov – od špecifikácie kombinatorickej triedy k vytvárajúcej funkcii a od vytvárajúcej funkcie k asymptotickému odhadu. Kým prvý z týchto dvoch krokov je svojou podstatou algebraický, druhý z nich je založený na metódach komplexnej analýzy.

2.2 Formálne mocninové rady a elementárne operácie na nich

Začneme teraz s budovaním teórie *formálnych mocninových radov* – detailné spracovanie tejto problematiky možno nájsť napríklad v [9, 7] a jej o niečo stručnejší výklad je podaný aj vo výbornej knihe [1]. Obmedzíme sa pritom na rady *s komplexnými koeficientmi*, ktoré z vyššie opísaných príčin nachádzajú uplatnenie v enumeratívnej kombinatorike. Zmysluplnými objektmi sú ale napríklad aj formálne mocninové rady s koeficientmi z polokruhu alebo okruhu, prípadne zo všeobecného poľa; základy teórie takýchto radov možno nájsť napríklad v [6].

Ako už bolo spomenuté, *formálny mocninový rad* R o jednej premennej z s komplexnými koeficientmi možno chápať ako *formálny súčet*

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{2.3}$$

kde $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť komplexných čísel – *koeficientov* radu. Uvedený súčet nazývame *formálnym* preto, lebo v skutočnosti sa ho nikdy nesnažíme vypočítať – nezaujímajú nás teda ani žiadne otázky okolo konvergencie radu. Formálny mocninový rad tak nenadobúda žiadne hodnoty, nereprezentuje žiadnu funkciu – je iba formálnym zápisom výrazu na pravej strane (2.3), čo H. Wilf [13] vyjadril konštatovaním, že formálny mocninový rad je iba „vešiakom na koeficienty“. Tento pohľad sa odráža aj v nasledujúcej *definícii* formálneho mocninového radu, v ktorej ho dokonca s jeho postupnosťou koeficientov *stotožníme*. Formálny mocninový rad je teda v skutočnosti iba postupnosťou koeficientov zapisovanou a interpretovanou trochu neobvyklým spôsobom.

Definícia 2.2.1. *Formálny mocninový rad* o jednej premennej z s komplexnými koeficientmi je postupnosť $R = (a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{C}$. Namiesto $R = (a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ píšeme

$$R = R(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

a prvky postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nazývame *koeficientmi* radu R. Koeficient a_n pri z^n označujeme pre všetky $n \in \mathbb{N}$ aj ako

$$[z^n]R(z) := a_n$$

a koeficient a_0 nazývame *konštantným*. Množinu všetkých formálnych mocninových radov o jednej premennej z s komplexnými koeficientmi označujeme $\mathbb{C}[[z]]$; pre ľubovoľnú množinu $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{C}$ ďalej označujeme ako $\mathbb{S}[[z]]$ množinu všetkých $R(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ takých, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $[z^n]R(z) \in \mathbb{S}$.

Tento neobvyklý pohľad na postupnosti je, samozrejme, zmysluplný iba vo svetle nasledujúcej definície dvoch základných *operácií* na formálnych mocninových radoch – to, či pracujeme s postupnosťou alebo s formálnym mocninovým radom teda nie je ani tak otázkou týchto objektov samotných, ako skôr *algebry*, ktorú na nich uvažujeme.

Definícia 2.2.2. Nech $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ sú formálne mocninové rady z $\mathbb{C}[\![z]\!]$. *Súčtom* radov $R(z)$ a $S(z)$ nazývame formálny mocninový rad $(R+S)(z) = R(z) + S(z)$ taký, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$[z^n](R+S)(z) = [z^n]R(z) + [z^n]S(z) = a_n + b_n.$$

Cauchyho súčinom radov $R(z)$ a $S(z)$ nazývame formálny mocninový rad $(R \cdot S)(z) = R(z) \cdot S(z)$ taký, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$[z^n](R \cdot S)(z) = \sum_{k=0}^{n} \left([z^k]R(z)\right)\left([z^{n-k}]S(z)\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Komplexné číslo $a \in \mathbb{C}$ typicky stotožňujeme s formálnym mocninovým radom $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ takým, že $[z^0]R(z) = a$ a $[z^n]R(z) = 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pre ľubovoľný rad $S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ zodpovedá Cauchyho súčin $aS(z)$ prenásobeniu radu $S(z)$ skalárom a; rady 0 resp. 1 sú navyše evidentne neutrálne vzhľadom na sčítanie resp. násobenie radov.

Podobnou konštrukciou priradíme význam aj samotnej „premennej" z, ktorú budeme stotožňovať s formálnym mocninovým radom $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ takým, že $[z^1]R(z) = 1$ a pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je $[z^n]R(z) = 0$.

Umocňovanie formálnych mocninových radov definujeme vzhľadom na multiplikatívnu operáciu Cauchyho súčinu štandardným spôsobom – pre ľubovoľný formálny mocninový rad $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je teda $R^0(z) = 1$ a $R^{n+1}(z) = R^n(z)R(z)$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Ľahko teraz vidieť, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ je $R(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + \ldots + a_n z^n$ rad taký, že pre $k = 0, \ldots, n$ je $[z^k]R(z) = a_k$ a pre všetky prirodzené $k > n$ je $[z^k]R(z) = 0$. Rady takéhoto typu nazývame *polynómami* a množinu všetkých polynómov v $\mathbb{C}[\![z]\!]$ označujeme $\mathbb{C}[z]$.

Definícia 2.2.3. Nech $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ je formálny mocninový rad z $\mathbb{C}[\![z]\!]$. Ako $-R(z)$ potom označujeme formálny mocninový rad

$$-R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n) z^n.$$

Pre ľubovoľný rad $S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ potom namiesto $S(z) + (-R(z))$ píšeme len $S(z) - R(z)$. Ľahko tiež vidieť, že pre všetky $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je rad $-R(z)$ aditívnym inverzným prvkom k radu $R(z)$ – čiže $R(z) - R(z) = -R(z) + R(z) = 0$ – a rad $-R(z)$ možno vyjadriť aj ako $-R(z) = (-1)R(z)$.

Keďže sú navyše obidve operácie $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{C}[\![z]\!]$ evidentne asociatívne a komutatívne a ľahko pre všetky rady $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ a $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ overíme aj platnosť distributívnych zákonov

$$\begin{aligned}
A(z)(B(z)+C(z)) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(b_{n-k}+c_{n-k})\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}\right) z^n = \\
&= A(z)B(z) + A(z)C(z), \\
(A(z)+B(z))C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)c_{n-k}\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}\right) z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}\right) z^n = \\
&= A(z)C(z) + B(z)C(z),
\end{aligned}$$

zisťujeme, že množina $\mathbb{C}[\![z]\!]$ tvorí spolu s operáciami $+$ a $\cdot$ *komutatívny okruh* (s jednotkou).

Dokážeme teraz, že algebra $(\mathbb{C}[\![z]\!], +, \cdot, 0, 1)$ je dokonca aj *oborom integrity* – čiže netriviálnym komutatívnym okruhom s jednotkou bez netriviálnych deliteľov nuly. Posledná z menovaných podmienok znamená, že pre všetky dvojice *nenulových* radov $R(z), S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je aj $R(z)S(z) \neq 0$. Skutočnosť, že $\mathbb{C}[\![z]\!]$ tvorí obor integrity, pre nás bude dôležitá najmä preto, že práve vďaka tejto vlastnosti okruhu $\mathbb{C}[\![z]\!]$ v ňom bude možné *krátiť nenulovými radmi*: ak totiž $A(z), B(z), C(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ sú rady také, že $A(z)C(z) = B(z)C(z)$ a $C(z) \neq 0$, nutne $(A(z) - B(z))C(z)$, z čoho vďaka nenulovosti radu $C(z)$ a neexistencii netriviálnych deliteľov nuly dostávame $A(z) - B(z) = 0$ – čiže $A(z) = B(z)$.

Tvrdenie 2.2.4. *Okruh* $(\mathbb{C}[\![z]\!], +, \cdot, 0, 1)$ *je oborom integrity.*

Dôkaz. Vieme už, že ide o komutatívny okruh, ktorý je evidentne netriviálny. Uvažujme teda ľubovoľné $R(z), S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!] \setminus \{0\}$. Nech $m \in \mathbb{N}$ je *najmenšie* prirodzené číslo také, že $[z^m]R(z) \neq 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je *najmenšie* prirodzené číslo také, že $[z^n]S(z) \neq 0$. Potom

$$[z^{m+n}](R \cdot S)(z) = \sum_{k=0}^{m+n} \left([z^k]R(z)\right) \left([z^{m+n-k}]S(z)\right) = ([z^m]R(z))\,([z^n]S(z)) \neq 0,$$

takže nutne $(R \cdot S)(z) = R(z)S(z) \neq 0$. □

Oborom integrity je v dôsledku práve dokázaného tvrdenia aj okruh polynómov $(\mathbb{C}[z], +, \cdot, 0, 1)$.

Poznámka 2.2.5. Všetky operácie na formálnych mocninových radoch sme doposiaľ definovali na základe analógie s mocninovými radmi, ktoré v komplexnej analýze slúžia na reprezentáciu funkcií analytických v bode 0. Vieme navyše, že súčet a súčin dvoch analytických funkcií je opäť analytickou funkciou. Množina $\mathbf{H}_0$ všetkých funkcií analytických v bode 0 teda (modulo izomorfizmus) tvorí podokruh $(\mathbf{H}_0, +, \cdot, 0, 1)$ okruhu $(\mathbb{C}[\![z]\!], +, \cdot, 0, 1)$ a vďaka tvrdeniu 2.2.4 je takisto oborom integrity.

Toto pozorovanie je dôležité z nasledujúceho dôvodu: ak začneme s formálnymi mocninovými radmi, ktoré konvergujú na neprázdnom okolí bodu 0 a zodpovedajú tak nejakej analytickej funkcii, je použitie operácií na $\mathbb{C}[\![z]\!]$ definovaných v tomto oddiele na tieto rady ekvivalentné použitiu príslušných operácií na analytických funkciách. Aj výsledok týchto operácií teda môžeme interpretovať ako analytickú funkciu.

2.3 Delenie formálnych mocninových radov

Zaoberajme sa teraz existenciou *multiplikatívnych inverzných prvkov* k formálnym mocninovým radom z oboru integrity $\mathbb{C}[\![z]\!]$.

Definícia 2.3.1. Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad. *Multiplikatívnym inverzným prvkom* radu $R(z)$ nazveme, ak existuje, rad $R^{-1}(z) = R(z)^{-1}$ taký, že $R^{-1}(z) \cdot R(z) = R(z) \cdot R^{-1}(z) = 1$.

Ak multiplikatívny inverzný prvok k formálnemu mocninovému radu $R(z)$ existuje, píšeme preň namiesto $R^{-1}(z)$ aj $(1/R)(z) = 1/R(z)$. Je ale zrejmé, že multiplikatívny inverzný prvok nemusí existovať pre všetky rady $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ – napríklad pre multiplikatívny inverzný prvok $S(z)$ radu z by muselo byť $S(z)z = 1$ a v dôsledku toho aj $[z^0](S(z)z) = 1$, kým na druhej strane

$$[z^0](S(z)z) = \left([z^0]S(z)\right)\left([z^0]z\right) = \left([z^0]S(z)\right)0 = 0;$$

multiplikatívny inverzný prvok k radu z teda neexistuje.

Dokážeme teraz kritérium existencie multiplikatívneho inverzného prvku, podľa ktorého rad $R^{-1}(z)$ existuje práve vtedy, keď má rad $R(z)$ nenulový konštantný koeficient.

Tvrdenie 2.3.2. *Nech* $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *je formálny mocninový rad z* $\mathbb{C}[\![z]\!]$. *Rad* $R^{-1}(z)$ *potom existuje práve vtedy, keď* $a_0 \neq 0$.

Dôkaz. Uvažujme najprv prípad, keď $a_0 = 0$ a za účelom sporu predpokladajme existenciu radu $R^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Keďže $R(z)R^{-1}(z) = 1$, z definície Cauchyho súčinu dostávame

$$1 = [z^0]\left(R(z)R^{-1}(z)\right) = \sum_{k=0}^{0} a_k b_{0-k} = a_0 b_0 = 0 b_0 = 0,$$

čo je spor.

Nech teraz $a_0 \neq 0$. Položme

$$b_0 = \frac{1}{a_0} \tag{2.4}$$

a

$$b_{n+1} = -\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n+1} b_0}{a_0}. \tag{2.5}$$

pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme rad $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Preň je

$$[z^0]\,(R(z)S(z)) = a_0 b_0 = \frac{a_0}{a_0} = 1$$

a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dostávame

$$\begin{aligned}[z^{n+1}]\,(R(z)S(z)) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k} = a_0 b_{n+1} + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n+1} b_0) = \\ &= -a_0 \cdot \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n+1} b_0}{a_0} + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n+1} b_0) = 0.\end{aligned}$$

Preto $R(z)S(z) = 1$ a rad $S(z)$ je multiplikatívnym inverzným prvkom radu $R(z)$. □

Poznámka 2.3.3. Aj práve dokázané tvrdenie je v zmysle poznámky 2.2.5 konzistentné s vlastnosťami analytických funkcií: pre funkciu f analytickú v bode 0 existuje funkcia $1/f$ analytická v bode 0 práve vtedy, keď $f(0) \neq 0$ – čo je to isté ako nenulovosť konštantného koeficientu Maclaurinovho rozvoja funkcie f. Keďže v takom prípade navyše musí byť Maclaurinov rad funkcie 1 daný Cauchyho súčinom Maclaurinových radov funkcií f a $1/f$, musia byť koeficienty Maclaurinovho radu funkcie $1/f$ dané vzťahmi (2.4) a (2.5) z dôkazu tvrdenia 2.3.2.

Je zrejmé, že pre rad $R(z)$ s nenulovým konštantným koeficientom a všetky $k \in \mathbb{N}$ musí byť $(R^{-1})^k(z) = (R^k)^{-1}(z)$. Tento rad označujeme $R^{-k}(z)$.

Príklad 2.3.4. Je jednoduchou úlohou overiť platnosť nasledujúcich rovností v okruhu formálnych mocninových radov $\mathbb{C}[\![z]\!]$ pre všetky $a \in \mathbb{C}$ a $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \\ \frac{1}{1-az} &= 1 + az + a^2 z^2 + a^3 z^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n, \\ \frac{1}{b-az} &= \frac{1}{b} + \frac{a}{b^2} z + \frac{a^2}{b^3} z^2 + \frac{a^3}{b^4} z^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{b^{n+1}} z^n.\end{aligned}$$

Poznámka 2.3.3 vysvetľuje, že podobnosť so vzorcami pre Maclaurinove rady známymi z komplexnej analýzy nie je nijak náhodná.

Vďaka tvrdeniu 2.3.2 je tak pre ľubovoľnú dvojicu radov $R(z), S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, kde $[z^0]S(z) \neq 0$, dobre definovaný podiel $(R/S)(z) = R(z)/S(z) = R(z)S^{-1}(z)$. Podiel radov $R(z)/S(z)$ je ale často potrebné uvažovať aj v prípade, že $[z^0]S(z) = 0$: je napríklad prirodzené položiť

$$\frac{z + z^3 + z^5 + \ldots}{z} = 1 + z^2 + z^4 + \ldots$$

alebo

$$\frac{z^3 - z^5}{z + z^2} = z^2 - z^3.$$

Prichádzame tak k nasledujúcej definícii.

Definícia 2.3.5. Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ a $S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!] \setminus \{0\}$ sú formálne mocninové rady. *Podielom* radov $R(z)$ a $S(z)$ nazveme, ak existuje, rad $(R/S)(z) = R(z)/S(z)$ taký, že $R(z) = (R/S)(z)S(z)$.

Keďže je $\mathbb{C}[\![z]\!]$ oborom integrity, vyplýva z rovností $R(z) = Q_1(z)S(z) = Q_2(z)S(z)$, po vykrátení druhej z nich nenulovým radom $S(z)$, rovnosť $Q_1(z) = Q_2(z)$; existujúce podiely formálnych mocninových radov sú tak dané jednoznačne. Ak teda špeciálne $[z^0]S(z) \neq 0$, je podiel $R(z)/S(z)$ daný jednoznačne ako $R(z)/S(z) = R(z)S^{-1}(z)$.

Kritérium existencie podielu daných dvoch formálnych mocninových radov, ktoré je zovšeobecnením tvrdenia 2.3.2, využíva pojem *kostupňa* nenulového formálneho mocninového radu – ten teraz definujeme a hneď vzápätí sformulujeme spomínané kritérium.

Definícia 2.3.6. *Kostupňom* formálneho mocninového radu $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!] \setminus \{0\}$ nazveme prirodzené číslo

$$\operatorname{codeg} R(z) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid [z^n]R(z) \neq 0\}.$$

Tvrdenie 2.3.7. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ a $S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!] \setminus \{0\}$ sú formálne mocninové rady. Rad $R(z)/S(z)$ potom existuje práve vtedy, keď $R(z) = 0$, alebo $R(z) \neq 0$ a zároveň $\operatorname{codeg} S(z) \leq \operatorname{codeg} R(z)$.*

Dôkaz. Ak $R(z) = 0$, je zrejme $R(z)/S(z) = 0$. Predpokladajme teda, že $R(z) \neq 0$ – a uvažujme najprv prípad, keď $s = \operatorname{codeg} S(z) \leq \operatorname{codeg} R(z) = r$. Pre nejakú dvojicu radov $\hat{R}(z), \hat{S}(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ takých, že $\operatorname{codeg} \hat{R}(z) = \operatorname{codeg} \hat{S}(z) = 0$ potom

$$R(z) = z^r \hat{R}(z) \qquad \text{a} \qquad S(z) = z^s \hat{S}(z).$$

Okrem iného teda $[z^0]\hat{S}(z) \neq 0$, z čoho vyplýva existencia radov $\hat{S}^{-1}(z)$ a $\hat{R}(z)/\hat{S}(z) = \hat{R}(z)\hat{S}^{-1}(z)$. Podiel radov $R(z)$ a $S(z)$ je potom daný ako

$$\frac{R(z)}{S(z)} = z^{r-s}\frac{\hat{R}(z)}{\hat{S}(z)},$$

pretože

$$\left(z^{r-s}\frac{\hat{R}(z)}{\hat{S}(z)}\right) S(z) = z^{r-s}\frac{\hat{R}(z)}{\hat{S}(z)} z^s \hat{S}(z) = z^r \frac{\hat{R}(z)}{\hat{S}(z)}\hat{S}(z) = z^r \hat{R}(z) = R(z).$$

Uvažujme zostávajúci prípad, keď $s = \operatorname{codeg} S(z) > \operatorname{codeg} R(z) = r$; špeciálne teda $[z^r]R(z) \neq 0$. Za účelom sporu predpokladajme existenciu podielu $R(z)/S(z)$. Potom ale

$$R(z) = \frac{R(z)}{S(z)} S(z),$$

z čoho

$$[z^r]R(z) = [z^r]\left(\frac{R(z)}{S(z)}S(z)\right) = \sum_{k=0}^{r}\left([z^k]\frac{R(z)}{S(z)}\right)\left([z^{r-k}]S(z)\right) = \sum_{k=0}^{r}\left([z^k]\frac{R(z)}{S(z)}\right) 0 = 0,$$

pretože $\operatorname{codeg} S(z) > r$. To v spore s naším skorším pozorovaním, podľa ktorého je $[z^r]R(z) \neq 0$. □

Poznámka 2.3.8. Podobne ako predchádzajúce tvrdenia, je aj tvrdenie 2.3.7 konzistentné s vlastnosťami analytických funkcií. Kostupeň Maclaurinovho radu inej ako konštantne nulovej funkcie f analytickej v bode 0 je totiž práve rádom koreňa funkcie f v bode 0. Ak sú pritom f, g analytické funkcie v bode 0, ktoré majú v nule koreň rádu r resp. s, možno tieto funkcie na nejakom okolí bodu 0 vyjadriť ako

$$f(z) = z^r \hat{f}(z) \qquad \text{a} \qquad g(z) = z^s \hat{g}(z),$$

kde $\hat{f}, \hat{g}$ sú funkcie analytické a nenulové v bode 0. Analytická a nenulová v bode 0 tak musí byť aj funkcia $\hat{f}/\hat{g}$, ktorú preto možno rozvinúť do Maclaurinovho radu s nenulovým konštantným koeficientom. Laurentov rozvoj funkcie f/g v bode 0 je potom daný prenásobením tohto Maclaurinovho rozvoja faktorom z^{r-s} – ľahko teda vidieť, že funkcia f/g je analytická v bode 0 práve vtedy, keď $s \leq r$.

2.4 Formálna derivácia

Zavedieme teraz ďalšiu dôležitú operáciu na formálnych mocninových radoch – takzvanú *formálnu deriváciu*. Jej definícia je inšpirovaná skutočnosťou, že Maclaurinove rady funkcií analytických v bode 0 derivujeme člen po člene.

Definícia 2.4.1. Nech $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ je formálny mocninový rad z $\mathbb{C}[\![z]\!]$. *Formálnou deriváciou* radu $R(z)$ nazveme formálny mocninový rad

$$R'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Bežným induktívnym spôsobom definujeme aj formálne derivácie radu $R(z)$ vyšších rádov: kladieme

$$R^{(0)}(z) = \frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0} R(z) := R(z)$$

a

$$R^{(k+1)}(z) = \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}z^{k+1}} R(z) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} R(z) \right).$$

Pripomeňme si, že *k-ty klesajúci faktoriál* komplexného čísla $z \in \mathbb{C}$ je pre $k \in \mathbb{N}$ definovaný ako

$$z^{\underline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (z - j).$$

Ľahko teraz odvodíme nasledujúci vzorec pre koeficienty formálnych derivácií vyšších rádov.

Tvrdenie 2.4.2. *Nech $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ je formálny mocninový rad z $\mathbb{C}[\![z]\!]$ a $k \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ potom*

$$[z^n] R^{(k)}(z) = (n+k)^{\underline{k}} [z^{n+k}] R(z).$$

Dôkaz. Pre $k = 0$ je tvrdenie triviálne. Ak ďalej $[z^n] R^{(k)}(z) = (n+k)^{\underline{k}} [z^{n+k}] R(z)$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, pre $(k+1)$-tu deriváciu radu $R(z)$ dostávame

$$\begin{aligned}[z^n] R^{(k+1)}(z) &= [z^n] \left(R^{(k)} \right)' (z) = (n+1) [z^{n+1}] R^{(k)}[z] = (n+1)(n+k+1)^{\underline{k}} [z^{n+k+1}] R(z) = \\ &= (n+k+1)^{\underline{k+1}} [z^{n+k+1}] R(z).\end{aligned}$$

□

Tvrdenie 2.4.3. *Pre všetky $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ a $k, \ell \in \mathbb{N}$ je $\left(R^{(k)}\right)^{(\ell)}(z) = R^{(k+\ell)}(z)$.*

Dôkaz. Nech je $k \in \mathbb{N}$ pevné a dokazujme indukciou vzhľadom na ℓ. Pre $\ell = 0$ je z definície

$$\left(R^{(k)}\right)^{(0)}(z) = R^{(k)}(z).$$

Nech teraz pre $\ell = s$ je

$$\left(R^{(k)}\right)^{(s)}(z) = R^{(k+s)}(z)$$

a uvažujme $\ell = s+1$; z definície $(s+1)$-tej derivácie, indukčného predpokladu a definície $(k+s+1)$-tej derivácie postupne dostávame

$$\left(R^{(k)}\right)^{(s+1)}(z) = \left((R^{(k)})^{(s)}\right)'(z) = \left(R^{(k+s)}\right)'(z) = R^{(k+s+1)}(z). \qquad \square$$

Nasledujúce jednoduché pozorovanie možno chápať ako formálnu obdobu vety o Maclaurinových radoch.

Veta 2.4.4. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$. Potom*

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[z^0]R^{(n)}(z)}{n!} z^n.$$

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na n dokážeme naraz pre všetky $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ rovnosť

$$[z^n]R(z) = \frac{[z^0]R^{(n)}(z)}{n!}.$$

Pre $n = 0$ a každé $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je evidentne

$$[z^0]R(z) = \frac{[z^0]R^{(0)}(z)}{0!};$$

ak teraz predpokladáme platnosť tvrdenia pre $n = k$ a všetky $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, pre $n = k+1$ a ľubovoľné $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ s využitím tvrdenia 2.4.3 a indukčného predpokladu dostávame

$$\frac{[z^0]R^{(k+1)}(z)}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{[z^0](R')^{(k)}(z)}{k!} = \frac{1}{k+1}[z^k]R'(z) = [z^{k+1}]R(z). \qquad \square$$

Dokážeme teraz vetu o formálnej derivácii súčtu, rozdielu, konštantného násobku, Cauchyho súčinu, kladnej prirodzenej mocniny a multiplikatívneho inverzného prvku formálnych mocninových radov – vo všetkých prípadoch pôjde opäť o obdobu dobre známych vzorcov z matematickej analýzy.

Veta 2.4.5. *Nech $R(z), S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, $a \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Potom:*

a) $(R \pm S)'(z) = R'(z) \pm S'(z)$;

b) $(aR)'(z) = aR'(z)$;

c) $(R \cdot S)'(z) = R(z)S'(z) + R'(z)S(z)$;

d) $\left(R^k\right)'(z) = kR^{k-1}(z)R'(z)$;

e) ak navyše $[z^0]R(z) \neq 0$, *tak* $\left(R^{-1}\right)'(z) = -R'(z)/R^2(z)$.

Dôkaz. Predpokladajme, že pre nejaké postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexných čísel je

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{a} \qquad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Vzorec pre formálnu deriváciu súčtu a rozdielu potom vyplýva z rovnosti

$$\begin{aligned}[z^n](R \pm S)'(z) &= (n+1)(a_{n+1} \pm b_{n+1}) = (n+1)a_{n+1} \pm (n+1)b_{n+1} = [z^n]R'(z) \pm [z^n]S'(z) = \\ &= [z^n]\left(R' + S'\right)(z)\end{aligned}$$

platnej pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Podobne v prípade skalárneho násobku pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dostávame

$$[z^n](aR)'(z) = (n+1)aa_{n+1} = a\left((n+1)a_{n+1}\right) = a[z^n]R'(z) = [z^n](aR')(z).$$

Pre Cauchyho súčin je, opäť pre všetky $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}[z^n](R \cdot S)'(z) &= (n+1)\sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1}(n+1)a_k b_{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1}(k + (n+1-k))a_k b_{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} k a_k b_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)a_k b_{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (k a_k)\, b_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k \left((n+1-k)b_{n+1-k}\right) = \\ &= \sum_{s=0}^{n} \left((s+1)a_{s+1}\right) b_{n-s} + \sum_{k=0}^{n} a_k \left((n+1-k)b_{n+1-k}\right) = \\ &= [z^n]\left(R' \cdot S\right)(z) + [z^n]\left(R \cdot S'\right)(z) = [z^n]\left(R' \cdot S + R \cdot S'\right)(z).\end{aligned}$$

Vzorec pre deriváciu kladnej prirodzenej mocniny je záležitosťou indukcie vzhľadom na $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: pre $k = 1$ je

$$R'(z) = 1R^0(z)R'(z);$$

ak tvrdenie platí pre $k = s$, pre $k = s+1$ dostávame

$$\begin{aligned}\left(R^{s+1}\right)'(z) &= (R \cdot R^s)'(z) = R(z)\left(R^s\right)'(z) + R'(z)R^s(z) = sR(z)R^{s-1}(z)R'(z) + R'(z)R^s(z) = \\ &= (s+1)R^s(z)R'(z).\end{aligned}$$

V prípade $[z^0]R(z) \neq 0$ napokon zo vzorca pre deriváciu Cauchyho súčinu $(R \cdot R^{-1})(z)$ dostávame

$$R(z)\left(R^{-1}\right)'(z) + R'(z)R^{-1}(z) = 0,$$

z čoho úpravou dostávame dokazovanú rovnosť

$$\left(R^{-1}\right)'(z) = -\frac{R'(z)}{R^2(z)}. \qquad \square$$

Príklad 2.4.6. Pre všetky $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je vďaka vete 2.4.5

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{(1-z)^k} = k \cdot \frac{1}{(1-z)^{k-1}} \cdot \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{k}{(1-z)^{k+1}}.$$

Indukciou by sme teda ľahko dokázali, že pre všetky $\ell \in \mathbb{N}$ je

$$\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}z^\ell}\frac{1}{1-z} = \frac{\ell!}{(1-z)^{\ell+1}}.$$

Pre všetky $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tak

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\frac{1}{1-z},$$

z čoho podľa tvrdenia 2.4.2 pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dostávame

$$[z^n]\frac{1}{(1-z)^k} = \frac{(n+k-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

To znamená, že pre všetky $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}z^n.$$

Príklad 2.4.7. Podobne pre všetky $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je vďaka vete 2.4.5

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-az/b} = \frac{a}{b(1-az/b)^2}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{(b-az)^k} = \frac{1}{b^k} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{(1-az/b)^k} = \frac{1}{b^k} \cdot k \cdot \frac{1}{(1-az/b)^{k-1}} \cdot \frac{a}{b(1-az/b)^2} = \frac{ak}{b^{k+1}(1-az/b)^{k+1}} =$$
$$= \frac{ak}{(b-az)^{k+1}}.$$

Indukciou by sme teda ľahko dokázali, že pre všetky $\ell \in \mathbb{N}$ je

$$\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}z^\ell}\frac{1}{b-az} = \frac{a^\ell \ell!}{(b-az)^{\ell+1}},$$

z čoho pre všetky $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dostávame

$$\frac{1}{(b-az)^k} = \frac{1}{a^{k-1}(k-1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\frac{1}{b-az}.$$

Podľa tvrdenia 2.4.2 a príkladu 2.3.4 tak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ musí byť

$$[z^n]\frac{1}{(b-az)^k} = \frac{(n+k-1)^{\underline{k-1}}\,a^{n+k-1}}{a^{k-1}(k-1)!b^{n+k}} = \binom{n+k-1}{k-1}\frac{a^n}{b^{n+k}}.$$

Pre všetky $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ teda

$$\frac{1}{(b-az)^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\frac{a^n}{b^{n+k}}z^n.$$

2.5 Obyčajné vytvárajúce funkcie

Pripomeňme si, že *obyčajnou vytvárajúcou funkciou* postupnosti komplexných čísel

$$(c_0, c_1, c_2, \ldots) = (c_n)_{n=0}^{\infty}$$

rozumieme formálny mocninový rad

$$C(z) = c_0 z^0 + c_1 z^1 + c_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Tento rad bol pritom definovaný práve ako postupnosť koeficientov $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ – na formálnej úrovni teda *neexistuje žiaden rozdiel medzi postupnosťou a jej obyčajnou vytvárajúcou funkciou*; prechod od postupnosti k vytvárajúcej funkcii predstavuje iba zmenu uhlu pohľadu a uvažovanej algebry.

Každú operáciu na obyčajných vytvárajúcich funkciách možno interpretovať aj ako operáciu na príslušných postupnostiach koeficientov a naopak – zmysel vytvárajúcich funkcií pritom spočíva najmä v tom, že operácie s najväčším kombinatorickým významom majú prirodzenejšie vyjadrenie práve v ich jazyku. Tabuľka 2.1 uvádza niekoľko operácií na formálnych mocninových radoch zavedených v predchádzajúcich oddieloch spolu s príslušnými operáciami na ich postupnostiach koeficientov. Neskôr k týmto operáciám pridáme aj ďalšie.

Obyčajná vytvárajúca funkcia	**Postupnosť koeficientov**
$A(z)$	$(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_n)_{n=0}^{\infty}$
$B(z)$	$(b_0, b_1, b_2, \ldots) = (b_n)_{n=0}^{\infty}$
$c \cdot A(z)$ pre $c \in \mathbb{C}$	$(ca_n)_{n=0}^{\infty}$
$A(z) \pm B(z)$	$(a_n \pm b_n)_{n=0}^{\infty}$
$A(z) \cdot B(z)$	$(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})_{n=0}^{\infty}$
$\frac{A(z)-a_0}{z}$	$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$
$z \cdot A(z)$	$(0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$
$\frac{A(z)-a_0 z^0 - a_1 z^1 - \ldots - a_{j-1} z^{j-1}}{z^j}$ pre $j \in \mathbb{N}$	$(a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots)$
$z^j \cdot A(z)$ pre $j \in \mathbb{N}$	$(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{j}, a_0, a_1, a_2, \ldots)$
$A'(z)$	$((n+1)a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$
$A^{(k)}(z)$ pre $k \in \mathbb{N}$	$\left((n+k)^{\underline{k}} a_{n+k}\right)_{n=0}^{\infty}$
$\vdots$	$\vdots$

Tabuľka 2.1: Niektoré operácie na obyčajných vytvárajúcich funkciách s príslušnými operáciami na postupnostiach koeficientov.

Tabuľka 2.2 ďalej podáva zhrnutie nám už známych významných konkrétnych obyčajných vytvárajúcich funkcií spoločne s ich postupnosťami koeficientov. Opäť ide o neúplný výpočet, ktorý neskôr doplníme o ďalšie dôležité vytvárajúce funkcie.

Typický proces použitia vytvárajúcich funkcií na analýzu danej kombinatorickej postupnosti pozostáva z dvoch fáz. Prvá fáza spočíva v *nájdení vytvárajúcej funkcie*, t. j. v jej vyjadrení pomocou základných radov ako napríklad 1 a z a štandardných operácií, najjednoduchšie z ktorých sú uvedené v tabuľke 2.1. Výstupom tejto fázy tak môže byť napríklad pozorovanie, že obyčajná vytvárajúca funkcia skúmanej postupnosti je daná ako

$$R(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Obyčajná vytvárajúca funkcia	**Postupnosť koeficientov**
0	$(0, 0, 0, \ldots)$
1	$(1, 0, 0, \ldots)$
a pre $a \in \mathbb{C}$	$(a, 0, 0, \ldots)$
z	$(0, 1, 0, 0, \ldots)$
z^j pre $j \in \mathbb{N}$	$(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{j-1}, 1, 0, 0, \ldots)$
$\frac{1}{1-z}$	$(1, 1, 1, \ldots)$
$\frac{1}{1-az}$ pre $a \in \mathbb{C}$	$(a^0, a^1, a^2, \ldots)$
$\frac{1}{b-az}$ pre $a \in \mathbb{C}$ a $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\left(\frac{a^0}{b^1}, \frac{a^1}{b^2}, \frac{a^2}{b^3}, \ldots\right)$
$\frac{1}{(1-z)^k}$ pre $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\left(\binom{k-1}{k-1}, \binom{k}{k-1}, \binom{k+1}{k-1}, \binom{k+2}{k-1}, \ldots\right)$
$\frac{1}{(b-az)^k}$ pre $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{C}$ a $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\left(\binom{k-1}{k-1}\frac{a^0}{b^k}, \binom{k}{k-1}\frac{a^1}{b^{k+1}}, \binom{k+1}{k-1}\frac{a^2}{b^{k+2}}, \binom{k+2}{k-1}\frac{a^3}{b^{k+3}}, \ldots\right)$
$\vdots$	$\vdots$

Tabuľka 2.2: Niektoré významné obyčajné vytvárajúce funkcie.

Vytvárajúce funkcie možno jednoduchým spôsobom nájsť napríklad pre postupnosti dané niektorými druhmi rekurentných vzťahov. Neskôr v kapitole 3 opíšeme špecifikačné mechanizmy umožňujúce proces nájdenia vytvárajúcej funkcie kombinatorickej triedy do veľkej miery zmechanizovať.

Druhá fáza potom pozostáva z *použitia nájdenej vytvárajúcej funkcie* na získanie informácií o skúmanej postupnosti. V niektorých viac-menej ojedinelých prípadoch je možné vyjadriť postupnosť koeficientov v uzavretom tvare. Omnoho častejšie možno vytvárajúcu funkciu použiť na algoritmický výpočet členov postupnosti – a predovšetkým aplikovať metódy *analytickej kombinatoriky* umožňujúce opäť relatívne mechanickým spôsobom nájsť veľmi presný asymptotický odhad členov c_n skúmanej postupnosti $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ pre $n \to \infty$. Takýmito analytickými metódami sa budeme v tomto texte zaoberať počnúc kapitolou 5.

2.6 Fibonacciho čísla a ďalšie lineárne rekurencie

V rámci jednoduchej ukážky použitia obyčajných vytvárajúcich funkcií sa teraz zamerajme na riešenie lineárnych rekurencií s konštantnými koeficientmi. Začnime známym príkladom *Fibonacciho čísel.*

Príklad 2.6.1. Postupnosť Fibonacciho čísel $(F_n)_{n=0}^{\infty} = (F_0, F_1, F_2, \ldots)$ je definovaná rekurentným vzťahom

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \qquad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Označme $F(z)$ obyčajnú vytvárajúcu funkciu postupnosti $(F_n)_{n=0}^{\infty}$. Obyčajná vytvárajúca funkcia postupnosti $(F_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ je potom daná ako

$$\frac{F(z) - F_0}{z} = \frac{F(z)}{z}$$

a obyčajná vytvárajúca funkcia postupnosti $(F_{n+2})_{n=0}^{\infty}$ je daná ako

$$\frac{F(z) - F_0 - F_1 z}{z^2} = \frac{F(z) - z}{z^2}.$$

Keďže súčet dvoch postupností zodpovedá súčtu obyčajných vytvárajúcich funkcií, z rekurentného vzťahu (2.6) dostávame

$$\frac{F(z)-z}{z^2}=\frac{F(z)}{z}+F(z),$$

z čoho úpravou pomocou operácií na formálnych mocninových radoch dostávame

$$\frac{F(z)-zF(z)-z^2F(z)-z}{z^2}=0,$$

a teda

$$F(z)\cdot(1-z-z^2)=z.$$

Preto

$$F(z)=\frac{z}{1-z-z^2}=\frac{z}{(1-\varphi z)(1-\psi z)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\varphi z}-\frac{1}{1-\psi z}\right),$$

kde

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\qquad\text{a}\qquad\psi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Obyčajnú vytvárajúcu funkciu $F(z)$ sme teda vyjadrili ako lineárnu kombináciu známych formálnych mocninových radov $1/(1-\varphi z)$ a $1/(1-\psi z)$. Z tabuliek 2.1 a 2.2 už teda možno vyčítať, že pre všetky $n\in\mathbb{N}$ je

$$F_n=[z^n]F(z)=[z^n]\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\varphi z}-\frac{1}{1-\psi z}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n-\psi^n).$$

Tým sme vyjadrili n-té Fibonacciho číslo v uzavretom tvare.

Postup z uvedeného príkladu je možné zovšeobecniť na univerzálnu metódu riešenia lineárnych homogénnych rekurencií s konštantnými koeficientmi, t. j. rekurencií typu

$$c_d a_{n+d}+c_{d-1}a_{n+d-1}+\ldots+c_0 a_n=0,$$

kde $c_0,\ldots,c_d\in\mathbb{C}$ sú konštanty, $c_d\neq 0$ a hodnoty $a_0,\ldots,a_{d-1}$ sú dané ako počiatočné podmienky. Obyčajnú vytvárajúcu funkciu $A(z)$ postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ danej takouto rekurenciou možno vždy vyjadriť zo vzťahu

$$\sum_{k=0}^{d}c_k\cdot\frac{A(z)-a_0z^0-a_1z^1-\ldots-a_{k-1}z^{k-1}}{z^k}=0$$

ako podiel dvoch polynómov – hovoríme, že vytvárajúca funkcia $A(z)$ je *racionálna*. Pre nejakú dvojicu polynómov $P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z]$ je teda

$$A(z)=\frac{P(z)}{Q(z)};$$

ľahko pritom napríklad vidieť, že $[z^0]Q(z)=c_d\neq 0$ a stupeň polynómu $P(z)$ nemôže byť väčší, než $d-1$. Túto rovnosť možno po vydelení polynómov $P(z)$ a $Q(z)$ so zvyškom prepísať ako

$$A(z)=S(z)+\frac{R(z)}{Q(z)},$$

kde $S(z),R(z)\in\mathbb{C}[z]$ sú polynómy, stupeň polynómu $S(z)$ je najviac $d-1$ a stupeň polynómu $R(z)$ je ostro menší, než stupeň polynómu $Q(z)$. Ak pritom

$$Q(z)=C\cdot\prod_{j=1}^{m}(z-\kappa_j)^{d_j}$$

pre nejaké $C \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, po dvoch rôzne $\kappa_1, \ldots, \kappa_m \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ a $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, prichádzame po rozložení podielu $R(z)/Q(z)$ na parciálne zlomky ku vzťahu

$$A(z) = S(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{d_j} \frac{\alpha_{j,k}}{(z-\kappa_j)^k},$$

kde pre $j = 1, \ldots, m$ a $k = 1, \ldots, d_j$ je $\alpha_{j,k} \in \mathbb{C}$. Úpravou tejto rovnosti môžeme napokon dôjsť k vyjadreniu

$$A(z) = S(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{d_j} \frac{\beta_{j,k}}{(1-\lambda_j z)^k}, \tag{2.7}$$

kde

$$S(z) = s_0 z^0 + \ldots + s_{d-1} z^{d-1}$$

je polynóm stupňa *najviac* $d-1$ s koeficientmi $s_0, \ldots, s_{d-1} \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sú po dvoch rôzne nenulové komplexné čísla, $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $\beta_{j,k} \in \mathbb{C}$ pre $j = 1, \ldots, m$ a $k = 1, \ldots, d_j$. Z príkladu 2.4.7 pritom vieme, že pre $j = 1, \ldots, m$ a $k = 1, \ldots, d_j$ je

$$\frac{1}{(1-\lambda_j z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \lambda_j^n z^n.$$

Vzťah (2.7) tak vedie k nasledujúcemu vyjadreniu čísel a_n pre všetky $n \in \mathbb{N}$ v uzavretom tvare:

$$a_n = \sum_{k=0}^{d-1} s_0 \delta_{n,k} + \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{d_j-1} \beta_{j,k} \binom{n+k}{k} \lambda_j^n,$$

kde $\delta_{n,k}$ je *Kroneckerova delta*, t. j.

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{ak } n = k, \\ 0 & \text{ak } n \neq k. \end{cases}$$

Metódu, ktorú sme práve vo všeobecnosti opísali, teraz predvedieme na ešte jednom príklade.

Príklad 2.6.2. Uvažujme postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ danú pre všetky $n \in \mathbb{N}$ rekurentným vzťahom

$$a_{n+4} = 3a_{n+3} - 4a_{n+1} \tag{2.8}$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 2, \\ a_2 &= 1, \\ a_3 &= 2. \end{aligned}$$

Nech $A(z)$ je obyčajná vytvárajúca funkcia postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ – vďaka (2.8) potom

$$\frac{A(z) - a_0 z^0 - a_1 z^1 - a_2 z^2 - a_3 z^3}{z^4} - 3 \cdot \frac{A(z) - a_0 z^0 - a_1 z^1 - a_2 z^2}{z^3} + 4 \cdot \frac{A(z) - a_0 z^0}{z} = 0,$$

čo je to isté ako

$$\frac{A(z) - 1 - 2z - z^2 - 2z^3}{z^4} - 3 \cdot \frac{A(z) - 1 - 2z - z^2}{z^3} + 4 \cdot \frac{A(z) - 1}{z} = 0.$$

Úpravou dostávame
$$\frac{A(z)(1-3z+4z^3)+(-1+z+5z^2-3z^3)}{z^4}=0,$$
z čoho
$$A(z)=\frac{1-z-5z^2+3z^3}{1-3z+4z^3}.$$
Po vydelení týchto dvoch polynómov so zvyškom tak prichádzame k vyjadreniu
$$A(z)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+5z-20z^2}{1-3z+4z^3}=\frac{3}{4}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1+5z-20z^2}{(z+1)(z-1/2)^2}$$
a po rozklade na parciálne zlomky dostávame
$$A(z)=\frac{3}{4}-\frac{2}{3(z+1)}-\frac{7}{12(z-1/2)}-\frac{1}{16(z-1/2)^2},$$
čiže
$$A(z)=\frac{3}{4}-\frac{2}{3(1+z)}+\frac{7}{6(1-2z)}-\frac{1}{4(1-2z)^2}.$$
Prvok a_n uvažovanej postupnosti tak pre všetky $n\in\mathbb{N}$ môžeme vyjadriť ako
$$a_n=\frac{3}{4}\cdot\delta_{n,0}-\frac{2}{3}\cdot(-1)^n+\frac{7}{6}2^n-\frac{1}{4}\binom{n+1}{1}2^n=\frac{3}{4}\cdot\delta_{n,0}-\frac{2}{3}\cdot(-1)^n+\frac{11}{12}\cdot 2^n-\frac{1}{4}\cdot n2^n.$$

Poznámka 2.6.3. Obyčajné vytvárajúce funkcie $R(z)$ postupností definovaných lineárnymi homogénnymi rekurenciami s konštantnými koeficientmi sú teda vždy racionálne – čiže vyjadriteľné ako
$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},$$
kde $P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z]$ sú polynómy také, že $[z^0]Q(z)\neq 0$ (poprípade by stačilo predpokladať nerovnosť $\operatorname{codeg}P(z)\geq\operatorname{codeg}Q(z)$). Ukážeme teraz, že aj postupnosť koeficientov každého racionálneho formálneho mocninového radu musí vždy spĺňať nejakú lineárnu homogénnu rekurenciu s konštantnými koeficientmi. *Postupnosti definované lineárnymi homogénnymi rekurenciami s konštantnými koeficientmi sú tak práve všetky postupnosti s racionálnymi obyčajnými vytvárajúcimi funkciami.*

Uvažujme formálny mocninový rad
$$R(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$
a polynómy $P(z)=b_0z^0+\ldots+b_sz^s$ a $Q(z)=c_0z^0+\ldots+c_tz^t$, kde $a_n\in\mathbb{C}$ pre všetky $n\in\mathbb{N}$, $s,t\in\mathbb{N}$, $b_0,\ldots,b_s,c_0,\ldots,c_t\in\mathbb{C}$ a $c_0\neq 0$. Predpokladajme, že
$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}.$$
Potom $Q(z)R(z)=P(z)$ – pre všetky $n\in\mathbb{N}$ spĺňajúce súčasne $n\geq s+1$ a $n\geq t$ tak z definície Cauchyho súčinu dostávame
$$0=\sum_{k=0}^{n}c_ka_{n-k}=\sum_{k=0}^{t}c_ka_{n-k},$$
z čoho
$$a_n=-\frac{c_1a_{n-1}+\ldots+c_ta_{n-t}}{c_0}.$$
Špeciálne dostávame túto rovnosť pre všetky prirodzené čísla $n\geq s+t+1$. Koeficienty a_n radu $R(z)$ tak pre všetky $n\in\mathbb{N}$ spĺňajú rekurenciu
$$a_{n+s+t+1}+\frac{c_1}{c_0}\cdot a_{n+s+t}+\ldots+\frac{c_t}{c_0}\cdot a_{n+s+1}=0.$$

2.7 Lokálne konečné súčty a skladanie formálnych mocninových radov

Nutnosť zavedenia operácie zloženia, ktorá by na úrovni formálnych mocninových radov predstavovala obdobu operácie zloženia dvoch analytických funkcií, si vyžaduje uvažovať niektoré *nekonečné súčty* formálnych mocninových radov. Samozrejme nemôže byť definovaný ľubovoľný nekonečný súčet radov; ak ale pre každé $n \in \mathbb{N}$ máme iba konečne veľa sčítancov s nenulovým koeficientom pri z^n, môžeme nekonečný súčet cez takýto systém radov vypočítať po zložkách. Systémy formálnych mocninových radov s uvedenou vlastnosťou nazveme *lokálne konečnými.*

Definícia 2.7.1. Nech I je ľubovoľná množina. Systém $(R_k(z) \mid k \in I)$ formálnych mocninových radov $R_k(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ pre $k \in I$ je *lokálne konečný*, ak je pre všetky $n \in \mathbb{N}$ konečná množina indexov

$$I(n) = \{k \in I \mid [z^n]R_k(z) \neq 0\}.$$

Definícia 2.7.2. Nech $(R_k(z) \mid k \in I)$ je lokálne konečný systém formálnych mocninových radov z $\mathbb{C}[\![z]\!]$. *Súčtom* systému $(R_k(z) \mid k \in I)$ nazveme formálny mocninový rad

$$\left(\sum_{k\in I} R_k\right)(z) = \sum_{k\in I} R_k(z)$$

taký, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je jeho koeficient pri z^n daný konečným súčtom

$$[z^n]\left(\sum_{k\in I} R_k\right)(z) := \sum_{k\in I(n)} [z^n]R_k(z).$$

Každý konečný systém radov je evidentne lokálne konečný; uvedená definícia súčtu je v takom prípade konzistentná s bežne definovanými konečnými súčtami.

Nasledujúce tvrdenie je kľúčom k neskoršej definícii operácie *zloženia* dvoch formálnych mocninových radov.

Tvrdenie 2.7.3. *Nech $S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]S(z) = 0$ a $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť komplexných čísel. Potom je systém $(a_m S(z)^m \mid m \in \mathbb{N})$ lokálne konečný.*

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na $m \in \mathbb{N}$ dokážeme, že pre všetky $a \in \mathbb{C}$ a všetky prirodzené $n < m$ je $[z^n]aS(z)^m = 0$. To je triviálne pravda pre $m = 0$ a vďaka predpokladu $[z^0]S(z) = 0$ aj pre $m = 1$. Nech teraz pre nejaké $s \in \mathbb{N}$, všetky $a \in \mathbb{C}$ a všetky prirodzené $n < s$ je $[z^n]aS(z)^s = 0$. Pre každé $a \in \mathbb{C}$ a $n = 0, \ldots, s$ potom

$$[z^n]aS(z)^{s+1} = [z^n]\left(aS(z)^s\right)S(z) = \sum_{k=0}^{n}\left([z^k]aS(z)^s\right)\left([z^{n-k}]S(z)\right) = 0,$$

lebo pre $k = 0, \ldots, n-1$ je $k < s$ a $[z^k]aS(z)^s = 0$, kým pre $k = n$ je $[z^{n-k}]S(z) = [z^0]S(z) = 0$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ teda môže byť koeficient pri z^n nenulový v nanajvýš konečne veľa radoch $a_0S(z)^0, \ldots, a_nS(z)^n$ uvažovaného systému. □

Práve dokázané tvrdenie nám umožňuje definovať *zloženie* $(R \circ S)(z) = R(S(z))$ dvoch formálnych mocninových radov $R, S \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ za predpokladu, že konštantný koeficient radu $S(z)$ je nulový.

Definícia 2.7.4. Nech $R(z), S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ sú formálne mocninové rady také, že $[z^0]S(z) = 0$; nech $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{C}$. *Zložením radov* $R(z)$ *a* $S(z)$ nazveme formálny mocninový rad

$$(R \circ S)(z) = R(S(z)) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n S(z)^n.$$

Existujú aj iné prístupy k definícii zloženia formálnych mocninových radov, umožňujúce definovať tento koncept aj za o niečo všeobecnejších okolností. Definícia predpokladajúca $[z^0]S(z) = 0$ je ale zďaleka najbežnejšia a pre naše účely postačujúca.

Poznámka 2.7.5. Lokálne konečné súčty sú prvou z našich operácií na formálnych mocninových radoch, ktorá sa rovnakým spôsobom nespráva aj na podokruhu analytických funkcií. Ľahko totiž vidieť, že lokálne konečným súčtom cez spočítateľne veľa monómov $a_n z^n \in \mathbf{H}_0$ pre $n \in \mathbb{N}$ a $a_n \in \mathbb{C}$ možno získať aj formálny mocninový rad, ktorý nereprezentuje analytickú funkciu v bode 0 – podokruh $\mathbf{H}_0$ oboru integrity $\mathbb{C}[\![z]\!]$ teda nie je uzavretý na lokálne konečné súčty.

Definícia zloženia formálnych mocninových radov ale napriek tomu s konceptom zloženia dvoch analytických funkcií konzistentná je: ak sú totiž f, g funkcie analytické v bode 0 a $g(0) = 0$ – čo zodpovedá nulovosti konštantného koeficientu Maclaurinovho radu funkcie g – musí byť v bode 0 analytická aj funkcia $f \circ g$ [5, veta 2.5.6]. Ak pritom na nejakom okolí D bodu 0 je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

musí aj pre všetky $z \in \mathbb{C}$ s $g(z) \in D$ byť

$$f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z)^n; \tag{2.9}$$

z analytickosti – a z nej vyplývajúcej spojitosti – funkcie g v bode 0 a predpokladu $g(0) = 0$ pritom vyplýva, že pre nejaké okolie bodu 0 a všetky z z tohto okolia je $g(z) \in D$. Maclaurinov rad analytickej funkcie $f \circ g$ tak musí byť daný ako v (2.9).

Samozrejme, zloženie $f \circ g$ dvoch funkcií f, g analytických v bode 0 môže byť analytickou funkciou v bode 0 aj v prípade, že $g(0) \neq 0$; to súvisí s vyššie spomínanou skutočnosťou, že aj zloženie dvoch formálnych mocninových radov možno definovať v o niečo všeobecnejšom kontexte.

Nasledujúce jednoduché tvrdenie ukazuje, že linearita formálnej derivácie sa prenáša aj na lokálne konečné nekonečné súčty formálnych mocninových radov.

Tvrdenie 2.7.6. *Nech $(R_k(z) \mid k \in I)$ je lokálne konečný systém formálnych mocninových radov z $\mathbb{C}[\![z]\!]$. Potom je lokálne konečný aj systém $(R_k'(z) \mid k \in I)$ a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{k \in I} R_k(z) = \sum_{k \in I} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R_k(z).$$

Dôkaz. Pre všetky $k \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ je $[z^n]R_k'(z) = (n+1)[z^{n+1}]R_k(z)$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ preto

$$I'(n) := \{k \in I \mid [z^n]R_k'(z) \neq 0\} = \{k \in I \mid [z^{n+1}]R_k(z) \neq 0\} = I(n+1);$$

z lokálnej konečnosti systému $(R_k(z) \mid k \in I)$ tak vyplýva aj lokálna konečnosť systému $(R_k'(z) \mid k \in I)$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ navyše

$$\begin{aligned} [z^n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{k \in I} R_k(z) &= (n+1)[z^{n+1}] \sum_{k \in I} R_k(z) = (n+1) \sum_{k \in I(n+1)} [z^{n+1}]R_k(z) = \\ &= \sum_{k \in I(n+1)} (n+1)[z^{n+1}]R_k(z) = \sum_{k \in I'(n)} [z^n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R_k(z) = [z^n] \sum_{k \in I} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R_k(z), \end{aligned}$$

z čoho vyplýva aj dokazovaná rovnosť

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{k \in I} R_k(z) = \sum_{k \in I} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} R_k(z).$$

□

Spomedzi množstva ďalších užitočných vlastností lokálne konečných súčtov spomeňme ešte jednu, ktorá hovorí o silnejšej verzii distributívnosti v okruhu $\mathbb{C}[\![z]\!]$.

Tvrdenie 2.7.7. *Nech $(R_k(z) \mid k \in I)$ je lokálne konečný systém formálnych mocninových radov z $\mathbb{C}[\![z]\!]$ a $S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$. Potom je aj systém $(R_k(z)S(z) \mid k \in I)$ lokálne konečný a*

$$\sum_{k \in I} R_k(z)S(z) = S(z) \sum_{k \in I} R_k(z).$$

Dôkaz. Nech $n \in \mathbb{N}$. Vďaka lokálnej konečnosti systému $(R_k(z) \mid k \in I)$ je potom množina

$$I(\leq n) := \{k \in I \mid \exists \ell \in \{0, \ldots, n\}\colon [z^\ell]R_k(z) \neq 0\}$$

konečná. Keďže pre všetky $k \in I$ je

$$[z^n]R_k(z)S(z) = \sum_{\ell=0}^{n} \left([z^\ell]R_k(z)\right) \left([z^{n-\ell}]S(z)\right),$$

musí pre všetky $k \notin I(\leq n)$ byť $[z^n]R_k(z)S(z) = 0$. To dokazuje lokálnu konečnosť systému

$$(R_k(z)S(z) \mid k \in I).$$

Z distributívnosti okruhu $\mathbb{C}[\![z]\!]$ ďalej

$$[z^n] \sum_{k \in I} R_k(z)S(z) = [z^n] \sum_{k \in I(\leq n)} R_k(z)S(z) = [z^n] \left(S(z) \sum_{k \in I(\leq n)} R_k(z) \right) = [z^n] \left(S(z) \sum_{k \in I} R_k(z) \right).$$

Keďže je $n \in \mathbb{N}$ ľubovoľné, je týmto tvrdenie dokázané. □

Vyslovme teraz relatívne dôležitú vetu o formálnej derivácii zloženia dvoch formálnych mocninových radov – opäť pôjde o obdobu dobre známej vety o derivácii zloženej funkcie z matematickej analýzy.

Veta 2.7.8. *Nech $R(z), S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ sú formálne mocninové rady také, že $[z^0]S(z) = 0$. Potom*

$$(R \circ S)'(z) = R'(S(z))S'(z).$$

Dôkaz. Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel takých, že

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Z definície 2.7.4, tvrdenia 2.7.6, vety 2.4.5 a tvrdenia 2.7.7 potom dostávame

$$\begin{aligned}(R \circ S)'(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n S(z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} a_n S(z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} S(z)^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n S(z)^{n-1} S'(z) = S'(z) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} S(z)^n = R'(S(z))S'(z),\end{aligned}$$

pričom všetky uvažované nekonečné súčty sú lokálne konečné buď vďaka predpokladu $[z^0]S(z) = 0$ a tvrdeniu 2.7.3, alebo vďaka tvrdeniu 2.7.6. □

2.8 Formálna exponenciálna funkcia

Formálny mocninový rad e^z definujeme prirodzeným spôsobom na základe znalosti Maclaurinovho radu exponenciálnej funkcie. Pri stotožnení okruhu $\mathbf{H}_0$ funkcií analytických v bode 0 s podokruhom okruhu $\mathbb{C}[\![z]\!]$ tak môžeme aj formálny mocninový rad e^z stotožniť s analytickou funkciou e^z.

Definícia 2.8.1. Rad $e^z = \exp(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ definujeme ako

$$e^z = \exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Pre ľubovoľný rad $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ spĺňajúci $[z^0]R(z) = 0$ teraz môžeme aplikovať definíciu zloženia formálnych mocninových radov, čím dostávame rad

$$e^{R(z)} = \exp\left(R(z)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R(z)^n}{n!},$$

kde súčet je cez lokálne konečný systém radov. V skutočnosti ale môžeme formálnu exponenciálnu funkciu definovať pre ľubovoľný argument $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ – stačí využiť známu vlastnosť analytickej exponenciálnej funkcie, ktorú by sme očakávali aj od formálnej exponenciálnej funkcie.

Definícia 2.8.2. Pre všetky $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ kladieme

$$e^{R(z)} = \exp\left(R(z)\right) := e^{[z^0]R(z)} e^{R(z)-[z^0]R(z)} = e^{[z^0]R(z)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(R(z) - [z^0]R(z)\right)^n}{n!} \right),$$

kde $e^{[z^0]R(z)}$ označuje bežné umocňovanie čísla e na komplexný exponent.

Keďže $e^z \in \mathbf{H}_0$ a formálna derivácia sa na $\mathbf{H}_0$ správa rovnako ako bežná derivácia, je nasledujúce tvrdenie dôsledkom známeho tvrdenia z matematickej analýzy – napriek tomu však uvádzame aj jeho dôkaz, ktorý matematickú analýzu nevyužíva.

Tvrdenie 2.8.3. *Formálna derivácia formálneho mocninového radu e^z spĺňa rovnosť*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z = e^z.$$

Dôkaz. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$[z^n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z = (n+1)[z^{n+1}]e^z = \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} = [z^n]e^z.$$ □

Nasledujúce tvrdenie hovorí o dvoch ďalších elementárnych vlastnostiach formálnej exponenciálnej funkcie, ktoré sú obdobou vlastností exponenciálnej funkcie známych z matematickej analýzy.

Tvrdenie 2.8.4. *Nech $R(z), S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$. Potom:*

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^{R(z)} = R'(z) e^{R(z)}$;

b) $e^{R(z)+S(z)} = e^{R(z)} e^{S(z)}$.

Dôkaz. Ak $[z^0]R(z) = 0$, je tvrdenie a) bezprostredným dôsledkom vety 2.7.8 a tvrdenia 2.8.3; v prípade $[z^0]R(z) \neq 0$ je zas

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^{R(z)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^{[z^0]R(z)} e^{R(z)-[z^0]R(z)} = e^{[z^0]R(z)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^{R(z)-[z^0]R(z)} =$$
$$= e^{[z^0]R(z)} e^{R(z)-[z^0]R(z)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(R(z) - [z^0]R(z)\right) = R'(z) e^{R(z)}.$$

Dokážme tvrdenie b). Predpokladajme najprv, že $[z^0]R(z) = [z^0]S(z) = 0$; z binomickej vety – ktorá evidentne platí v ľubovoľnom komutatívnom okruhu, a teda aj v $\mathbb{C}[\![z]\!]$ – potom dostávame

$$
\begin{aligned}
e^{R(z)+S(z)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(R(z)+S(z))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R(z)^k S(z)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{R(z)^k S(z)^{n-k}}{k!(n-k)!} = \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{R(z)^s S(z)^t}{s!t!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{R(z)^s}{s!} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{S(z)^t}{t!} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{R(z)^s}{s!}\right) \left(\sum_{t=0}^{\infty} \frac{S(z)^t}{t!}\right) = e^{R(z)} e^{S(z)}.
\end{aligned}
$$

Ak $R(z) \neq 0$ alebo $S(z) \neq 0$, je

$$
\begin{aligned}
e^{R(z)+S(z)} &= e^{[z^0]R(z)+[z^0]S(z)} e^{(R(z)-[z^0]R(z))+(S(z)-[z^0]S(z))} = e^{[z^0]R(z)} e^{R(z)-[z^0]R(z)} e^{[z^0]S(z)} e^{S(z)-[z^0]S(z)} = \\
&= e^{R(z)} e^{S(z)},
\end{aligned}
$$

čím je dôkaz tvrdenia dokončený. □

2.9 Formálny logaritmus

Maclaurinovým radom funkcie $\mathrm{Ln}(1+z)$, kde $\mathrm{Ln}\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ označuje *hlavnú vetvu* prirodzeného logaritmu analytickú na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, je tzv. *Mercatorov rad* [5, cvičenie 7.8]

$$
\mathrm{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.
$$

Podobne ako v prípade formálnej exponenciálnej funkcie tak môžeme prirodzeným spôsobom definovať aj formálny mocninový rad $\mathrm{Ln}(1+z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$.

Definícia 2.9.1. Rad $\mathrm{Ln}(1+z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ definujeme ako

$$
\mathrm{Ln}(1+z) := z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.
$$

Uvedený rad definujeme ako obdobu Maclaurinovho radu pre *hlavnú vetvu* prirodzeného logaritmu; to je dané predovšetkým skutočnosťou, že naším hlavným objektom skúmania budú vytvárajúce funkcie kombinatorických tried, ktorých koeficientmi sú vždy prirodzené čísla.

Pre ľubovoľný formálny mocninový rad $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ spĺňajúci $[z^0]R(z) = 0$ môžeme opäť aplikovať operáciu zloženia formálnych mocninových radov, čím prichádzame k radu

$$
\mathrm{Ln}\,(1+R(z)) = R(z) - \frac{R(z)^2}{2} + \frac{R(z)^3}{3} - \frac{R(z)^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} R(z)^n.
$$

Máme tak definované aj rady $\mathrm{Ln}(R(z))$ pre všetky $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ také, že $[z^0]R(z) = 1$ – je totiž $\mathrm{Ln}(R(z)) = \mathrm{Ln}(1 + (R(z) - 1))$. Očakávanú vlastnosť logaritmov súčinu pritom môžeme využiť na to, aby sme túto definíciu rozšírili aj na všetky rady $R(z)$ také, že $[z^0]R(z) \neq 0$.

Definícia 2.9.2. Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) \neq 0$. Potom kladieme

$$
\mathrm{Ln}\,(R(z)) := \mathrm{Ln}\left([z^0]R(z)\right) + \mathrm{Ln}\left(\frac{R(z)}{[z^0]R(z)}\right).
$$

Podobne ako v prípade formálnej exponenciálnej funkcie, môžeme aj formálny mocninový rad $\mathrm{Ln}(1+z)$ považovať za prvok okruhu $\mathbf{H}_0$ funkcií analytických v bode 0; nasledujúce tvrdenie potom možno považovať za známe z matematickej analýzy. Napriek tomu ale opäť uvedieme aj dôkaz, ktorý sa na matematickú analýzu neodvoláva.

Tvrdenie 2.9.3. *Formálna derivácia formálneho mocninového radu* $\mathrm{Ln}(1+z)$ *spĺňa rovnosť*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}(1+z) = \frac{1}{1+z}.$$

Dôkaz. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$[z^n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}(1+z) = (n+1)[z^{n+1}]\,\mathrm{Ln}(1+z) = \frac{(-1)^n(n+1)}{n+1} = (-1)^n = [z^n]\frac{1}{1+z}. \qquad \square$$

Môžeme teraz dokázať formálne obdoby viacerých vlastností logaritmickej funkcie známych z matematickej analýzy. Nasledujúce tvrdenie pre jednoduchosť sformulujeme len pre rady s *kladnými reálnymi* konštantnými koeficientmi; na dôkaz prvej a poslednej z uvedených štyroch vlastností ale v skutočnosti stačí predpokladať iba nenulovosť týchto koeficientov.

Tvrdenie 2.9.4. *Nech* $R(z), S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ *sú také, že* $[z^0]R(z) > 0$ *a* $[z^0]S(z) > 0$. *Potom:*

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}\,(R(z)) = \frac{R'(z)}{R(z)}$;

b) $\mathrm{Ln}\,(R(z)S(z)) = \mathrm{Ln}\,(R(z)) + \mathrm{Ln}\,(S(z))$;

c) $\mathrm{Ln}\,(1/R(z)) = -\,\mathrm{Ln}\,(R(z))$;

d) ak $\mathrm{Ln}\,(R(z)) = \mathrm{Ln}\,(S(z))$, *tak* $R(z) = S(z)$.

Dôkaz. Nech $[z^0]R(z) =: a_0$, $[z^0]S(z) =: b_0$, $R(z)/a_0 - 1 =: \hat{R}(z)$ a $S(z)/b_0 - 1 =: \hat{S}(z)$. Z definície radu $\mathrm{Ln}\,(R(z))$ a vety o derivácii zloženia radov potom

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}\,(R(z)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mathrm{Ln}(a_0) + \mathrm{Ln}\left(1+\hat{R}(z)\right)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}\left(1+\hat{R}(z)\right) = \frac{\hat{R}'(z)}{1+\hat{R}(z)} = \frac{R'(z)}{a_0 + a_0\hat{R}(z)} = \\ &= \frac{R'(z)}{R(z)},\end{aligned}$$

čím je dokázané tvrdenie a). Z dokázaného ďalej vyplýva

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}\,(R(z)S(z)) &= \frac{1}{R(z)S(z)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}R(z)S(z)\right) = \frac{R(z)S'(z) + R'(z)S(z)}{R(z)S(z)} = \frac{R'(z)}{R(z)} + \frac{S'(z)}{S(z)} = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}(R(z)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}(S(z)).\end{aligned}$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ tak

$$\begin{aligned}[z^{n+1}]\,\mathrm{Ln}\,(R(z)S(z)) &= \frac{1}{n+1}[z^n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}\,(R(z)S(z)) = \frac{1}{n+1}[z^n]\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}(R(z)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}(S(z))\right) = \\ &= \frac{1}{n+1}[z^n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}(R(z)) + \frac{1}{n+1}[z^n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}(S(z)) = \\ &= [z^{n+1}]\,\mathrm{Ln}(R(z)) + [z^{n+1}]\,\mathrm{Ln}(R(z)) = [z^{n+1}]\left(\mathrm{Ln}(R(z)) + \mathrm{Ln}(S(z))\right).\end{aligned}$$

Keďže navyše aj

$$\begin{aligned}[z^0]\,\mathrm{Ln}\,(R(z)S(z)) &= \mathrm{Ln}\left([z^0]R(z)S(z)\right) = \mathrm{Ln}(a_0 b_0) = \mathrm{Ln}(a_0) + \mathrm{Ln}(b_0) = \\ &= \mathrm{Ln}\left([z^0]R(z)\right) + \mathrm{Ln}\left([z^0]S(z)\right) = [z^0]\,\mathrm{Ln}(R(z)) + [z^0]\,\mathrm{Ln}(S(z)) = \\ &= [z^0]\left(\mathrm{Ln}(R(z)) + \mathrm{Ln}(S(z))\right),\end{aligned}$$

musí nutne byť

$$\mathrm{Ln}\,(R(z)S(z)) = \mathrm{Ln}\,(R(z)) + \mathrm{Ln}\,(S(z))$$

a dokázané je aj tvrdenie b). Pre rad $R(z)$ vďaka tomu špeciálne dostávame

$$\mathrm{Ln}\,(R(z)) + \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{R(z)}\right) = \mathrm{Ln}\left(R(z)\cdot\frac{1}{R(z)}\right) = \mathrm{Ln}(1) = 0;$$

preto

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{R(z)}\right) = -\,\mathrm{Ln}\,(R(z))\,,$$

čo dokazuje tvrdenie c). Z rovnosti $\mathrm{Ln}\,(R(z)) = \mathrm{Ln}\,(S(z))$ napokon dostávame

$$\mathrm{Ln}\,(R(z)) - \mathrm{Ln}\,(S(z)) = \mathrm{Ln}\left(\frac{R(z)}{S(z)}\right) = 0,$$

z čoho nutne vyplýva[1] $R(z)/S(z) = 1$. Preto $R(z) = S(z)$ a dokázané je aj tvrdenie d). □

Vyjasnime si ešte vzťah formálnej exponenciálnej a logaritmickej funkcie, ktorý je aspoň *v reálnom prípade* taký, aký by sme intuitívne očakávali.

Tvrdenie 2.9.5. *Nech $R(z), S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ také, že $[z^0]R(z) \in \mathbb{R}$ a $[z^0]S(z) > 0$. Potom:*

a) $\mathrm{Ln}\left(e^{R(z)}\right) = R(z)$;

b) $e^{\mathrm{Ln}(S(z))} = S(z)$.

Dôkaz. Na dôkaz tvrdenia a) uvažujme najprv prípad, keď $[z^0]R(z) = 0$. Potom $[z^0]e^{R(z)} = 1$ a z vety o derivácii zloženia formálnych mocninových radov dostávame

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mathrm{Ln}\left(e^{R(z)}\right)\right) = \frac{1}{e^{R(z)}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(e^{R(z)} - 1\right)\right) = \frac{e^{R(z)}R'(z)}{e^{R(z)}} = R'(z).$$

To znamená, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$[z^{n+1}]\,\mathrm{Ln}\left(e^{R(z)}\right) = \frac{1}{n+1}[z^n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mathrm{Ln}\left(e^{R(z)}\right)\right) = \frac{1}{n+1}[z^n]R'(z) = [z^{n+1}]R(z);$$

keďže navyše $[z^0]\,\mathrm{Ln}\left(e^{R(z)}\right) = [z^0]R(z) = 0$, je nutne $\mathrm{Ln}\left(e^{R(z)}\right) = R(z)$.

Pre všeobecné $[z^0]R(z) \in \mathbb{R}$ ďalej

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\left(e^{R(z)}\right) &= \mathrm{Ln}\left(e^{[z^0]R(z)}e^{R(z)-[z^0]R(z)}\right) = \mathrm{Ln}\left(e^{[z^0]R(z)}\right) + \mathrm{Ln}\left(e^{R(z)-[z^0]R(z)}\right) = \\ &= [z^0]R(z) + \left(R(z) - [z^0]R(z)\right) = R(z),\end{aligned}$$

čím je tvrdenie a) dokázané.

Ak teraz $S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ a $[z^0]S(z) > 0$, je $[z^0]\,\mathrm{Ln}\,S(z) = \mathrm{Ln}[z^0]S(z) \in \mathbb{R}$ a z dokázaného vyplýva

$$\mathrm{Ln}\,e^{\mathrm{Ln}\,S(z)} = \mathrm{Ln}\,S(z).$$

Keďže teda $[z^0]S(z) > 0$ a $[z^0]e^{\mathrm{Ln}\,S(z)} = e^{[z^0]\,\mathrm{Ln}\,S(z)} > 0$, z časti d) tvrdenia 2.9.4 dostávame

$$e^{\mathrm{Ln}\,S(z)} = \mathrm{Ln}\,S(z),$$

čo dokazuje aj tvrdenie b). □

[1] Ak totiž pre $T(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ spĺňajúce $[z^0]T(z) \neq 0$ platí $\mathrm{Ln}(T(z)) = 0$, musí byť aj $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}(T(z)) = T'(z)/T(z) = 0$, z čoho $T'(z) = 0$; preto $[z^n]T(z) = 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a z rovnosti $\mathrm{Ln}(T(z)) = \mathrm{Ln}([z^0]T(z)) = 0$ dostávame $T(z) = 1$.

2.10 Racionálne a komplexné mocniny

Preskúmame teraz umocňovanie formálnych mocninových radov na racionálny alebo prípadne aj komplexný exponent.

Definovali sme už celočíselné mocniny formálnych mocninových radov – k racionálnym mocninám nám už teda chýba iba jeden krok spočívajúci v zavedení *k-tych odmocnín* formálnych mocninových radov pre $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ihneď si môžeme všimnúť, že takéto odmocniny nemusia existovať pre všetky formálne mocninové rady: ťažko by sme napríklad hľadali druhú odmocninu zo z. Hoci občas môže „náhodou“ existovať aj k-ta odmocnina radu s nulovým konštantným koeficientom, typicky býva veľkým obmedzením už iba skutočnosť, že kostupeň k-tej odmocniny takéhoto radu $R(z)$ musí byť presne $(\operatorname{codeg} R(z))/k$. Vo väčšine prípadov teda k-ta odmocnina radu s nulovým konštantným koeficientom vôbec neexistuje. Obmedzíme sa preto na skúmanie odmocnín radov s nenulovým konštantným koeficientom, kde sa situácia ukáže byť omnoho zaujímavejšou.

Začnime pomocným tvrdením o existencii k-tych odmocnín formálnych mocninových radov, ktorých konštantný koeficient je rovný jednej.

Tvrdenie 2.10.1. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) = 1$ a $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Potom existuje práve jeden formálny mocninový rad $S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ taký, že $[z^0]S(z) = 1$ a $S^k(z) = R(z)$.*

Dôkaz. Uvažujme ľubovoľný formálny mocninový rad $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ s $a_0 = 1$ a predpokladajme, že $A^k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Matematickou indukciou vzhľadom na k dokážeme, že $b_0 = 1$, $b_1 = ka_1$ a pre všetky prirodzené čísla $n \geq 1$ je

$$b_n = ka_n + p_{n,k}(a_1, \ldots, a_{n-1}),$$

kde $p_{n,k} \colon \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ je vhodná polynomická funkcia o $n-1$ premenných nezávislá od $A(z)$.

Pre $k = 1$ je skutočne $b_0 = a_0 = 1$, $b_1 = a_1 = ka_1$ a $b_n = a_n = ka_n + p_{n,k}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ pre všetky prirodzené $n \geq 1$ a konštantne nulovú funkciu $p_{n,k}$. Nech teda tvrdenie platí pre $k = s$ a uvažujme $k = s + 1$. Z indukčného predpokladu potom

$$b_0 = [z^0]\left(A^s(z)A(z)\right) = \left([z^0]A^s(z)\right)\left([z^0]A(z)\right) = 1a_0 = 1$$

a

$$b_1 = [z^1]\left(A^s(z)A(z)\right) = \sum_{\ell=0}^{1}\left([z^\ell]A^s(z)\right)\left([z^{1-\ell}]A(z)\right) = 1a_1 + sa_1a_0 = (s+1)a_1;$$

pre všetky prirodzené čísla $n \geq 2$ ďalej, takisto vďaka indukčnému predpokladu,

$$\begin{aligned}
b_n &= [z^n]\left(A^s(z)A(z)\right) = \sum_{\ell=0}^{n}\left([z^\ell]A^s(z)\right)\left([z^{n-\ell}]A(z)\right) = \\
&= \left([z^0]A^s(z)\right)\left([z^n]A(z)\right) + \sum_{\ell=1}^{n-1}\left([z^\ell]A^s(z)\right)\left([z^{n-\ell}]A(z)\right) + \left([z^n]A^s(z)\right)\left([z^0]A(z)\right) = \\
&= a_n + \sum_{\ell=1}^{n-1}\left(sa_\ell + p_{\ell,s}(a_1, \ldots, a_{\ell-1})\right)a_{n-\ell} + \left(sa_n + p_{n,s}(a_1, \ldots, a_{n-1})\right)a_0 = \\
&= (s+1)a_n + \sum_{\ell=1}^{n-1} sa_\ell a_{n-\ell} + \sum_{\ell=1}^{n} p_{\ell,s}(a_1, \ldots, a_{\ell-1})a_{n-\ell} = (s+1)a_n + p_{n,s+1}(a_1, \ldots, a_{n-1}),
\end{aligned}$$

kde $p_{n,s+1} \colon \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ je polynomická funkcia daná pre všetky $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ ako

$$p_{n,s+1}(c_1, \ldots, c_{n-1}) := \sum_{\ell=1}^{n-1} sc_\ell c_{n-\ell} + \sum_{\ell=1}^{n} p_{\ell,s}(c_1, \ldots, c_{\ell-1})c_{n-\ell}.$$

Tým je hotový dôkaz indukčného kroku.

Z dokázaného vyplýva, že ak pre rad $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ s $b_0 = 1$ vezmeme $a_0 := 1$ a pre všetky prirodzené $n \geq 1$ položíme

$$a_n := \frac{b_n - p_{n,k}(a_1, \ldots, a_{n-1})}{k},$$

bude rad $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ spĺňať $[z^0]S(z) = 1$ a $S^k(z) = R(z)$. Navyše je takýto rad evidentne daný jednoznačne, pretože existuje práve jedna postupnosť koeficientov $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ spĺňajúca uvedené vzťahy. □

Uvažujme teraz ľubovoľný formálny mocninový rad $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ taký, že $a_0 \neq 0$ a ľubovoľné $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pre rad $\hat{R}(z) = \frac{1}{a_0} R(z)$ potom $[z^0]\hat{R}(z) = 1$ – existuje teda práve jeden formálny mocninový rad $\hat{S}(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ taký, že $[z^0]\hat{S}(z) = 1$ a $\hat{S}^k(z) = \hat{R}(z)$. Pre ľubovoľné $b_0 \in [\![a_0^{1/k}]\!]$ potom formálny mocninový rad $S(z) = b_0 \hat{S}(z)$ spĺňa

$$S^k(z) = b_0^k \hat{S}^k(z) = a_0 \hat{R}(z) = R(z).$$

Ak je navyše $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ľubovoľný formálny mocninový rad taký, že $T^k(z) = R(z)$, nutne $c_0^k = a_0$ a rad $\hat{T}(z) = \frac{1}{c_0} T(z)$ spĺňa $[z^0]\hat{T}(z) = 1$. Keďže $T^k(z) = a_0 \hat{T}^k(z) = R(z)$, $a_0 \hat{R}(z) = R(z)$ a $a_0 \neq 0$, zo zákona o krátení v obore integrity $\mathbb{C}[\![z]\!]$ vyplýva $\hat{T}^k(z) = \hat{R}(z)$ a z jednoznačnosti radu $\hat{S}(z)$ dostávame $\hat{T}(z) = \hat{S}(z)$. Dokázali sme teda nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 2.10.2. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) \neq 0$ a $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Potom existuje práve k radov $S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ takých, že $S^k(z) = R(z)$. Tieto rady $S(z)$ sú dané ako*

$$\alpha_0 \hat{S}(z), \ldots, \alpha_{k-1} \hat{S}(z),$$

kde $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ sú práve všetky k-te komplexné odmocniny čísla a_0 a $\hat{S}(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je jednoznačne daný formálny mocninový rad taký, že $[z^0]\hat{S}(z) = 1$ a $\hat{S}^k(z) = \frac{1}{a_0} R(z)$.

Dôkaz. Vyplýva z diskusie predchádzajúcej tomuto tvrdeniu. □

Definícia 2.10.3. Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) \neq 0$ a $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ľubovoľný rad $S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ taký, že $S^k(z) = R(z)$ potom nazveme *k-tou odmocninou* radu $R(z)$.

Z tvrdenia 2.10.2 vyplýva, že každý formálny mocninový rad $R(z)$ s nenulovým konštantným koeficientom má pre každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ presne k rôznych k-tych odmocnín.

Definícia 2.10.4. Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) > 0$ a $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Kanonickou k-tou odmocninou* radu $R(z)$ potom nazveme rad $S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ taký, že $S^k(z) = R(z)$ a $[z^0]S(z) > 0$. Píšeme pritom

$$S(z) =: \sqrt[k]{R(z)} = R^{1/k}(z).$$

Keďže má ľubovoľné kladné reálne číslo pre všetky $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ práve jednu kladnú reálnu k-tu odmocninu, je aj kanonická k-ta odmocnina radov s kladným reálnym konštantným koeficientom určená jednoznačne. Pre $k = 2$ navyše píšeme aj

$$\sqrt{R(z)} := \sqrt[2]{R(z)}.$$

Pre každý formálny mocninový rad $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ s kladným konštantným koeficientom, všetky $p \in \mathbb{Z}$ a všetky $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je ďalej

$$(R^p)^{1/q}(z) = \left(R^{1/q}\right)^p(z);$$

umocnením radu na pravej strane na q-tu totiž dostávame

$$\left(\left(R^{1/q}\right)^p\right)^q(z) = \left(R^{1/q}\right)^{pq}(z) = \left(\left(R^{1/q}\right)^q\right)^p(z) = R^p(z).$$

Rad $\left(R^{1/q}\right)^p(z)$ je teda kanonickou q-tou odmocninou radu $R^p(z)$ a je tak rovný radu $(R^p)^{1/q}(z)$ na ľavej strane dokazovanej rovnosti. Na základe tohto pozorovania teraz môžeme definovať kanonické racionálne mocniny radov s kladnými reálnymi konštantnými koeficientmi.

Definícia 2.10.5. Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) > 0$, nech $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Kanonickou p/q-tou mocninou* radu $R(z)$ potom nazveme rad

$$R^{p/q}(z) := (R^p)^{1/q}(z) = \left(R^{1/q}\right)^p(z).$$

Tvrdenie 2.10.6. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) > 0$. Pre všetky $r \in \mathbb{Q}$ potom*

$$\mathrm{Ln}\,(R^r(z)) = r\,\mathrm{Ln}\,(R(z))\,.$$

Dôkaz. Uvažujme najprv prípad, keď $r \in \mathbb{N}$. Pre $r = 0$ potom $\mathrm{Ln}\left(R^0(z)\right) = \mathrm{Ln}(1) = 0 = 0\,\mathrm{Ln}\,(R(z))$; ak ďalej predpokladáme platnosť tvrdenia pre $r = s \in \mathbb{N}$, pre $r = s+1$ s použitím časti b) tvrdenia 2.9.4 dostávame

$$\mathrm{Ln}\left(R^{s+1}(z)\right) = \mathrm{Ln}\,(R^s(z)R(z)) = \mathrm{Ln}\,(R^s(z)) + \mathrm{Ln}\,(R(z)) = s\,\mathrm{Ln}\,(R(z)) + \mathrm{Ln}\,(R(z)) = (s+1)\,\mathrm{Ln}\,(R(z))\,.$$

Ak ďalej $r = p/q$ pre $p \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, vyplýva z dokázaného

$$p\,\mathrm{Ln}\,(R(z)) = \mathrm{Ln}\,(R^p(z)) = \mathrm{Ln}\,((R^r)^q(z)) = q\,\mathrm{Ln}\,(R^r(z))\,,$$

z čoho

$$\mathrm{Ln}\,(R^r(z)) = \frac{p}{q}\,\mathrm{Ln}\,(R(z)) = r\,\mathrm{Ln}\,(R(z))\,.$$

Ak napokon $r = -p/q$ pre $p \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, vďaka časti c) tvrdenia 2.9.4 a vyššie dokázanému je

$$\mathrm{Ln}\,(R^r(z)) = \mathrm{Ln}\left(R^{-p/q}(z)\right) = \mathrm{Ln}\left(\left(R^{p/q}\right)^{-1}(z)\right) = -\,\mathrm{Ln}\left(R^{p/q}(z)\right) = -\frac{p}{q}\,\mathrm{Ln}\,(R(z)) = r\,\mathrm{Ln}\,(R(z))\,,$$

čím je tvrdenie dokázané. □

Dokážeme teraz formálnu obdobu Newtonovej zovšeobecnenej binomickej vety v prípade racionálneho exponentu; pripomeňme si pritom, že pre všetky $\alpha \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ kladieme

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!}.$$

Veta 2.10.7. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) = 0$. Pre všetky $r \in \mathbb{Q}$ potom*

$$(1 + R(z))^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} R^n(z).$$

Dôkaz. Označme

$$T(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} R^n(z).$$

Potom

$$T'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} R^n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \binom{r}{n} R^n(z) = R'(z) \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{r}{n} R^{n-1}(z).$$

To znamená, že

$$\begin{aligned}(1+R(z))\,T'(z) &= R'(z)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{r}{n}R^{n-1}(z) + R'(z)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{r}{n}R^{n}(z) = \\ &= R'(z)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{r}{n}R^{n-1}(z) + R'(z)\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\binom{r}{n-1}R^{n-1}(z) = \\ &= rR'(z) + R'(z)\sum_{n=2}^{\infty}\left(n\binom{r}{n} + (n-1)\binom{r}{n-1}\right)R^{n-1}(z) = \\ &= rR'(z) + R'(z)\sum_{n=2}^{\infty}\left((r-n+1)\binom{r}{n-1} + (n-1)\binom{r}{n-1}\right)R^{n-1}(z) = \\ &= rR'(z) + R'(z)\sum_{n=2}^{\infty} r\binom{r}{n-1}R^{n-1}(z) = rR'(z)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{r}{n}R^{n}(z)\right) = \\ &= rR'(z)T(z).\end{aligned}$$

Preto

$$\frac{T'(z)}{T(z)} = \frac{rR'(z)}{1+R(z)},$$

a teda aj

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{Ln}(T(z)) = \frac{T'(z)}{T(z)} = \frac{rR'(z)}{1+R(z)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{Ln}(1+R(z))^r.$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$[z^{n+1}]\operatorname{Ln}(T(z)) = \frac{1}{n+1}[z^n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{Ln}(T(z)) = \frac{1}{n+1}[z^n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{Ln}(1+R(z))^r = [z^{n+1}]\operatorname{Ln}(1+R(z))^r.$$

Keďže je navyše $[z^0]\operatorname{Ln}(T(z)) = [z^0]\operatorname{Ln}(1+R(z))^r = 0$, je

$$\operatorname{Ln}(T(z)) = \operatorname{Ln}(1+R(z))^r,$$

z čoho podľa časti d) tvrdenia 2.9.4 vyplýva dokazovaná rovnosť

$$(1+R(z))^r = T(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}R^n(z).$$ □

Hoci sú racionálne mocniny formálnych mocninových radov z hľadiska kombinatorických aplikácií zvyčajne postačujúce, môžeme vetu o binomickom rozvoji hlavných vetiev mocninových funkcií, známu z matematickej analýzy [5, cvičenie 7.9], využiť aj ako inšpiráciu pre definíciu komplexných mocnín formálnych mocninových radov.

Definícia 2.10.8. Nech $\alpha \in \mathbb{C}$. Rad $(1+z)^\alpha \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ potom definujeme ako

$$(1+z)^\alpha := \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n.$$

Pre ľubovoľný formálny mocninový rad spĺňajúci $[z^0]R(z) = 0$ môžeme aplikovať operáciu zloženia formálnych mocninových radov, čím dostaneme nasledujúce vyjadrenie mocnín formálnych mocninových radov s konštantným koeficientom rovným jednej:

$$(1+R(z))^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}R^n(z).$$

Veta 2.10.7 pritom zaručuje konzistenciu definícií mocnín takýchto formálnych mocninových radov s komplexným a racionálnym exponentom. Umocňovanie na komplexný exponent teraz môžeme definovať aj pre všetky rady s kladným konštantným koeficientom.

Definícia 2.10.9. Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) > 0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom kladieme

$$R^\alpha(z) := e^{\alpha \operatorname{Ln}[z^0]R(z)} \left(\frac{1}{[z^0]R(z)} R \right)^\alpha (z).$$

Pri skúmaní vlastností takto definovaných mocnín formálnych mocninových radov sa nám zíde nasledujúce tvrdenie, ktoré je zovšeobecnením dobre známej kombinatorickej identity.

Lema 2.10.10 (Vandermondova konvolúcia)**.** *Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}.$$

Dôkaz. Po rozpísaní definície zovšeobecnených binomických koeficientov dostávame

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{n-k}}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{n-k}}. \tag{2.10}$$

Indukciou na $n \in \mathbb{N}$ teraz dokážeme, že

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{n-k}} = (\alpha+\beta)^{\underline{n}}. \tag{2.11}$$

Pre $n = 0$ je

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{0-k}} = 1 = (\alpha+\beta)^{\underline{0}}.$$

Ak ďalej tvrdenie platí pre $n = s$, pre $n = s+1$ je

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{s+1} \binom{s+1}{k} \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{s+1-k}} &= \alpha^{\underline{s+1}} + \beta^{\underline{s+1}} + \sum_{k=1}^{s} \binom{s+1}{k} \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{s+1-k}} = \\
&= \alpha^{\underline{s+1}} + \beta^{\underline{s+1}} + \sum_{k=1}^{s} \left(\binom{s}{k-1} + \binom{s}{k} \right) \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{s+1-k}} = \\
&= \sum_{k=1}^{s+1} \binom{s}{k-1} \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{s-k+1}} + \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{s-k+1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \alpha^{\underline{k+1}} \beta^{\underline{s-k}} + \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{s-k+1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} (\alpha - k) \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{s-k}} + \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} (\beta - s + k) \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{s-k}} = \\
&= \sum_{k=0}^{s} (\alpha + \beta - s) \binom{s}{k} \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{s-k}} = (\alpha + \beta - s) \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{s-k}} = \\
&= (\alpha + \beta - s) \, (\alpha + \beta)^{\underline{s}} = (\alpha+\beta)^{\underline{s+1}}.
\end{aligned}$$

Z (2.10) a práve dokázaného vzťahu (2.11) tak dostávame

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{\underline{k}} \beta^{\underline{n-k}} = \frac{1}{n!} \, (\alpha+\beta)^{\underline{n}} = \binom{\alpha+\beta}{n},$$

čo bolo treba dokázať. $\square$

Tvrdenie 2.10.11. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) > 0$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Potom*

a) $R^\alpha(z)R^\beta(z) = R^{\alpha+\beta}(z)$;

b) $1/R^\alpha(z) = R^{-\alpha}(z)$.

Dôkaz. Uvažujme najprv prípad, keď $[z^0]R(z) = 1$ a označme $\hat{R}(z) := R(z) - 1$. Potom

$$\begin{aligned} R^\alpha(z)R^\beta(z) &= \left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha \left(1+\hat{R}(z)\right)^\beta = \left(\sum_{s=0}^{\infty}\binom{\alpha}{s}\hat{R}^s(z)\right)\left(\sum_{t=0}^{\infty}\binom{\beta}{t}\hat{R}^t(z)\right) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\binom{\alpha}{s}\binom{\beta}{t}\hat{R}^s(z)\hat{R}^t(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\hat{R}^k(z)\hat{R}^{n-k}(z) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\hat{R}^n(z)\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{n}\hat{R}^n(z) = \left(1+\hat{R}(z)\right)^{\alpha+\beta} = R^{\alpha+\beta}(z). \end{aligned}$$

Pre všeobecné $[z^0]R(z) > 0$ ďalej z dokázaného

$$\begin{aligned} R^\alpha(z)R^\beta(z) &= e^{\alpha \operatorname{Ln}[z^0]R(z)}\left(\frac{1}{[z^0]R(z)}R\right)^\alpha(z)\, e^{\beta \operatorname{Ln}[z^0]R(z)}\left(\frac{1}{[z^0]R(z)}R\right)^\beta(z) = \\ &= e^{(\alpha+\beta)\operatorname{Ln}[z^0]R(z)}\left(\frac{1}{[z^0]R(z)}R\right)^{\alpha+\beta}(z) = R^{\alpha+\beta}(z). \end{aligned}$$

Tým je dokázané tvrdenie a), z ktorého tiež vyplýva

$$R^\alpha(z)R^{-\alpha}(z) = R^{\alpha-\alpha}(z) = R^0(z) = 1.$$

Nutne teda

$$\frac{1}{R^\alpha(z)} = R^{-\alpha}(z)$$

a dokázané je aj tvrdenie b). □

Tvrdenie 2.10.12. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) = 1$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom*

$$\operatorname{Ln}\left(R^\alpha(z)\right) = \alpha \operatorname{Ln} R(z).$$

Dôkaz. Označme $\hat{R}(z) := R(z) - 1$. Potom

$$[z^0]\operatorname{Ln}\left(R^\alpha(z)\right) = [z^0]\operatorname{Ln}\left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha = 0$$

a

$$[z^0]\alpha \operatorname{Ln} R(z) = [z^0]\alpha \operatorname{Ln}\left(1+\hat{R}(z)\right) = 0.$$

Stačí teda dokázať

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{Ln}\left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\alpha \operatorname{Ln}\left(1+\hat{R}(z)\right), \tag{2.12}$$

lebo v takom prípade pre všetky $n \in \mathbb{N}$ bude

$$[z^{n+1}]\operatorname{Ln}\left(R^\alpha(z)\right) = \frac{1}{n+1}[z^n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{Ln}\left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha = \frac{1}{n+1}[z^n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\alpha \operatorname{Ln}\left(1+\hat{R}(z)\right) = [z^{n+1}]\alpha \operatorname{Ln} R(z),$$

z čoho vyplynie dokazovaná rovnosť $\mathrm{Ln}\,(R^\alpha(z)) = \alpha\,\mathrm{Ln}\,R(z)$. Dokážme teda rovnosť (2.12):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Ln}\left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha\right)\frac{1}{\left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha} = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\hat{R}^n(z)\right)\frac{1}{\left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha} = \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}\hat{R}^{n-1}(z)\hat{R}'(z)\right)\frac{1}{\left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha} = \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{\underline{n}}}{(n-1)!}\hat{R}^{n-1}(z)\hat{R}'(z)\right)\frac{1}{\left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha} = \\
&= \alpha\hat{R}'(z)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(\alpha-1)^{\underline{n-1}}}{(n-1)!}\hat{R}^{n-1}(z)\right)\frac{1}{\left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha} = \\
&= \alpha\hat{R}'(z)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(\alpha-1)^{\underline{n}}}{n!}\hat{R}^{n}(z)\right)\frac{1}{\left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha} = \\
&= \alpha\hat{R}'(z)\frac{\left(1+\hat{R}(z)\right)^{\alpha-1}}{\left(1+\hat{R}(z)\right)^\alpha} = \alpha\hat{R}'(z)\frac{1}{1+\hat{R}(z)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\alpha\,\mathrm{Ln}\left(1+\hat{R}(z)\right). \qquad \square
\end{aligned}$$

Tvrdenie 2.10.13. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom*

$$\mathrm{Ln}\,(R^\alpha(z)) = \alpha\,\mathrm{Ln}\,R(z).$$

Dôkaz. Z tvrdenia 2.10.12 vyplýva

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ln}\,(R^\alpha(z)) &= \mathrm{Ln}\left(e^{\alpha\,\mathrm{Ln}[z^0]R(z)}\left(\frac{1}{[z^0]R(z)}R\right)^\alpha(z)\right) = \mathrm{Ln}\left(e^{\alpha\,\mathrm{Ln}[z^0]R(z)}\right) + \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{[z^0]R(z)}R\right)^\alpha(z) = \\
&= \alpha\,\mathrm{Ln}\left([z^0]R(z)\right) + \alpha\,\mathrm{Ln}\left(\frac{R(z)}{[z^0]R(z)}\right) = \alpha\,\mathrm{Ln}\,(R(z)). \qquad \square
\end{aligned}$$

Tvrdenie 2.10.14. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom*

$$R^\alpha(z) = e^{\alpha\,\mathrm{Ln}(R(z))}.$$

Dôkaz. Vďaka tvrdeniam 2.10.13 a 2.9.5 je

$$\mathrm{Ln}\,(R^\alpha(z)) = \alpha\,\mathrm{Ln}\,(R(z)) = \mathrm{Ln}\left(e^{\alpha\,\mathrm{Ln}(R(z))}\right).$$

Dokazovaná rovnosť potom vyplýva z časti d) tvrdenia 2.9.4. $\square$

2.11 Nekonečné súčiny

Na záver nášho skúmania operácií na obore integrity formálnych mocninových radov $\mathbb{C}[\![z]\!]$ sa ešte v krátkosti pristavme pri nekonečných súčinoch. Podobne ako v prípade nekonečných súčtov nebudú definované všetky nekonečné súčiny, ale budeme musieť klásť vhodné obmedzujúce podmienky na príslušný systém formálnych mocninových radov.

Definícia 2.11.1. Nech $(R_k(z) \mid k \in I)$ je systém formálnych mocninových radov taký, že

(i) pre všetky $k \in I$ je $[z^0]R_k(z) = 1$ a

(ii) pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je množina $I(n) = \{k \in I \mid [z^n]R_k(z) \neq 0\}$ konečná.

Súčinom systému $(R_k(z) \mid k \in I)$ potom nazveme formálny mocninový rad

$$\left(\prod_{k \in I} R_k\right)(z) = \prod_{k \in I} R_k(z)$$

taký, že

$$[z^0]\left(\prod_{k \in I} R_k\right)(z) = 1$$

a pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je

$$[z^n]\left(\prod_{k \in I} R_k\right)(z) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ j_1, \ldots, j_m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ j_1 + \ldots + j_m = n}} \sum_{\substack{k_1 \in I(j_1) \\ \vdots \\ k_m \in I(j_m)}} \prod_{t=1}^{m} [z^{j_t}]R_{k_t}(z).$$

Všetky súčty a súčiny vystupujúce v definícii koeficientov radu $\prod_{k \in I} R_k(z)$ sú pritom evidentne konečné.

Kapitola 3

Kombinatorické triedy a symbolická metóda

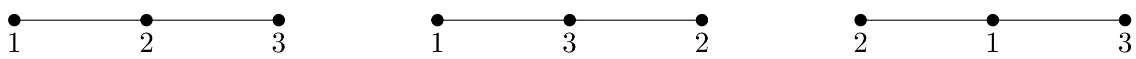
Ako hlavný objekt skúmania enumeratívnej kombinatoriky sme v predchádzajúcej kapitole identifikovali *kombinatorické triedy* a ich *vytvárajúce funkcie* – formálne mocninové rady, ktorých koeficienty tvoria *enumeračnú postupnosť* príslušnej kombinatorickej triedy. Teraz sa ku kombinatorickým triedam vrátime a opíšeme techniky umožňujúce prejsť od *špecifikácie* kombinatorickej triedy – čiže jej vyjadrenia pomocou určitých elementárnych kombinatorických tried a štandardných operácií na nich – k *vytvárajúcej funkcii* tejto kombinatorickej triedy.

Teória, ktorej základy v tejto kapitole preskúmame, má množstvo rozmanitých historických východísk. V ucelenej podobe ju po prvý raz opísali P. Flajolet a R. Sedgewick v prvej časti ich knihy [3]. Z knihy [3] vychádza aj väčšia časť tejto kapitoly.

3.1 Označené a neoznačené objekty

V enumeratívnej kombinatorike často rozlišujeme medzi enumeráciou *neoznačených* a *označených* objektov. Tento rozdiel možno asi najlepšie ilustrovať na úlohách o enumerácii grafov: v neoznačenom grafe sa každé dva vrcholy *a priori* chápu ako identické, v označenom grafe má naopak každý vrchol svoj jednoznačný identifikátor (číslo resp. názov), ktorý ho odlišuje od ostatných. Existuje tak napríklad *jediný strom o troch neoznačených vrcholoch*, ktorý je znázornený na obrázku 3.1. Na obrázku 3.2 sú naopak znázornené všetky *tri stromy o troch označených vrcholoch*, kde množina vrcholov je $\{1, 2, 3\}$.

Obr. 3.1: Jediný strom o troch neoznačených vrcholoch.



Obr. 3.2: Všetky tri stromy o troch označených vrcholoch $1, 2, 3$.

Vo všeobecnosti možno povedať, že neoznačené kombinatorické objekty sú vybudované z atomických objektov niekoľkých druhov, pričom atomické objekty jedného druhu sú samé o sebe vzájomne nerozlíšiteľné – napríklad neoznačený graf je vybudovaný z niekoľkých vzájomne *a priori* nerozlíšiteľných vrcholov. Naopak označené kombinatorické objekty sú vybudované z atomických objektov, ktorým sú navyše „zvonku“ priradené ich identifikátory z nejakej pevne danej množiny.

Rozdiel medzi neoznačeným a označeným kombinatorickým objektom je často viac metodický, než vecný – uvidíme napríklad, že slová nad danou abecedou možno rovnako dobre chápať ako neoznačené aj ako označené objekty. Napriek tomu sa ale ukazuje, že k enumerácii neoznačených a označených objektov je žiadúce pristupovať podstatne odlišným spôsobom – v čom presne tento rozdiel spočíva, uvidíme v nasledujúcich niekoľkých oddieloch.

3.2 Kombinatorické triedy neoznačených objektov

Kombinatorické triedy a elementárne operácie na nich v podobe, v akej sme ich definovali v oddiele 2.1, budeme obyčajne používať pri enumerácii *neoznačených* objektov – v tejto súvislosti preto tiež hovoríme o *kombinatorických triedach neoznačených objektov.* Pripomeňme si definíciu kombinatorickej triedy a jej obyčajnej vytvárajúcej funkcie.

Definícia 3.2.1. *Kombinatorická trieda* je dvojica $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|)$, kde $\mathcal{C}$ je množina a $|\cdot|\colon \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ je zobrazenie také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je množina $\mathcal{C}_n := \{x \in \mathcal{C} \mid |x| = n\}$ konečná.

Definícia 3.2.2. *Enumeračnou postupnosťou* kombinatorickej triedy $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ nazývame nekonečnú postupnosť prirodzených čísel $(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $c_n = |\mathcal{C}_n|$.

Definícia 3.2.3. *Obyčajnou vytvárajúcou funkciou* kombinatorickej triedy $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ s enumeračnou postupnosťou $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ nazývame formálny mocninový rad

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in \mathbb{N}[\![z]\!] \subseteq \mathbb{C}[\![z]\!].$$

Obyčajná vytvárajúca funkcia kombinatorickej triedy $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ je teda aj obyčajnou vytvárajúcou funkciou jej enumeračnej postupnosti. Pripomeňme si tiež, že v princípe *neexistuje žiaden rozdiel medzi enumeračnou postupnosťou a obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy* – dôvod pre použitie odlišnej terminológie spočíva v odlišnej algebre uvažovanej na vytvárajúcich funkciách, ktorá lepšie korešponduje s najdôležitejšími operáciami na kombinatorických triedach samotných.

Kombinatorické triedy budeme štandardne označovať veľkými kaligrafickými písmenami, napríklad $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ Príslušné obyčajné vytvárajúce funkcie potom typicky označujeme $A(z), B(z), C(z), \ldots$ a ich postupnosti koeficientov – čiže enumeračné postupnosti uvažovaných tried – zvyčajne označujeme $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}, (c_n)_{n=0}^{\infty}, \ldots$

Nasledujúce jednoduché tvrdenie hovorí o alternatívnom vyjadrení obyčajnej vytvárajúcej funkcie kombinatorickej triedy – niekedy sa hovorí o takzvanom jej *kombinatorickom tvare.*

Tvrdenie 3.2.4. *Nech $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|)$ je kombinatorická trieda a $C(z)$ je jej obyčajná vytvárajúca funkcia. Potom*

$$C(z) = \sum_{x \in \mathcal{C}} z^{|x|},$$

kde súčet je cez lokálne konečný systém radov.

Dôkaz. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathcal{C}$ je $[z^n]z^{|x|} \neq 0$ práve vtedy, keď $x \in \mathcal{C}_n$. Keďže je množina $\mathcal{C}_n$ konečná pre všetky $n \in \mathbb{N}$, je uvažovaný systém radov lokálne konečný. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ navyše

$$[z^n] \sum_{x \in \mathcal{C}} z^{|x|} = \sum_{x \in \mathcal{C}_n} [z^n] z^{|x|} = \sum_{x \in \mathcal{C}_n} [z^n] z^n = \sum_{x \in \mathcal{C}_n} 1 = |\mathcal{C}_n| = [z^n] C(z);$$

keďže môže byť $n \in \mathbb{N}$ ľubovoľné, je rovnosť radov dokázaná. □

Definícia 3.2.5. Kombinatorické triedy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sú *izomorfné*, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $|\mathcal{A}_n| = |\mathcal{B}_n|$. V takom prípade píšeme $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ a *izomorfizmom* kombinatorických tried $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ nazývame bijektívne zobrazenie $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $\varphi(\mathcal{A}_n) = \mathcal{B}_n$.

Kombinatorické triedy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sú teda izomorfné práve vtedy, keď sa rovnajú ich obyčajné vytvárajúce funkcie. Izomorfné triedy často stotožňujeme a namiesto $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ píšeme $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

3.3 Symbolická metóda pre neoznačené objekty

Položíme teraz základy takzvanej *symbolickej metódy* pre neoznačené objekty – pôjde o systematický prístup k špecifikácii kombinatorických tried pomocou jednoduchých základných tried a štandardných operácií na kombinatorických triedach, ktorý je v mnohom podobný opisu formálnych jazykov pomocou gramatík. Významnou črtou tohto špecifikačného mechanizmu bude možnosť „mechanického prekladu“ špecifikácie kombinatorickej triedy na jej obyčajnú vytvárajúcu funkciu. Aby bol tento cieľ splniteľný, uvažované operácie na kombinatorických triedach nemôžu byť úplne ľubovoľné, ale musí byť možné definovať k nim prislúchajúce operácie na vytvárajúcich funkciách – môžu teda závisieť iba od enumeračných postupností kombinatorických tried, ktoré sú jej argumentmi. Takéto operácie nazývame *prípustnými konštrukciami.*

Definícia 3.3.1. Nech $m \in \mathbb{N}$ a Φ je čiastočné m-árne zobrazenie, ktoré m-ticiam kombinatorických tried $\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)}$ priraďuje kombinatorické triedy

$$\mathcal{A} = \Phi\left(\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)}\right).$$

Hovoríme, že Φ je *prípustná konštrukcia*, ak pre kombinatorické triedy $\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)}, \mathcal{C}^{(1)}, \ldots, \mathcal{C}^{(m)}$ spĺňajúce $\mathcal{B}^{(k)} \cong \mathcal{C}^{(k)}$ pre $k = 1, \ldots, m$ je $\Phi\left(\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)}\right)$ definované práve vtedy, keď je definované $\Phi\left(\mathcal{C}^{(1)}, \ldots, \mathcal{C}^{(m)}\right)$, pričom v takom prípade je

$$\Phi\left(\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)}\right) \cong \Phi\left(\mathcal{C}^{(1)}, \ldots, \mathcal{C}^{(m)}\right).$$

Ku každej prípustnej konštrukcii tak prislúcha čiastočné zobrazenie $\phi\colon \mathbb{N}[\![z]\!]^m \to \mathbb{N}[\![z]\!]$ také, že pre ľubovoľné kombinatorické triedy $\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)}$ s definovaným výstupom čiastočného zobrazenia Φ a s obyčajnými vytvárajúcimi funkciami $B_1(z), \ldots, B_m(z)$ je

$$A(z) = \phi(B_1(z), \ldots, B_m(z))$$

obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\mathcal{A} = \Phi\left(\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)}\right)$. V nasledujúcich partiách tohto oddielu budeme budovať „slovník“ medzi štandardnými prípustnými konštrukciami Φ na kombinatorických triedach a príslušnými operáciami ϕ na ich obyčajných vytvárajúcich funkciách.

Neutrálne a atomické triedy. Základnými stavebnými kameňmi konštrukcií kombinatorických tried pomocou symbolickej metódy sú špeciálne jednoprvkové kombinatorické triedy – v prípade, že je jediný prvok takejto kombinatorickej triedy veľkosti 0, hovoríme o *neutrálnej triede*; triedu s jediným prvkom veľkosti 1 naopak nazývame *atomickou.*

Neutrálnou triedou teda rozumieme kombinatorickú triedu $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, |\cdot|)$ takú, že $\mathcal{E} = \{1_\mathcal{E}\}$ a $|1_\mathcal{E}| = 0$. Neutrálne triedy typicky označujeme $\mathcal{E}$ s prípadným indexom určujúcim ich jediný prvok $1_\mathcal{E}$ – píšeme teda napríklad $\mathcal{E}_\varepsilon = \{\varepsilon\}$, $\mathcal{E}_\square = \{\square\}$ a podobne.

Atomickou triedou nazývame kombinatorickú triedu $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}, |\cdot|)$ takú, že $\mathcal{Z} = \{z_\mathcal{Z}\}$ a $|z_\mathcal{Z}| = 1$. Atomické triedy obyčajne označujeme $\mathcal{Z}$, často s indexom určujúcim ich jediný prvok $z_\mathcal{Z}$ – napríklad $\mathcal{Z}_a = \{a\}$, $\mathcal{Z}_\bullet = \{\bullet\}$, $\mathcal{Z}_\circ = \{\circ\}$, atď.

Obyčajnou vytvárajúcou funkciou každej neutrálnej triedy je evidentne 1 a obyčajnou vytvárajúcou funkciou každej atomickej triedy je z.

Disjunktné zjednotenie. Operáciu *disjunktného zjednotenia* alebo *kombinatorického súčtu* dvoch kombinatorických tried sme už zaviedli v definícii 2.1.3 – *disjunktným zjednotením* kombinatorických tried $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_\mathcal{C})$ a $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, |\cdot|_\mathcal{D})$ nazývame kombinatorickú triedu $\mathcal{C} + \mathcal{D} = (\mathcal{C} + \mathcal{D}, |\cdot|)$ takú, že pre všetky $x \in \mathcal{C}$ je $|(x, 1)| = |x|_\mathcal{C}$ a pre všetky $y \in \mathcal{D}$ je $|(y, 2)| = |y|_\mathcal{D}$.

Videli sme tiež, že obyčajnou vytvárajúcou funkciou disjunktného zjednotenia dvoch kombinatorických tried je *súčet* obyčajných vytvárajúcich funkcií týchto tried – toto pozorovanie teraz vyslovíme v podobe vety, ktorú možno považovať za prvý záznam v „slovníku“ prípustných konštrukcií na kombinatorických triedach a k nim prislúchajúcich operácií na obyčajných vytvárajúcich funkciách.

Veta 3.3.2. *Disjunktné zjednotenie je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach. Ak sú navyše $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ kombinatorické triedy s obyčajnými vytvárajúcimi funkciami $C(z)$ resp. $D(z)$, je obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ formálny mocninový rad*

$$C(z) + D(z).$$

Dôkaz. Vyplýva bezprostredne z vety 2.1.7. □

Karteziánsky súčin. Ďalšou nám už dobre známou operáciou na kombinatorických triedach je ich *karteziánsky súčin*, ktorý sme zaviedli v definícii 2.1.5 – bola to práve táto operácia, ktorá nás doviedla k potrebe zavedenia pojmu obyčajnej vytvárajúcej funkcie. *Karteziánskym súčinom* kombinatorických tried $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}})$ a $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, |\cdot|_{\mathcal{D}})$ nazývame kombinatorickú triedu $\mathcal{C} \times \mathcal{D} = (\mathcal{C} \times \mathcal{D}, |\cdot|)$ takú, že pre všetky $x \in \mathcal{C}$ a $y \in \mathcal{D}$ je $|(x, y)| = |x|_{\mathcal{C}} + |y|_{\mathcal{D}}$.

Nasledujúca veta je opäť iba pripomenutím dôležitého pozorovania učineného už v predchádzajúcej kapitole.

Veta 3.3.3. *Karteziánsky súčin je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach. Ak sú navyše $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ kombinatorické triedy s obyčajnými vytvárajúcimi funkciami $C(z)$ resp. $D(z)$, je obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ formálny mocninový rad*

$$C(z) \cdot D(z).$$

Dôkaz. Vyplýva bezprostredne z vety 2.1.7. □

Operácie $+$ a $\times$ na kombinatorických triedach chápeme ako asociatívne, čo je nie je prekvapivé v kontexte stotožňovania izomorfných kombinatorických tried: keďže pre ľubovoľné kombinatorické triedy $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ je zrejme

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} \cong \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C})$$

a

$$(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C} \cong \mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}),$$

píšeme obvykle

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}) =: \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}$$

a

$$(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C} = \mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) =: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}.$$

Je ďalej zrejmé, že neutrálne triedy – resp. po stotožnení izomorfných kombinatorických tried môžeme hovoriť o jedinej neutrálnej triede – zohrávajú úlohu neutrálneho prvku vzhľadom na operáciu karteziánskeho súčinu: pre ľubovoľnú kombinatorickú triedu $\mathcal{C}$ a neutrálnu triedu $\mathcal{E}$ je

$$\mathcal{C} \times \mathcal{E} \cong \mathcal{E} \times \mathcal{C} \cong \mathcal{C},$$

pričom často píšeme aj

$$\mathcal{C} \times \mathcal{E} = \mathcal{E} \times \mathcal{C} = \mathcal{C}.$$

Mocniny. Keďže karteziánsky súčin kombinatorických tried bežne chápeme ako asociatívnu operáciu, môžeme pre všetky $k \in \mathbb{N}$ definovať *k-tu mocninu* kombinatorickej triedy $\mathcal{C}$ bežným induktívnym spôsobom: $\mathcal{C}^0$ definujeme ako neutrálnu triedu $\mathcal{E}$ a pre všetky $k \in \mathbb{N}$ kladieme $\mathcal{C}^{k+1} = \mathcal{C}^k \times \mathcal{C}$.

Kombinatorická trieda $\mathcal{C}^k$ pozostáva zo všetkých *postupností dĺžky* k tvorených prvkami kombinatorickej triedy $\mathcal{C}$, pričom pod veľkosťou postupnosti rozumieme súčet veľkostí všetkých jej členov. Pre $k \in \mathbb{N}$ a kombinatorickú triedu $\mathcal{C}$ preto píšeme aj

$$\textsc{Seq}_k(\mathcal{C}) := \mathcal{C}^k.$$

Veta 3.3.4. *Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ je k-ta mocnina prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda s obyčajnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$, je obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\mathcal{C}^k = \textsc{Seq}_k(\mathcal{C})$ formálny mocninový rad*

$$C^k(z).$$

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 0$ je $\mathcal{C}^0 = \mathcal{E}$, pričom obyčajnou vytvárajúcou funkciou triedy $\mathcal{E}$ je $1 = C^0(z)$. Ak tvrdenie platí pre $k = s$, pre $k = s + 1$ je $\mathcal{C}^{s+1} = \mathcal{C}^s \times \mathcal{C}$; obyčajnou vytvárajúcou funkciou triedy $\mathcal{C}$ je pritom $C(z)$ a z indukčného predpokladu vyplýva, že obyčajnou vytvárajúcou funkciou triedy $\mathcal{C}^s$ je $C^s(z)$. Vďaka vete 3.3.3 je teda obyčajná vytvárajúca funkcia triedy $\mathcal{C}^{s+1} = \mathcal{C}^s \times \mathcal{C}$ daná ako $C^s(z)C(z) = C^{s+1}(z)$. □

Trieda konečných postupností. Nech $\mathcal{C}$ je kombinatorická trieda taká, že $\mathcal{C}_0 = \emptyset$. *Triedu konečných postupností* objektov triedy $\mathcal{C}$ potom definujeme ako

$$\textsc{Seq}(\mathcal{C}) := \mathcal{E} + \mathcal{C} + (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) + (\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k,$$

kde $\mathcal{E}$ je neutrálna trieda. Táto kombinatorická trieda $(\textsc{Seq}(\mathcal{C}), |\cdot|_{\textsc{Seq}(\mathcal{C})})$ teda pozostáva zo všetkých postupností $(x_1, \ldots, x_k)$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{C}$, pričom veľkosť každej postupnosti je daná súčtom veľkostí jej členov. Keďže je $\mathcal{C}_0 = \emptyset$, môže pre $n \in \mathbb{N}$ byť

$$|(x_1, \ldots, x_k)|_{\textsc{Seq}(\mathcal{C})} = n$$

iba ak $k \leq n$ a pre $j = 1, \ldots, k$ je x_j prvkom konečnej množiny $\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n$. Trieda $\textsc{Seq}(\mathcal{C})$ tak naozaj obsahuje pre všetky $n \in \mathbb{N}$ iba konečne veľa objektov veľkosti n – je teda dobre definovaná.

Veta 3.3.5. *Prechod k triede konečných postupností je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda s $\mathcal{C}_0 = \emptyset$ a s obyčajnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$, je obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy* $\textsc{Seq}(\mathcal{C})$ *formálny mocninový rad*

$$\frac{1}{1 - C(z)}.$$

Dôkaz. Keďže $\mathcal{C}_0 = \emptyset$, je $[z^0]C(z) = 0$ a rad $1/(1 - C(z))$ je dobre definovaný. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je teraz

$$|(\textsc{Seq}(\mathcal{C}))_n| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \left(\mathcal{C}^k\right)_n \right| = \sum_{k=0}^{\infty} [z^n] C^k(z),$$

kde obidva súčty sú v skutočnosti konečné. Vďaka tvrdeniu 2.7.3 je systém radov $(C^k(z) \mid k \in \mathbb{N})$ lokálne konečný, takže

$$|(\textsc{Seq}(\mathcal{C}))_n| = \sum_{k=0}^{\infty} [z^n] C^k(z) = [z^n] \sum_{k=0}^{\infty} C^k(z) = [z^n] \frac{1}{1 - C(z)}.$$

Číslo $n \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné – rad $1/(1 - C(z))$ teda musí byť obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\textsc{Seq}(\mathcal{C})$. □

Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a ľubovoľnú kombinatorickú triedu $\mathcal{C}$ spĺňajúcu $\mathcal{C}_0 = \emptyset$ ďalej kladieme

$$\textsc{Seq}_{\geq k}(\mathcal{C}) := \mathcal{C}^k \times \textsc{Seq}(\mathcal{C});$$

ide teda o triedu všetkých postupností dĺžky aspoň k pozostávajúcich z objektov triedy $\mathcal{C}$, pričom veľkosť postupnosti je daná súčtom veľkostí jej členov. Z dokázaného vyplýva, že pre kombinatorickú triedu $\mathcal{C}$ s $\mathcal{C}_0 = \emptyset$ a s obyčajnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$ je obyčajná vytvárajúca funkcia kombinatorickej triedy $\textsc{Seq}_{\geq k}$ daná ako $C^k(z)/(1 - C(z))$.

Trieda konečných podmnožín. Nech $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|)$ je kombinatorická trieda. *Triedou konečných podmnožín* kombinatorickej triedy $\mathcal{C}$ nazveme kombinatorickú triedu $\textsc{PSet}(\mathcal{C}) = (\textsc{PSet}(\mathcal{C}), |\cdot|_{\textsc{PSet}(\mathcal{C})})$, kde

$$\textsc{PSet}(\mathcal{C}) := \binom{\mathcal{C}}{0} \cup \binom{\mathcal{C}}{1} \cup \binom{\mathcal{C}}{2} \cup \ldots = \bigcup_{k=0}^{\infty} \binom{\mathcal{C}}{k}$$

je množina všetkých konečných podmnožín $\mathcal{C}$ a pre všetky konečné množiny $S \subseteq \mathcal{C}$ je

$$|S|_{\textsc{PSet}(\mathcal{C})} = \sum_{x \in S} |x|;$$

veľkosť konečnej podmnožiny $\mathcal{C}$ je teda daná súčtom veľkostí jej prvkov.

Obyčajnú vytvárajúcu funkciu kombinatorickej triedy $\textsc{PSet}(\mathcal{C})$ identifikujeme najprv za predpokladu, že $\mathcal{C}_0 = \emptyset$ – tento prípad je zďaleka najvýznamnejší, pričom P. Flajolet a R. Sedgewick [3] dokonca kombinatorickú triedu $\textsc{PSet}(\mathcal{C})$ definujú *iba* za uvedeného predpokladu.

Veta 3.3.6. *Prechod k triede konečných podmnožín kombinatorickej triedy bez prvkov nulovej veľkosti je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda s $\mathcal{C}_0 = \emptyset$, s obyčajnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$ a s enumeračnou postupnosťou $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, je obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\textsc{PSet}(\mathcal{C})$ formálny mocninový rad*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^n)^{c_n} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C(z^k)\right).$$

Dôkaz. Systém radov $((1 + z^n)^{c_n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ zrejme spĺňa podmienky definície 2.11.1 – nekonečný súčin zo znenia vety je teda dobre definovaný. Rovnako tak je dobre definovaný aj nekonečný súčet zo znenia vety, pretože systém sumovaných radov je evidentne lokálne konečný.

Vetu dokážeme najprv v prípade, keď je nosná množina $\mathcal{C}$ kombinatorickej triedy $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|)$ konečná. V takom prípade je zrejme[1]

$$\textsc{PSet}(\mathcal{C}) \cong \prod_{x \in \mathcal{C}} (\mathcal{E} + \{x\}),$$

kde $\mathcal{E} = \{\varepsilon\}$ je neutrálna trieda a $\{x\}$ je skráteným zápisom pre jednoprvkovú triedu obsahujúcu objekt x veľkosti $|x|$. Neutrálna trieda $\mathcal{E}$ má obyčajnú vytvárajúcu funkciu 1 a z tvrdenia 3.2.4 vyplýva, že kombinatorická trieda $\{x\}$ má vytvárajúcu funkciu $z^{|x|}$. Vďaka znalosti vytvárajúcich funkcií zodpovedajúcich disjunktnému zjednoteniu a karteziánskemu súčinu kombinatorických tried teda zisťujeme, že vytvárajúca funkcia $P(z)$ kombinatorickej triedy $\textsc{PSet}(\mathcal{C})$ je daná ako

$$P(z) = \prod_{x \in \mathcal{C}} \left(1 + z^{|x|}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^n)^{c_n},$$

kde súčin napravo je v skutočnosti *konečný*, pretože pre konečnú kombinatorickú triedu $\mathcal{C}$ môže existovať iba konečne veľa rôznych $n \in \mathbb{N}$ takých, že $c_n \neq 0$.

[1] Zápis pre konečný karteziánsky súčin na pravej môžeme použiť vďaka konvencii stotožňovania izomorfných tried – na poradí násobenia kombinatorických tried v takom prípade nezáleží.

Keďže evidentne $[z^0]P(z) = 1 > 0$, vďaka tvrdeniu 2.9.5, tvrdeniu 2.9.4 a tvrdeniu 2.10.6 je

$$P(z) = e^{\mathrm{Ln}(P(z))} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\mathrm{Ln}\,(1+z^n)\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^{nk}\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{nk}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C(z^k)\right).$$

Zostáva vetu dokázať v prípade, keď je kombinatorická trieda $\mathcal{C}$ nekonečná. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ označme

$$\mathcal{C}_{\leq n} := \sum_{j=0}^{n} \mathcal{C}_j$$

kombinatorickú triedu pozostávajúcu z objektov triedy $\mathcal{C}$ veľkosti neprevyšujúcej n – táto trieda musí evidentne byť konečná. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ potom zrejme

$$(\mathrm{PS{\small ET}}(\mathcal{C}))_n = (\mathrm{PS{\small ET}}(\mathcal{C}_{\leq n}))_n\,,$$

pretože množina prvkov so súčtom veľkostí n nemôže obsahovať žiaden prvok veľkosti väčšej, než n. Ak je teda $P(z)$ obyčajná vytvárajúca funkcia kombinatorickej triedy $\mathrm{PS{\small ET}}(\mathcal{C})$ a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ označuje $P_{\leq n}(z)$ obyčajnú vytvárajúcu funkciu triedy $\mathrm{PS{\small ET}}(\mathcal{C}_{\leq n})$, pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$[z^n]P(z) = [z^n]P_{\leq n}(z) = [z^n]\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_{\leq n}(z^k)\right),$$

kde

$$C_{\leq n}(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j$$

je obyčajná vytvárajúca funkcia konečnej kombinatorickej triedy $\mathcal{C}_{\leq n}$. Keďže ale pre $j = 0, \ldots, n$ je $[z^j]C_{\leq n}(z) = [z^j]C(z) = c_j$, musí v skutočnosti byť

$$[z^n]P(z) = [z^n]\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_{\leq n}(z^k)\right) = [z^n]\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C(z^k)\right), \tag{3.1}$$

pretože koeficienty $c_j = [z^j]C(z)$ radu $C(z)$ pre $j > n$ evidentne nemôžu ovplyvniť koeficient pri z^n v rade

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C(z^k)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C(z^k)\right)^n$$

na pravej strane rovnosti (3.1). Z rovnosti $[z^n]P(z) = [z^n]P_{\leq n}(z)$ tiež pre všetky $n \in \mathbb{N}$ vyplýva

$$[z^n]P(z) = [z^n]P_{\leq n}(z) = [z^n]\prod_{\ell=1}^{n}\left(1+z^\ell\right)^{c_\ell} = [z^n]\prod_{\ell=1}^{\infty}\left(1+z^\ell\right)^{c_\ell}. \tag{3.2}$$

Z platnosti rovností (3.1) a (3.2) pre všetky $n \in \mathbb{N}$ tak dostávame dokazované vzťahy

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n)^{c_n} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C(z^k)\right). \qquad \square$$

S pomocou vety 3.3.6 teraz ľahko identifikujeme aj obyčajnú vytvárajúcu funkciu kombinatorickej triedy $\textsc{PSet}(\mathcal{C})$, kde $\mathcal{C}_0 \neq \emptyset$.

Veta 3.3.7. *Prechod k triede konečných podmnožín je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda s obyčajnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$ a s enumeračnou postupnosťou $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, je obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy* $\textsc{PSet}(\mathcal{C})$ *formálny mocninový rad*

$$2^{c_0}\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n)^{c_n} = 2^{[z^0]C(z)}\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(C(z^k)-[z^0]C(z)\right)\right).$$

Dôkaz. Nech $\mathcal{C}_{\geq 1} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$ je kombinatorická trieda obsahujúca objekty nenulovej veľkosti z kombinatorickej triedy $\mathcal{C}$; za kombinatorickú triedu navyše môžeme považovať aj podmnožinu $\mathcal{C}_0$ triedy $\mathcal{C}$. Potom zrejme $\textsc{PSet}(\mathcal{C}) \cong \textsc{PSet}(\mathcal{C}_0) \times \textsc{PSet}(\mathcal{C}_{\geq 1})$, pričom vytvárajúcou funkciou triedy $\textsc{PSet}(\mathcal{C}_0)$ je $2^{c_0} = 2^{[z^0]C(z)}$ a vytvárajúcou funkciou triedy $\textsc{PSet}(\mathcal{C}_{\geq 1})$ je

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n)^{c_n} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(C(z^k)-[z^0]C(z)\right)\right). \qquad \square$$

Trieda konečných multimnožín. Nech $\mathcal{C}$ je kombinatorická trieda taká, že $\mathcal{C}_0 = \emptyset$. *Triedu konečných multimnožín* objektov z kombinatorickej triedy $\mathcal{C}$ získame z triedy $(\textsc{Seq}(\mathcal{C}), |\cdot|_{\textsc{Seq}(\mathcal{C})})$ stotožnením tých konečných postupností, ktoré obsahujú rovnaký počet výskytov každého objektu $x \in \mathcal{C}$. Na $\textsc{Seq}(\mathcal{C})$ teda definujeme reláciu ekvivalencie $\equiv$ takú, že pre $(x_1,\ldots,x_k),(y_1,\ldots,y_\ell) \in \textsc{Seq}(\mathcal{C})$ je

$$(x_1,\ldots,x_k) \equiv (y_1,\ldots,y_\ell)$$

práve vtedy, keď $k=\ell$ a súčasne existuje permutácia $\varphi\colon [k] \to [k]$ taká, že pre $j=1,\ldots,k$ je $x_j = y_{\varphi(j)}$. Je zrejmé, že pre takúto dvojicu postupností musí vždy byť

$$|(x_1,\ldots,x_k)|_{\textsc{Seq}(\mathcal{C})} = |(y_1,\ldots,y_\ell)|_{\textsc{Seq}(\mathcal{C})}.$$

Kombinatorickú triedu $\textsc{MSet}(\mathcal{C}) = (\textsc{MSet}(\mathcal{C}), |\cdot|)$, pozostávajúcu zo všetkých konečných multimnožín objektov triedy $\mathcal{C}$, tak môžeme korektne definovať ako

$$\textsc{MSet}(\mathcal{C}) := \textsc{Seq}(\mathcal{C})/{\equiv},$$

kde pre každú postupnosť $(x_1,\ldots,x_k) \in \textsc{Seq}(\mathcal{C})$ je veľkosť triedy $[(x_1,\ldots,x_k)]_{\equiv} \in \textsc{MSet}(\mathcal{C})$ daná ako

$$|[(x_1,\ldots,x_k)]_{\equiv}| = |(x_1,\ldots,x_k)|_{\textsc{Seq}(\mathcal{C})}.$$

Veta 3.3.8. *Prechod k triede konečných multimnožín je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda s $\mathcal{C}_0 = \emptyset$, s obyčajnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$ a s enumeračnou postupnosťou $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, je obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy* $\textsc{MSet}(\mathcal{C})$ *formálny mocninový rad*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-z^n)^{c_n}} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}C(z^k)\right).$$

Dôkaz. Ľahko vidieť, že systém radov $((1-z^n)^{-c_n} \mid n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$ spĺňa podmienky definície 2.11.1 a systém radov $((1/k)C(z^k) \mid k \in \mathbb{N})$ je lokálne konečný – znenie vety teda dáva zmysel.

Vetu opäť dokážeme najprv v prípade, keď je kombinatorická trieda $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|)$ konečná. V takom prípade je

$$\mathrm{MS{\scriptsize ET}}(\mathcal{C}) \cong \prod_{x\in\mathcal{C}} \mathrm{S{\scriptsize EQ}}(\{x\}), \tag{3.3}$$

kde $\{x\}$ je skrátený zápis pre kombinatorickú triedu obsahujúcu jediný prvok x veľkosti $|x|$. Ak je totiž $\mathcal{C} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, možno ľubovoľnú multimnožinu objektov z $\mathcal{C}$ reprezentovať aj ako konečnú postupnosť postupností

$$\Bigg(\underbrace{(x_1, \ldots, x_1)}_{k_1}, \underbrace{(x_2, \ldots, x_2)}_{k_2}, \ldots, \underbrace{(x_m, \ldots, x_m)}_{k_m}\Bigg),$$

kde $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ sú – vo všeobecnosti aj nulové – počty výskytov objektov $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{C}$ v danej multimnožine.

Zo vzťahu (3.3) dostávame prvý z dokazovaných vzorcov pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $M(z)$ triedy $\mathrm{MS{\scriptsize ET}}(\mathcal{C})$:

$$M(z) = \prod_{x\in\mathcal{C}} \frac{1}{1 - z^{|x|}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - z^n)^{c_n}},$$

kde aj druhý zo súčinov je konečný – existuje totiž iba konečne veľa $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takých, že $c_n \neq 0$. Keďže evidentne $[z^0]M(z) = 1 > 0$, z tvrdenia 2.9.5, tvrdenia 2.9.4 a tvrdenia 2.10.6 dostávame

$$M(z) = e^{\mathrm{Ln}(M(z))} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -c_n \,\mathrm{Ln}(1 - z^n)\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -c_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(-1)^k z^{nk}\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{nk}}{k}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{nk}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C(z^k)\right).$$

Dôkaz pre nekonečné kombinatorické triedy je podobný ako v prípade tried konečných podmnožín: ľahko vidieť, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$(\mathrm{MS{\scriptsize ET}}(\mathcal{C}))_n = (\mathrm{MS{\scriptsize ET}}(\mathcal{C}_{\leq n}))_n\,,$$

kde $\mathcal{C}_{\leq n}$ je konečná trieda $\mathcal{C}_{\leq n} := \sum_{j=0}^{n} \mathcal{C}_j$. Ak je teda $M(z)$ vytvárajúca funkcia triedy $\mathrm{MS{\scriptsize ET}}(\mathcal{C})$ a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $M_{\leq n}(z)$ vytvárajúca funkcia triedy $\mathrm{MS{\scriptsize ET}}(\mathcal{C}_{\leq n})$, musí pre všetky $n \in \mathbb{N}$ byť

$$[z^n]M(z) = [z^n]M_{\leq n}(z) = [z^n]\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C_{\leq n}(z^k)\right),$$

kde $C_{\leq n}(z)$ je obyčajná vytvárajúca funkcia triedy $\mathcal{C}_{\leq n}(z)$. Pre $j = 0, \ldots, n$ je ale

$$[z^j]C_{\leq n}(z) = [z^j]C(z) = c_j,$$

takže v skutočnosti musí byť aj

$$[z^n]M(z) = [z^n]\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C_{\leq n}(z^k)\right) = [z^n]\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C(z^k)\right),$$

pretože koeficienty $c_j = [z^j]C(z)$ radu $C(z)$ pre $j > n$ nemôžu ovplyvniť koeficient pri z^n v rade

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C(z^k)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C(z^k)\right)^n$$

V dôsledku rovnosti $[z^n]M(z) = [z^n]M_{\leq n}(z)$ tiež dostávame

$$[z^n]M(z) = [z^n]M_{\leq n}(z) = [z^n]\prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(1 - z^\ell)^{c_\ell}} = [z^n]\prod_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - z^\ell)^{c_\ell}}. \qquad \square$$

Punktácia. Pod *punktáciou* kombinatorickej triedy $\mathcal{C}$ rozumieme triedu $\Theta\mathcal{C}$ pozostávajúcu z objektov triedy $\mathcal{C}$, v ktorých je navyše „jeden spomedzi atómov určený ako význačný“. Príkladom môže byť trieda všetkých slov nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ s práve jedným označeným písmenom, ktorú získame punktáciou z triedy všetkých slov nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Formálne definujeme *punktáciu* kombinatorickej triedy $(\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}})$ ako triedu $(\Theta\mathcal{C}, |\cdot|)$, kde

$$\Theta\mathcal{C} := \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \times \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$$

a pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathcal{C}_n$ a $k = 1, \ldots, n$ je $|(x, \varepsilon_k)| := |x|_{\mathcal{C}}$.

Veta 3.3.9. *Punktácia je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická tried s obyčajnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$, je obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\Theta\mathcal{C}$ formálny mocninový rad*

$$z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}C(z).$$

Dôkaz. Pre $n = 0$ je

$$|(\Theta\mathcal{C})_n| = 0 = [z^n]z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}C(z)$$

a pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je

$$|(\Theta\mathcal{C})_n| = n\,|\mathcal{C}_n| = n[z^n]C(z) = n\frac{1}{n}[z^{n-1}]C'(z) = [z^{n-1}]C'(z) = [z^n]z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}C(z).$$

Obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\Theta\mathcal{C}$ teda musí byť $zC'(z)$. $\square$

Substitúcia. Pod *substitúciou* kombinatorickej triedy $\mathcal{D}$ spĺňajúcej $\mathcal{D}_0 = \emptyset$ do triedy $\mathcal{C}$ – resp. pod *zložením* kombinatorických tried $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ – rozumieme kombinatorickú triedu $\mathcal{C} \circ \mathcal{D} = \mathcal{C}[\mathcal{D}]$ pozostávajúcu z objektov triedy $\mathcal{C}$, v ktorých je „každý atóm nahradený objektom triedy $\mathcal{D}$“. Ak sú teda $(\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}})$ a $(\mathcal{D}, |\cdot|_{\mathcal{D}})$ kombinatorické triedy také, že $\mathcal{D}_0 = \emptyset$, nazveme ich *zložením* – alebo *substitúciou* triedy $\mathcal{D}$ do triedy $\mathcal{C}$ – kombinatorickú triedu $(\mathcal{C} \circ \mathcal{D}, |\cdot|) = (\mathcal{C}[\mathcal{D}], |\cdot|)$, kde

$$\mathcal{C} \circ \mathcal{D} = \mathcal{C}[\mathcal{D}] := \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \times \mathrm{SEQ}_n(\mathcal{D})$$

a pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathcal{C}_n$ a $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{SEQ}_n(\mathcal{D})$ je

$$|(x, (y_1, \ldots, y_n))| := |(y_1, \ldots, y_n)|_{\mathrm{SEQ}_n(\mathcal{D})} = \sum_{k=1}^{n} |y_k|_{\mathcal{D}}\,.$$

Veta 3.3.10. *Substitúcia je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda s obyčajnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$ a $\mathcal{D}$ je kombinatorická trieda s $\mathcal{D}_0 = \emptyset$ a s obyčajnou vytvárajúcou funkciou $D(z)$, je obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\mathcal{C} \circ \mathcal{D} = \mathcal{C}[\mathcal{D}]$ formálny mocninový rad*

$$(C \circ D)(z) = C(D(z)).$$

Dôkaz. Nech $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel taká, že

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Vďaka tvrdeniu 3.2.4 je potom vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\mathcal{C} \circ \mathcal{D}$ rad

$$\sum_{u \in \mathcal{C} \circ \mathcal{D}} z^{|u|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x \in \mathcal{C}_n} \sum_{(y_1,\ldots,y_n) \in \mathrm{SEQ}_n(\mathcal{D})} z^{|(x,(y_1,\ldots,y_n))|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x \in \mathcal{C}_n} \sum_{(y_1,\ldots,y_n) \in \mathrm{SEQ}_n(\mathcal{D})} z^{|(y_1,\ldots,y_n)|_{\mathrm{SEQ}_n(\mathcal{D})}} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{(y_1,\ldots,y_n) \in \mathrm{SEQ}_n(\mathcal{D})} z^{|(y_1,\ldots,y_n)|_{\mathrm{SEQ}_n(\mathcal{D})}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n(z) = C(D(z)) = (C \circ D)(z). \qquad \square$$

3.4 Iteratívne a rekurzívne špecifikácie

Pod *špecifikáciou* kombinatorických tried rozumieme systém rovníc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(1)} &= \Phi_1\left(\mathcal{A}^{(1)},\ldots,\mathcal{A}^{(m)}\right), \\ \mathcal{A}^{(2)} &= \Phi_2\left(\mathcal{A}^{(1)},\ldots,\mathcal{A}^{(m)}\right), \\ &\vdots \\ \mathcal{A}^{(m)} &= \Phi_m\left(\mathcal{A}^{(1)},\ldots,\mathcal{A}^{(m)}\right), \end{aligned}$$

kde $\mathcal{A}^{(1)},\ldots,\mathcal{A}^{(m)}$ sú neznáme kombinatorické triedy a $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ sú m-árne prípustné konštrukcie na kombinatorických triedach – typicky sa pritom obmedzujeme na vhodnú množinu uvažovaných prípustných konštrukcií, akou môžu byť napríklad termy zložené z neutrálnych tried $\mathcal{E}$, atomických tried $\mathcal{Z}$ a štandardných prípustných konštrukcií zavedených v rámci predchádzajúceho oddielu. V závislosti od kontextu tento systém môžeme považovať za špecifikáciu vektora kombinatorických tried

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{(1)},\ldots,\mathcal{A}^{(m)})$$

alebo za špecifikáciu kombinatorickej triedy $\mathcal{A}^{(1)}$.

Špecifikáciu nazývame *iteratívnou* v prípade, že pre $k = 1,\ldots,m$ závisí Φ_k iba od kombinatorických tried $\mathcal{A}^{(k+1)},\ldots,\mathcal{A}^{(m)}$ – pre ľubovoľné kombinatorické triedy $\mathcal{B}^{(1)},\ldots,\mathcal{B}^{(k)}$ a $\mathcal{C}^{(1)},\ldots,\mathcal{C}^{(k)}$ je teda

$$\Phi_k\left(\mathcal{B}^{(1)},\ldots,\mathcal{B}^{(k)},\mathcal{A}^{(k+1)},\ldots,\mathcal{A}^{(m)}\right) = \Phi_k\left(\mathcal{C}^{(1)},\ldots,\mathcal{C}^{(k)},\mathcal{A}^{(k+1)},\ldots,\mathcal{A}^{(m)}\right).$$

Prípustná konštrukcia Φ_m je tak v podstate nulárna – určuje jednu konštantnú kombinatorickú triedu. Vo výsledku takto možno kombinatorickú triedu $\mathcal{A}^{(1)}$ vyjadriť pomocou jediného termu zloženého z prípustných konštrukcií uvažovaného typu a konštantných tried uvažovaného typu – definícia sémantiky špecifikácie je teda bezproblémová.

Menej zrejmou je sémantika iných ako iteratívnych špecifikácií, ktoré nazývame *rekurzívnymi* – napríklad aj

$$\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}^{(1)}$$

je korektnou rekurzívnou špecifikáciou a ľahko vidieť, že jej riešením môže byť ľubovoľná kombinatorická trieda. Často sa preto obmedzujeme napríklad na *najmenšie* riešenie v zmysle množinovej inklúzie, resp. na riešenie, ktoré možno získať iterovaním uvažovaného systému rovníc v prípade, že začneme s vektorom prázdnych tried.

My k sémantike rekurzívnych špecifikácií zaujmeme o niečo pragmatickejší prístup: spomedzi ich riešení nebudeme vyberať jedno kanonické, ale budeme pracovať iba so špecifikáciami alebo triedami špecifikácií, pri ktorých bude ľahko možné dokázať existenciu *jediného* riešenia. Táto vlastnosť často vyplynie z jednoznačnosti riešenia príslušného systému rovníc o m neznámych vytvárajúcich funkciách

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \phi_1\left(A_1(z), \ldots, A_m(z)\right), \\ A_2(z) &= \phi_2\left(A_1(z), \ldots, A_m(z)\right), \\ &\ \ \vdots \\ A_m(z) &= \phi_m\left(A_1(z), \ldots, A_m(z)\right), \end{aligned}$$

kde $A_1(z), \ldots, A_m(z)$ sú neznáme formálne mocninové rady a $\phi_1, \ldots, \phi_m$ sú operácie na obyčajných vytvárajúcich funkciách prislúchajúce k prípustným konštrukciám $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$. Takýmto spôsobom neraz dostaneme systém rovníc s viacerými riešeniami, pričom ale iba jedno z nich je *kombinatoricky významné* – t. j. $A_1(z)$ je formálny mocninový rad s *prirodzenými* koeficientmi, ktorý tak je obyčajnou vytvárajúcou funkciou nejakej kombinatorickej triedy. Z toho potom vyplynie aj jednoznačnosť riešenia pôvodného systému na kombinatorických triedach (chápaná modulo izomorfizmus).

3.5 Symbolická metóda pre neoznačené objekty: príklady

Príklad 3.5.1. Uvažujme kombinatorickú triedu $\mathcal{W}$ všetkých slov nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ s obvykle definovanou dĺžkou. Takéto slová možno chápať ako konečné postupnosti atómov, ktorými sú jednotlivé písmená z abecedy Σ. Pre atomické triedy $\mathcal{Z}_a = \{a\}$ a $\mathcal{Z}_b = \{b\}$ je teda špecifikácia kombinatorickej triedy $\mathcal{W}$ daná ako

$$\mathcal{W} = \textsc{Seq}\left(\mathcal{Z}_a + \mathcal{Z}_b\right),$$

z čoho dostávame aj vyjadrenie pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $W(z)$ triedy $\mathcal{W}$ v tvare

$$W(z) = \frac{1}{1 - 2z}.$$

Z príkladu 2.3.4 pritom vieme, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $[z^n]W(z) = 2^n$, čo je skutočne počet všetkých slov dĺžky n nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.

Príklad 3.5.2. Vráťme sa k príkladu 1.2.1, v ktorom sme vyčíslovali počet všetkých usporiadaných zakorenených stromov o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vrcholoch.

Každý takýto strom je jednoznačne daný svojím koreňom a konečným počtom podstromov zakorenených v jeho synoch, ktorými sú tiež usporiadané zakorenené stromy. Veľkosť takéhoto stromu je daná celkovým počtom vrcholov. Pomocou symbolickej metódy pre neoznačené objekty teda môžeme kombinatorickú triedu $\mathcal{T}$ všetkých takýchto stromov vyjadriť rekurzívnou špecifikáciou

$$\mathcal{T} = \mathcal{Z} \times \textsc{Seq}(\mathcal{T}),$$

kde $\mathcal{Z}$ je atomická trieda. Pre vytvárajúcu funkciu $T(z)$ triedy $\mathcal{T}$ tak dostávame vzťah

$$T(z) = \frac{z}{1 - T(z)},$$

z čoho

$$T(z)^2 - T(z) + z = 0. \tag{3.4}$$

Táto kvadratická rovnica má dve riešenia v $\mathbb{C}[\![z]\!]$:

$$T_{\pm}(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z}}{2}.$$

Vďaka vete 2.10.7 je

$$\sqrt{1-4z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n 4^n z^n = 1 - 2z - 2z^2 - 4z^3 - 10z^3 - \ldots$$

Riešenie

$$T_+(z) = \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2}$$

teda nie je kombinatoricky významné, pretože nejde o rad z $\mathbb{N}[\![z]\!]$ – napríklad $[z^1]T_+(z) = -1$. Keďže ale obyčajná vytvárajúca funkcia kombinatorickej triedy $\mathcal{T}$ musí byť riešením rovnice (3.4), je nutne daná ako

$$T_-(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}. \tag{3.5}$$

Z príkladu 1.2.1 vyplýva, že $T_-(z)$ je obyčajná vytvárajúca funkcia posunutej postupnosti Catalanových čísel $(0, C_0, C_1, C_2, \ldots)$.

Zo vzťahu (3.5) môžeme *ad hoc* odvodiť uzavretý tvar pre koeficienty tejto vytvárajúcej funkcie. Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ totiž

$$\begin{aligned}
[z^n]T_-(z) &= [z^n]\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2} = -\frac{1}{2}[z^n]\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-1)^n 4^n z^n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-1)^n 4^n = \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1/2)^{\underline{n}}}{n!}(-1)^n 4^n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)}{n!}(-1)^n 4^n = 2^{n-1}\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)}{n!} = \\
&= \frac{2^{n-1}}{n!}\cdot\frac{(2n-2)!}{\prod_{k=1}^{n-1}2k} = \frac{2^{n-1}}{n!}\cdot\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{1}{n}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}
\end{aligned}$$

a pre $n = 0$ je $[z^0]T_-(z) = 0$. To sa zhoduje s našimi výsledkami z príkladu 1.2.1 – teraz sme ale aspoň po odvodenie vzorca pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $T_-(z)$ postupovali plne systematickým spôsobom.

Príklad 3.5.3. Vráťme sa k príkladu 1.3.1, v ktorom sme vyčíslovali počet všetkých plných binárnych stromov s n vnútornými vrcholmi.

Každý plný binárny strom je zložený z dvoch druhov základných stavebných prvkov – z vnútorných vrcholov, ktoré budeme označovať $\bullet$ a z listov, ktoré budeme označovať $\circ$. Keďže pritom podľa zadania úlohy prispievajú k celkovej veľkosti stromu iba vnútorné vrcholy, budeme pracovať s atomickou triedou $\mathcal{Z}_\bullet = \{\bullet\}$ a s neutrálnou triedou $\mathcal{E}_\circ = \{\circ\}$. Plný binárny strom môže buď pozostávať z jediného vrcholu, ktorý je súčasne jeho koreňom aj listom, alebo je jeho koreň vnútorným vrcholom s dvoma synmi, v ktorých sú opäť zakorenené plné binárne stromy. Prichádzame teda k nasledujúcej rekurzívnej špecifikácii pre kombinatorickú triedu $\mathcal{F}$ všetkých plných binárnych stromov s veľkosťou danou počtom vnútorných vrcholov:

$$\mathcal{F} = \mathcal{E}_\circ + \mathcal{Z}_\bullet \times \mathcal{F} \times \mathcal{F}.$$

Z toho vyplýva, že obyčajná vytvárajúca funkcia $F(z)$ kombinatorickej triedy $\mathcal{F}$ vyhovuje vzťahu

$$F(z) = 1 + zF(z)^2;$$

musí teda ísť o riešenie kvadratickej rovnice

$$zF(z)^2 - F(z) + 1 = 0.$$

Tá má v $\mathbb{C}[\![z]\!]$ jediné riešenie

$$F_-(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Formálny mocninový rad $F_{-}(z)$ je teda obyčajnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\mathcal{F}$ a z príkladu 1.3.1 – poprípade z príkladu 3.5.2 – vyplýva, že ide aj o obyčajnú vytvárajúcu funkciu postupnosti Catalanových čísel. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je teda

$$[z^n]\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Príklad 3.5.4. Uvažujme napokon ešte raz aj príklad 1.1.1, v ktorom bolo úlohou nájsť počet všetkých dobre uzátvorkovaných slov z Dyckovho jazyka D_1 obsahujúcich n ľavých zátvoriek a a n pravých zátvoriek $\overline{a}$.

Keďže je veľkosť každého takéhoto slova daná počtom ľavých zátvoriek, môžeme pracovať s atomickou triedou $\mathcal{Z}_a = \{a\}$ a s neutrálnou triedou $\mathcal{E}_{\overline{a}} = \{\overline{a}\}$. Navyše budeme uvažovať neutrálnu triedu $\mathcal{E}_\varepsilon = \{\varepsilon\}$ zodpovedajúcu prázdnemu slovu.

Dyckov jazyk D_1 je definovaný ako jazyk nad abecedou $\Sigma = \{a, \overline{a}\}$ taký, že:

(i) $\varepsilon \in D_1$;

(ii) pre všetky $u, v \in D_1$ je $au\overline{a}v \in D_1$;

(iii) nič iné nie je v D_1.

Faktorizácia slova v (ii) je navyše určená jednoznačne, keďže prvú ľavú zátvorku môže vždy uzatvárať jediná pravá zátvorka. Kombinatorickú triedu $\mathcal{D}$ pozostávajúcu zo všetkých slov z jazyka D_1 s veľkosťou danou počtom ľavých zátvoriek tak možno vyjadriť pomocou rekurzívnej špecifikácie

$$\mathcal{D} = \mathcal{E}_\varepsilon + \mathcal{Z}_a \times \mathcal{D} \times \mathcal{E}_{\overline{a}} \times \mathcal{D},$$

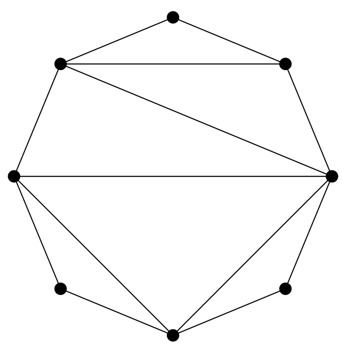
ktorej zodpovedá vzťah

$$D(z) = 1 + zD(z)^2$$

pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $D(z)$ kombinatorickej triedy $\mathcal{D}$. Ten je rovnaký ako v príklade 3.5.3 – opäť teda prichádzame k obyčajnej vytvárajúcej funkcii

$$D(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$$

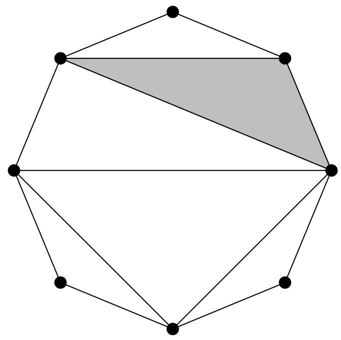
postupnosti Catalanových čísel.



Obr. 3.3: Jedna z možných triangulácií pravidelného osemuholníka.

Príklad 3.5.5. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ uvažujme počet triangulácií konvexného $(n+2)$-uholníka (s navzájom rozlíšiteľnými vrcholmi) – čiže počet jeho rozkladov na po dvoch disjunktné trojuholníky s vrcholmi vo vrcholoch uvažovaného $(n+2)$-uholníka. Príklad takejto triangulácie je na obrázku 3.3.

Pre $n = 0$ za konvexný dvojuholník považujeme úsečku, ktorá nemá žiadnu trianguláciu. Indukciou vzhľadom na n dokážeme, že každá triangulácia konvexného $(n+2)$-uholníka pozostáva z presne n trojuholníkov. Pre $n = 0$ a $n = 1$ je táto skutočnosť zrejmá. Predpokladajme teraz platnosť tvrdenia pre $n = s$ a uvažujme ľubovoľný konvexný $(s+3)$-uholník s vrcholmi $1, \ldots, s+3$. Hrana $[1, 2]$ potom musí byť súčasťou nejakého trojuholníka triangulácie. Tento trojuholník je na obrázku 3.4 vyznačený sivou farbou.



Obr. 3.4: Jedna z možných triangulácií pravidelného osemuholníka.

Ľahko vidieť, že každý takýto trojuholník určuje rozklad pôvodného $(s+3)$-uholníka, ktorý okrem tohto trojuholníka pozostáva z nejakého $(p+2)$-uholníka a nejakého $(q+2)$-uholníka s $p, q \in \mathbb{N}$ takými, že $p \leq s$, $q \leq s$ a $(p+2) + (q+2) = s+4$ (prípad $p = 0$ resp. $q = 0$ nastane v prípade, že je tretí vrchol zvoleného trojuholníka susedný s niektorým z vrcholov 1 a 2). Z indukčného predpokladu teda vyplýva, že každá triangulácia uvažovaného $(s+3)$-uholníka pozostáva z presne $p + q + 1 = s + 1$ trojuholníkov, čo bolo treba dokázať.

Uvažujme teraz kombinatorickú triedu $\mathcal{T}$ pozostávajúcu zo všetkých triangulácií konvexných mnohouholníkov, ktorých veľkosť je daná počtom trojuholníkov, ktoré ju tvoria – ten je podľa vyššie učineného pozorovania o dva menší ako počet vrcholov konvexného mnohouholníka, ku ktorému triangulácia prislúcha. Každá takáto triangulácia je buď prázdna (v prípade, že ide o trianguláciu úsečky), alebo v nej možno vyššie opísaným spôsobom kanonicky zvoliť jeden trojuholník a trianguláciu potom možno vyjadriť pomocou tohto trojuholníka a dvoch ďalších (prípadne aj prázdnych) triangulácií. Dostávame tak rekurzívnu špecifikáciu

$$\mathcal{T} = \mathcal{E} + \mathcal{Z}_{\triangle} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T},$$

kde $\mathcal{E}$ je neutrálna trieda a $\mathcal{Z}_{\triangle} = \{\triangle\}$ je atomická trieda. Pre vytvárajúcu funkciu $T(z)$ kombinatorickej triedy $\mathcal{T}$ tak dostávame vzťah

$$T(z) = 1 + zT(z)^2,$$

ktorý je opäť rovnaký ako v predchádzajúcich dvoch príkladoch. Zisťujeme teda, že

$$T(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$$

a počet všetkých triangulácií konvexného $(n+2)$-uholníka je pre všetky $n \in \mathbb{N}$ daný ako

$$[z^n]T(z) = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Príklad 3.5.6. Pod *unárno-binárnym stromom* rozumieme usporiadaný zakorenený strom, v ktorom má každý vrchol najviac dvoch synov; v prípade, že má jedného syna, nepovažuje sa tento ani za ľavého, ani za pravého. Skúmajme počet všetkých takýchto stromov o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vrcholoch.

Každý unárno-binárny strom pozostáva z koreňa, ktorý môže mať žiadneho, jedného, alebo dvoch synov – v každom synovi je potom opäť zakorenený ďalší unárno-binárny strom. Pre atomickú triedu $\mathcal{Z}_\bullet$ zodpovedajúcu ľubovoľnému vrcholu teda môžeme kombinatorickú triedu $\mathcal{U}$ všetkých unárno-binárnych stromov s veľkosťou danou počtom vrcholov vyjadriť pomocou rekurzívnej špecifikácie

$$\mathcal{U} = \mathcal{Z}_\bullet + \mathcal{Z}_\bullet \times \mathcal{U} + \mathcal{Z}_\bullet \times \mathcal{U} \times \mathcal{U},$$

čím pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $U(z)$ kombinatorickej triedy $\mathcal{U}$ prichádzame k rovnici

$$U(z) = z + zU(z) + zU(z)^2,$$

ktorá má v $\mathbb{C}[\![z]\!]$ jediné riešenie

$$U_-(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z} = z + z^2 + 2z^3 + 4z^4 + \ldots$$

Koeficient $[z^{n+1}]U_-(z)$ tejto vytvárajúcej funkcie kombinatorickej triedy $\mathcal{U}$ sa zvykne nazývať *n-tým Motzkinovým číslom* M_n. Neskôr uvidíme, ako možno pomocou analytických metód ľahko dospieť k asymptotickému odhadu pre M_n a $n \to \infty$.

Príklad 3.5.7. Uvažujme teraz (neusporiadané) zakorenené stromy o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ neoznačených vrcholoch. Každý takýto strom pozostáva z koreňa, ktorý môže byť hranami spojený s niekoľkými podstromami. Ak tieto podstromy zakoreníme vo vrcholoch, ktoré sú hranou spojené s koreňom uvažovaného stromu, budú výsledné zakorenené podstromy spolu s koreňom jednoznačne určovať celý strom. Na poradí jednotlivých podstromov pritom nezáleží – zaujíma nás iba to, koľkokrát sa dané podstromy v strome vyskytujú. Pre atomickú triedu $\mathcal{Z}_\bullet = \{\bullet\}$ tak prichádzame k vyjadreniu kombinatorickej triedy $\mathcal{R}$ všetkých neoznačených zakorenených stromov s veľkosťou danou počtom vrcholov pomocou rekurzívnej špecifikácie

$$\mathcal{R} = \mathcal{Z}_\bullet \times \mathrm{MS{\small ET}}(\mathcal{R}).$$

Obyčajná vytvárajúca funkcia $R(z)$ kombinatorickej triedy $\mathcal{R}$ je teda riešením rovnice

$$R(z) = z \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} R(z^k)\right).$$

Tento vzťah umožňuje rekurzívny výpočet koeficientov $[z^n]R(z)$, ktorý je o poznanie efektívnejší, než úplné prehľadávanie všetkých neoznačených zakorenených stromov o danom počte vrcholov. Prvých niekoľko členov vytvárajúcej funkcie $R(z)$ je daných nasledovne:

$$R(z) = z + z^2 + 2z^3 + 4z^4 + 9z^5 + 20z^6 + \ldots$$

Príklad 3.5.8. Aj množinu všetkých nenulových prirodzených čísel $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ môžeme chápať ako kombinatorickú triedu $(\mathcal{N}, |\cdot|)$, kde $\mathcal{N} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a pre všetky $n \in \mathcal{N}$ je $|n| = n$. Keďže navyše môžeme každé nenulové prirodzené číslo n zapísať v unárnej sústave ako presne n atómov $\bullet$, možno pre atomickú triedu $\mathcal{Z}_\bullet$ vyjadriť triedu $\mathcal{N}$ pomocou iteratívnej špecifikácie

$$\mathcal{N} = \mathrm{S{\small EQ}}_{\geq 1}(\mathcal{Z}_\bullet),$$

z čoho priamo dostávame očakávaný vzorec pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $N(z)$ tejto kombinatorickej triedy:

$$N(z) = \frac{z}{1 - z}.$$

Pre ňu, samozrejme, platí $[z^0]N(z) = 0$ a $[z^n]N(z) = 1$ pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Príklad 3.5.9. *Kompozíciou* prirodzeného čísla $n \in \mathbb{N}$ nazývame konečnú postupnosť $(n_1, \ldots, n_k)$ pozostávajúcu z $k \in \mathbb{N}$ čísel $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takých, že

$$n_1 + \ldots + n_k = n.$$

Počet všetkých kompozícií čísla $n \in \mathbb{N}$ je teda počtom všetkých spôsobov, ktorými môžeme toto číslo vyjadriť ako súčet nenulových prirodzených čísel, pričom záleží na poradí jednotlivých sčítancov. Aj pomocou elementárnej kombinatoriky možno ľahko nahliadnuť, že počet všetkých kompozícií čísla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je 2^{n-1} – stačí číslo n vyjadriť v unárnej sústave ako postupnosť n atómov $\bullet$; kompozícia čísla n je potom jednoznačne daná pridaním „predelov“ do niektorých „medzier“ medzi jednotlivými atómami. Keďže je takýchto „medzier“ $n-1$ a v každej môže a nemusí byť „predel“, prichádzame k avizovanému výsledku 2^{n-1}.

K rovnakému výsledku môžeme prísť aj pomocou symbolickej metódy. Uvažujme kombinatorickú triedu $\mathcal{C}$ všetkých kompozícií prirodzených čísel, kde veľkosťou každej kompozície $(n_1, \ldots, n_k)$ je číslo $n = n_1 + \ldots + n_k$, o ktorého kompozíciu ide. Túto kombinatorickú triedu potom evidentne môžeme vyjadriť ako

$$\mathcal{C} = \textsc{Seq}(\mathcal{N}),$$

kde $\mathcal{N}$ je kombinatorická trieda z príkladu 3.5.8. V dôsledku toho dostávame pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $C(z)$ kombinatorickej triedy $\mathcal{C}$ vzťah

$$C(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{1-z}} = \frac{1-z}{1-2z}.$$

Keďže

$$C(z) = \frac{1-z}{1-2z} = \frac{1}{1-2z} - \frac{z}{1-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^n,$$

prichádzame aj týmto spôsobom k výsledku

$$[z^n]C(n) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Príklad 3.5.10. *Rozkladom* prirodzeného čísla $n \in \mathbb{N}$ nazývame jeho kompozíciu $(n_1, \ldots, n_k)$ takú, že $n_1 \leq \ldots \leq n_k$. Počet všetkých rozkladov čísla n je teda počtom všetkých spôsobov, ktorými toto číslo môžeme vyjadriť ako súčet nenulových prirodzených čísel, pričom na poradí sčítancov nezáleží.

Uvažujme kombinatorickú triedu $\mathcal{P}$ všetkých rozkladov prirodzených čísel, kde veľkosťou rozkladu $(n_1, \ldots, n_k)$ je číslo $n = n_1 + \ldots + n_k$. S použitím kombinatorickej triedy $\mathcal{N}$ z príkladu 3.5.8 potom môžeme triedu $\mathcal{P}$ vyjadriť ako

$$\mathcal{P} = \text{M}\textsc{Set}(\mathcal{N}).$$

Pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $P(z)$ kombinatorickej triedy $\mathcal{P}$ tak dostávame vzťah

$$P(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{z^k}{1-z^k}\right) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^m}.$$

Prvých niekoľko členov vytvárajúcej funkcie $P(z)$ je daných ako

$$\begin{aligned} P(z) &= (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots)(1 + z^2 + z^4 + \ldots)(1 + z^3 + z^6 + \ldots)(1 + z^4 + z^8 + \ldots)\ldots = \\ &= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \ldots \end{aligned}$$

Príklad 3.5.11. Pokúsme sa vyčísliť počet všetkých *rozkladov* n-prvkovej množiny na r tried rozkladu. Táto hodnota sa obvykle nazýva *Stirlingovým číslom druhého druhu* a označuje sa

$$\left\{ {n \atop r} \right\}.$$

Použitie symbolickej metódy tu vyžaduje drobnú kombinatorickú predprípravu. Je zrejmé, že namiesto rozkladov ľubovoľnej n-prvkovej množiny stačí pre $n \in \mathbb{N}$ uvažovať rozklady množiny $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Uvažujme teda kombinatorickú triedu $\mathcal{S}^{(r)}$ pozostávajúcu zo všetkých rozkladov množín $[n]$ pre $n \in \mathbb{N}$ na $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tried, pričom veľkosťou rozkladu rozumieme súčet veľkostí jeho tried – čiže počet prvkov rozkladanej množiny. Jednotlivé triedy takéhoto rozkladu množiny $[n]$ kanonicky očíslujme číslami $1, \ldots, r$ tak, že za prvú triedu vezmeme triedu obsahujúcu prvok 1, za druhú triedu vezmeme triedu obsahujúcu najmenší prvok neobsiahnutý v prvej triede, atď. Každý rozklad množiny $[n]$ potom môžeme zakódovať ako slovo dĺžky n nad abecedou $[r]$, kde pre $k = 1, \ldots, n$ je k-te písmeno rovné $c \in [r]$ práve vtedy, keď $k \in [n]$ patrí do c-tej triedy rozkladu.

Zisťujeme teda, že kombinatorickú triedu $\mathcal{S}^{(r)}$ môžeme vyjadriť ako

$$\mathcal{S}^{(r)} = \mathcal{Z}^{[1]} \times \textsc{Seq}(\mathcal{Z}^{[1]}) \times \mathcal{Z}^{[2]} \times \textsc{Seq}(\mathcal{Z}^{[1]} + \mathcal{Z}^{[2]}) \times \ldots \times \mathcal{Z}^{[r]} \times \textsc{Seq}(\mathcal{Z}^{[1]} + \ldots + \mathcal{Z}^{[r]}),$$

kde $\mathcal{Z}^{[1]} = \{1\}, \ldots, \mathcal{Z}^{[r]} = \{r\}$ sú atomické triedy. Pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $S^{(r)}(z)$ triedy $\mathcal{S}^{(r)}$ tak dostávame vzťah

$$S^{(r)}(z) = \frac{z^r}{(1-z)(1-2z)\ldots(1-rz)} = \frac{1}{r!} \sum_{j=1}^{r} \binom{r}{j} \frac{(-1)^{r-j}}{1-jz}.$$

Stirlingove čísla druhého druhu sú preto pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dané ako

$$\left\{ {n \atop r} \right\} = [z^n] S^{(r)}(z) = \frac{1}{r!} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} j^n.$$

3.6 Kombinatorické triedy označených objektov

Opäť sa dostávame do situácie, keď je výhodné interpretovať už definovaný pojem trochu odlišným spôsobom. Ak kombinatorická trieda $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ pozostáva z objektov x, ktoré možno chápať ako vybudované z atómov označených po dvoch rôznymi úplne usporiadanými značkami – napríklad $1, \ldots, |x|$ – nazývame $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ *kombinatorickou triedou označených objektov.* Vďaka relatívnej vágnosti konceptu „vybudovania objektov z označených atómov“ sa ale javí ako najprirodzenejšie považovať *každú* kombinatorickú triedu súčasne aj za triedu označených objektov – ak totiž aj nejaká trieda pozostáva z neoznačených objektov, typicky k nej ľahko môžeme skonštruovať izomorfnú kombinatorickú triedu, ktorej objekty už označené sú (napríklad práve jedným ľubovoľným spôsobom označíme vrcholy každého neoznačeného grafu z uvažovanej triedy). Rozdiel medzi označenou a neoznačenou triedou je teda viac otázkou interpretácie, než vlastného charakteru objektov, ktoré túto triedu tvoria. Prichádzame tak k nasledujúcej – jemne bizarnej – definícii.

Definícia 3.6.1. *Kombinatorickou triedou označených objektov* nazveme ľubovoľnú kombinatorickú triedu $(\mathcal{C}, |\cdot|)$.

Pre každú kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{C}$ tak môžeme hovoriť aj o triedach $\mathcal{C}_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a rovnako ako pre triedy neoznačených objektov definujeme aj *enumeračné postupnosti* a dvojice *izomorfných* kombinatorických tried označených objektov $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, pre ktoré píšeme $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$.

Dôvod pre zavedenie nového pomenovania pre už definovaný koncept súvisí s definíciou prirodzených operácií na kombinatorických triedach označených objektov. Kým za aditívnu operáciu môžeme opäť vziať disjunktné zjednotenie, karteziánsky súčin už pre triedy označených objektov bude len sotva zmysluplnou multiplikatívnou operáciou: ak napríklad kombinatorické triedy $\mathcal{C}$ aj $\mathcal{D}$ pozostávajú z grafov určitého typu, kde vrcholy každého grafu rádu n sú označené značkami $1, \ldots, n$, bude karteziánsky súčin $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ pozostávať z dvojíc takýchto grafov.

Omnoho zmysluplnejšou, než táto trieda, je ale obyčajne trieda všetkých dvojíc grafov (G', H'), pre ktoré existujú nejaké grafy $G \in \mathcal{C}$ a $H \in \mathcal{D}$ také, že v prípade $|G| = m$ a $|H| = n$ vzniknú grafy G' a H' z G resp. H preznačením vrcholov tak, aby každý vrchol výslednej dvojice dostal jedinečnú značku z množiny $[m+n]$. Od každého takéhoto preznačenia pritom zvyčajne vyžadujeme izotónnosť – ak má niektorý vrchol u niektorého z grafov G, H menšiu značku ako niektorý iný vrchol v toho istého grafu, mala by táto vlastnosť zostať zachovaná aj po preznačení v grafe G' resp. H'. Len za tohto predpokladu sú totiž dvojicou (G', H') jednoznačne dané aj grafy G a H. Pri opísanej konštrukcii teda abstrahujeme od konkrétnych značiek jednotlivých vrcholov grafov G a H a pracujeme iba s nimi určeným úplným usporiadaním – na vrcholoch dvojice (G', H') potom uvažujeme všetky možné úplné usporiadania, ktorých zúžením na jednotlivé zložky G' resp. H' dostaneme pôvodné usporiadania.

Podobne ako pri neoznačených objektoch by sme veľkosť $|(G', H')|$ dvojice (G', H') chceli definovať ako $|G'| + |H'| = |G| + |H|$. S využitím konvencie stotožňovania izomorfných tried tak môžeme dve najdôležitejšie operácie na kombinatorických triedach označených objektov definovať nasledovne.

Definícia 3.6.2. *Disjunktným zjednotením* alebo *kombinatorickým súčtom* kombinatorických tried označených objektov $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}}), \mathcal{D} = (\mathcal{D}, |\cdot|_{\mathcal{D}})$ nazveme kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{C} + \mathcal{D} = (\mathcal{C} + \mathcal{D}, |\cdot|)$, kde pre všetky $x \in \mathcal{C}$ je $|(x,1)| = |x|_{\mathcal{C}}$ a pre všetky $y \in \mathcal{D}$ je $|(y,2)| = |y|_{\mathcal{D}}$.

Pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$ označíme ako $\Lambda(m,n)$ množinu všetkých bijekcií $f\colon [m] + [n] \to [m+n]$ takých, že pre všetky $u, v \in [m]$ s $u < v$ je $f(u,1) < f(v,1)$ a pre všetky $u, v \in [n]$ s $u < v$ je $f(u,2) < f(v,2)$. Zobrazenia $f \in \Lambda(m,n)$ tak zodpovedajú všetkým možným izotónnym preznačeniam dvojíc označených objektov (x,y), kde x je veľkosti m a y je veľkosti n.

Definícia 3.6.3. *Súčinom* kombinatorických tried označených objektov $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}}), \mathcal{D} = (\mathcal{D}, |\cdot|_{\mathcal{D}})$ nazveme kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{C} \star \mathcal{D} = (\mathcal{C} \star \mathcal{D}, |\cdot|)$, kde

$$\mathcal{C} \star \mathcal{D} = \{(x, y, f) \mid x \in \mathcal{C};\ y \in \mathcal{D};\ f \in \Lambda(|x|_{\mathcal{C}}, |y|_{\mathcal{D}})\}.$$

Pre všetky $(x, y, f) \in \mathcal{C} \star \mathcal{D}$ ďalej kladieme $|(x, y, f)| = |x|_{\mathcal{C}} + |y|_{\mathcal{D}}$.

S takto pozmenenou definíciou súčinu tried súvisí komplikácia spočívajúca v tom, že súčin tried označených objektov už naďalej nebude zodpovedať Cauchyho súčinu obyčajných vytvárajúcich funkcií. Tým pádom nebude naďalej opodstatnené ani samotné používanie obyčajných vytvárajúcich funkcií, ktoré bolo súvislosťou s karteziánskymi súčinmi kombinatorických tried motivované. Počet objektov veľkosti $n \in \mathbb{N}$ triedy $\mathcal{C} \star \mathcal{D}$ je naopak daný nasledovne.

Tvrdenie 3.6.4. *Pre všetky triedy označených objektov $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}}), \mathcal{D} = (\mathcal{D}, |\cdot|_{\mathcal{D}})$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ je*

$$|(\mathcal{C} \star \mathcal{D})_n| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\mathcal{C}_k| \cdot |\mathcal{D}_{n-k}|\,.$$

Dôkaz. Podobne ako pri karteziánskom súčine tried neoznačených objektov je

$$(\mathcal{C} \star \mathcal{D})_n = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{C}_k \times \mathcal{D}_{n-k} \times \Lambda(k, n-k), \tag{3.6}$$

pričom ide o disjunktné zjednotenie. Každé $f \in \Lambda(k, n-k)$ je navyše bijekciou $f\colon [k] + [n-k] \to [n]$ takou, že pre všetky $u, v \in [k]$ s $u < v$ je $f(u,1) < f(v,1)$ a pre všetky $u, v \in [n-k]$ s $u < v$ je $f(u,2) < f(v,2)$. Takéto zobrazenie je zrejme jednoznačne určené obrazom množiny $[k] \times \{1\}$, ktorým môže byť ľubovoľná k-prvková podmnožina množiny $[n]$. Preto

$$|\Lambda(k, n-k)| = \binom{n}{k}.$$

Pomocou pravidiel súčinu a súčtu tak z (3.6) dostávame dokazovanú rovnosť

$$|(\mathcal{C} \star \mathcal{D})_n| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\mathcal{C}_k| \cdot |\mathcal{D}_{n-k}|\,. \qquad \square$$

Ak je teraz $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ enumeračnou postupnosťou triedy $\mathcal{C}$ a $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ je enumeračnou postupnosťou triedy $\mathcal{D}$, sú prvky enumeračnej postupnosti $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ triedy $\mathcal{C} \star \mathcal{D}$ dané pre všetky $n \in \mathbb{N}$ ako

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_k d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} c_k d_{n-k},$$

z čoho

$$\frac{p_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{c_k}{k!}\right) \left(\frac{d_{n-k}}{(n-k)!}\right).$$

Tento vzťah opäť nápadne pripomína Cauchyho súčin formálnych mocninových radov – koeficienty týchto radov už ale nie sú priamo prvkami uvažovaných enumeračných postupností, ale koeficient pri z^n vznikne z príslušného prvku enumeračnej postupnosti predelením hodnotou $n!$. Dostávame sa tak k dôležitému pojmu *exponenciálnej vytvárajúcej funkcie.*

Definícia 3.6.5. *Exponenciálnou vytvárajúcou funkciou* kombinatorickej triedy označených objektov $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ s enumeračnou postupnosťou $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ nazývame formálny mocninový rad

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!] \subseteq \mathbb{C}[\![z]\!].$$

Exponenciálne vytvárajúce funkcie sú teda podobné „vešiaky na koeficienty“ ako obyčajné vytvárajúce funkcie, avšak konštrukcia tohto „vešiaka“ teraz zahŕňa aj faktor $1/n!$ pri každom koeficiente. Ak je teda $C(z)$ exponenciálnou vytvárajúcou funkciou triedy $\mathcal{C}$ s enumeračnou postupnosťou $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, je pre všetky $n \in \mathbb{N}$ člen c_n tejto postupnosti daný vzťahom $c_n = n![z^n]C(z)$. V tomto duchu môžeme, rovnako ako pri obyčajných vytvárajúcich funkciách, pre *ľubovoľnú* postupnosť komplexných čísel $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ nazvať jej *exponenciálnou vytvárajúcou funkciou* formálny mocninový rad

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}.$$

V súvislosti s kombinatorickými triedami ale platí, že exponenciálne vytvárajúce funkcie uvažujeme vo vzťahu k triedam označených objektov a obyčajné vytvárajúce funkcie vo vzťahu k triedam neoznačených objektov. *Exponenciálne vytvárajúce funkcie teda používame na enumeráciu označených objektov* a *obyčajné vytvárajúce funkcie používame na enumeráciu neoznačených objektov.*

Vyslovme ešte jednoduché tvrdenie, ktoré je pre kombinatorické triedy označených objektov obdobou tvrdenia 3.2.4.

Tvrdenie 3.6.6. *Nech $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|)$ je kombinatorická trieda označených objektov a $C(z)$ je jej exponenciálna vytvárajúca funkcia. Potom*

$$C(z) = \sum_{x \in \mathcal{C}} \frac{z^{|x|}}{|x|!},$$

kde súčet je cez lokálne konečný systém radov.

Dôkaz. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je evidentne

$$[z^n] \sum_{x \in \mathcal{C}} \frac{z^{|x|}}{|x|!} = \sum_{x \in \mathcal{C}_n} [z^n] \frac{z^{|x|}}{|x|!} = \sum_{x \in \mathcal{C}_n} \frac{1}{n!} = \frac{|\mathcal{C}_n|}{n!} = [z^n] C(z). \qquad \square$$

3.7 Symbolická metóda pre označené objekty

Podobne ako pre kombinatorické triedy neoznačených objektov teraz preskúmame niekoľko základných konštrukcií na kombinatorických triedach označených objektov a k nim prislúchajúcich operácií na exponenciálnych vytvárajúcich funkciách. *Prípustnou konštrukciou* na kombinatorických triedach označených objektov opäť pre ľubovoľné $m \in \mathbb{N}$ nazveme m-árne čiastočné zobrazenie Φ, priraďujúce m-ticiam tried označených objektov $\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)}$ triedu označených objektov $\Phi(\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)})$; musí pritom platiť, že pre ľubovoľné triedy označených objektov $\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)}, \mathcal{C}^{(1)}, \ldots, \mathcal{C}^{(m)}$ spĺňajúce $\mathcal{B}^{(k)} \cong \mathcal{C}^{(k)}$ pre $k = 1, \ldots, m$ je $\Phi(\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)})$ definované práve vtedy, keď je definované $\Phi(\mathcal{C}^{(1)}, \ldots, \mathcal{C}^{(m)})$, pričom v takom prípade je

$$\Phi\left(\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)}\right) \cong \Phi\left(\mathcal{C}^{(1)}, \ldots, \mathcal{C}^{(m)}\right).$$

Ku každej prípustnej konštrukcii Φ na kombinatorických triedach označených objektov tak zodpovedá čiastočné zobrazenie ϕ na exponenciálnych vytvárajúcich funkciách také, že pre kombinatorické triedy označených objektov $\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)}$ s definovaným výstupom zobrazenia Φ a s exponenciálnymi vytvárajúcimi funkciami $B_1(z), \ldots, B_m(z)$ je $\phi(B_1(z), \ldots, B_m(z))$ exponenciálnou vytvárajúcou funkciou triedy $\Phi(\mathcal{B}^{(1)}, \ldots, \mathcal{B}^{(m)})$. Opäť teda môžeme začať s budovaním „slovníka“ medzi niekoľkými štandardnými prípustnými konštrukciami Φ a k nim prislúchajúcimi operáciami ϕ na exponenciálnych vytvárajúcich funkciách.

Neutrálne a atomické triedy. Podobne ako pri triedach neoznačených objektov nazveme *neutrálnou triedou* kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, |\cdot|)$ takú, že $\mathcal{E} = \{1_\mathcal{E}\}$ a $|1_\mathcal{E}| = 0$. Neutrálne triedy typicky označujeme $\mathcal{E}$ s prípadným indexom určujúcim ich jediný prvok $1_\mathcal{E}$ – píšeme teda napríklad $\mathcal{E}_\varepsilon = \{\varepsilon\}$, $\mathcal{E}_\square = \{\square\}$ a podobne.

Atomickou triedou nazývame kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}, |\cdot|)$ takú, že $\mathcal{Z} = \{z_\mathcal{Z}\}$ a $|z_\mathcal{Z}| = 1$. Podobne ako pri neoznačených objektoch najčastejšie označujeme automatické triedy ako $\mathcal{Z}$, často s indexom určujúcim jediný prvok $z_\mathcal{Z}$ – napríklad $\mathcal{Z}_a = \{a\}$, $\mathcal{Z}_\bullet = \{\bullet\}$, $\mathcal{Z}_\circ = \{\circ\}$.

Exponenciálnou vytvárajúcou funkciou každej neutrálnej triedy je evidentne 1 a exponenciálnou vytvárajúcou funkciou každej atomickej triedy je z.

Disjunktné zjednotenie. Pripomeňme si z predchádzajúceho oddielu, že *disjunktným zjednotením* alebo *kombinatorickým súčtom* kombinatorických tried označených objektov $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_\mathcal{C}), \mathcal{D} = (\mathcal{D}, |\cdot|_\mathcal{D})$ nazývame kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{C} + \mathcal{D} = (\mathcal{C} + \mathcal{D}, |\cdot|)$ takú, že pre všetky $x \in \mathcal{C}$ je $|(x, 1)| = |x|_\mathcal{C}$ a pre všetky $y \in \mathcal{D}$ je $|(y, 2)| = |y|_\mathcal{D}$.

Veta 3.7.1. *Disjunktné zjednotenie je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach označených objektov. Ak sú navyše $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ kombinatorické triedy označených objektov s exponenciálnymi vytvárajúcimi funkciami $C(z)$ resp. $D(z)$, je exponenciálna vytvárajúca funkcia triedy $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ daná ako*

$$C(z) + D(z).$$

Dôkaz. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$n![z^n](C(z) + D(z)) = n![z^n]C(z) + n![z^n]D(z) = |\mathcal{C}_n| + |\mathcal{D}_n| = |(\mathcal{C} + \mathcal{D})_n|. \qquad \square$$

Súčin tried označených objektov. Poznáme už tiež operáciu *súčinu* kombinatorických tried označených objektov $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_\mathcal{C})$ a $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, |\cdot|_\mathcal{D})$, ktorým nazývame kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{C} \star \mathcal{D} = (\mathcal{C} \star \mathcal{D}, |\cdot|)$ takú, že

$$\mathcal{C} \star \mathcal{D} = \{(x, y, f) \mid x \in \mathcal{C};\ y \in \mathcal{D};\ f \in \Lambda(|x|_\mathcal{C}, |y|_\mathcal{D})\}$$

a pre všetky $(x, y, f) \in \mathcal{C} \star \mathcal{D}$ je $|(x, y, f)| = |x|_\mathcal{C} + |y|_\mathcal{D}$.

Veta 3.7.2. *Súčin je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach označených objektov. Ak sú navyše $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ kombinatorické triedy označených objektov s exponenciálnymi vytvárajúcimi funkciami $C(z)$ resp. $D(z)$, je exponenciálna vytvárajúca funkcia triedy $\mathcal{C} \star \mathcal{D}$ daná ako*

$$C(z) \cdot D(z).$$

Dôkaz. Z definície Cauchyho súčinu radov a tvrdenia 3.6.4 pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dostávame

$$\begin{aligned} n![z^n]\left(C(z)D(z)\right) &= n!\sum_{k=0}^{n}\left([z^k]C(z)\right)\left([z^{n-k}]D(z)\right) = n!\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{|\mathcal{C}_k|}{k!}\right)\left(\frac{|\mathcal{D}_{n-k}|}{(n-k)!}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|\mathcal{C}_k|\cdot|\mathcal{D}_{n-k}| = \left|(\mathcal{C}\star\mathcal{D})_n\right|. \end{aligned}$$ □

Podobne ako pri dvoch základných operáciách na kombinatorických triedach neoznačených objektov, nie sú ani operácie $+$ a $\star$ na kombinatorických triedach označených objektov asociatívne; pre ľubovoľné kombinatorické triedy označených objektov $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ale evidentne

$$\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \cong (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C}$$

a

$$\mathcal{A} \star (\mathcal{B} \star \mathcal{C}) \cong (\mathcal{A} \star \mathcal{B}) \star \mathcal{C}.$$

S použitím konvencie stotožňovania izomorfných tried teda píšeme

$$\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C}$$

a

$$\mathcal{A} \star (\mathcal{B} \star \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \star \mathcal{B}) \star \mathcal{C};$$

operácie $+$ a $\star$ teda *pokladáme* za asociatívne. Ak navyše $k \in \mathbb{N}$ a $S_1, \ldots, S_k$ sú množiny, môžeme považovať množinu $S_1 + \ldots + S_k$ za zloženú z prvkov (x, j), kde $j \in [k]$ a $x \in S_j$. Podobne pre kombinatorické triedy označených objektov $(\mathcal{A}^{(1)}, |\cdot|_1), \ldots, (\mathcal{A}^{(k)}, |\cdot|_k)$ považujeme triedu $(\mathcal{A}^{(1)} + \ldots + \mathcal{A}^{(k)}, |\cdot|)$ za zloženú z práve všetkých objektov (x, j), kde $j \in [k]$ a $x \in \mathcal{A}^{(j)}$, pričom v takom prípade je $|(x, j)| = |x|_j$. Triedu $(\mathcal{A}^{(1)} \star \ldots \star \mathcal{A}^{(k)}, |\cdot|)$ napokon považujeme za zloženú z práve všetkých objektov $((x_1, \ldots, x_k), f)$, kde pre $j = 1, \ldots, k$ je $x_j \in \mathcal{A}^{(j)}$ a $f \colon [|x_1|_1] + \ldots + [|x_k|_k] \to [|x_1|_1 + \ldots + |x_k|_k]$ je bijekcia taká, že pre $j = 1, \ldots, k$ a všetky $u, v \in [|x_j|_j]$ s $u < v$ je $f(u, j) < f(v, j)$; v takom prípade $|((x_1, \ldots, x_k), f)| = |x_1|_1 + \ldots + |x_k|_k$. Takáto trieda je evidentne izomorfná s ľubovoľným uzátvorkovaním výrazu $\mathcal{A}^{(1)} \star \ldots \star \mathcal{A}^{(k)}$.

Mocniny tried označených objektov. Keďže považujeme operáciu $\star$ za asociatívnu, môžeme pre všetky $k \in \mathbb{N}$ definovať *k-tu mocninu* $\textsc{Seq}_k(\mathcal{C})$ kombinatorickej triedy označených objektov $\mathcal{C}$ rekurzívne ako $\textsc{Seq}_0(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$ pre neutrálnu triedu $\mathcal{E}$ a $\textsc{Seq}_{k+1}(\mathcal{C}) = \textsc{Seq}_k(\mathcal{C}) \star \mathcal{C}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$. Kombinatorická trieda $\textsc{Seq}_k(\mathcal{C})$ pozostáva zo všetkých postupností dĺžky k tvorených izotónne preznačenými objektmi z kombinatorickej triedy $\mathcal{C}$.

Veta 3.7.3. *Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ je k-ta mocnina prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach označených objektov. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda označených objektov s exponenciálnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$, je exponenciálnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\textsc{Seq}_k(\mathcal{C})$ formálny mocninový rad*

$$C^k(z).$$

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 0$ je $\textsc{Seq}_0(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$, pričom exponenciálnou vytvárajúcou funkciou triedy $\mathcal{E}$ je $1 = C^0(z)$. Ak tvrdenie platí pre $k = s$, pre $k = s + 1$ je $\textsc{Seq}_{s+1}(\mathcal{C}) = \textsc{Seq}_s(\mathcal{C}) \star \mathcal{C}$. Exponenciálnou vytvárajúcou funkciou triedy $\mathcal{C}$ je pritom $C(z)$ a vďaka indukčnému predpokladu je exponenciálnou vytvárajúcou funkciou triedy $\textsc{Seq}_s(\mathcal{C})$ rad $C^s(z)$. Vďaka vete 3.7.2 je teda exponenciálna vytvárajúca funkcia triedy $\textsc{Seq}_{s+1}(\mathcal{C}) = \textsc{Seq}_s(\mathcal{C}) \star \mathcal{C}$ daná ako $C^s(z)C(z) = C^{s+1}(z)$. □

Trieda konečných postupností. Nech $\mathcal{C}$ je kombinatorická trieda označených objektov taká, že $\mathcal{C}_0 = \emptyset$. *Triedou konečných postupností* objektov triedy $\mathcal{C}$ potom nazveme kombinatorickú triedu označených objektov

$$\textsc{Seq}(\mathcal{C}) = \mathcal{E} + \mathcal{C} + (\mathcal{C} \star \mathcal{C}) + (\mathcal{C} \star \mathcal{C} \star \mathcal{C}) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \textsc{Seq}_k(\mathcal{C}),$$

kde $\mathcal{E}$ je neutrálna trieda.

Veta 3.7.4. *Prechod k triede konečných postupností je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach označených objektov. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda označených objektov s $\mathcal{C}_0 = \emptyset$ a s exponenciálnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$, je exponenciálnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\textsc{Seq}(\mathcal{C})$ formálny mocninový rad*

$$\frac{1}{1 - C(z)}.$$

Dôkaz. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$n![z^n]\frac{1}{1 - C(z)} = n![z^n]\sum_{k=0}^{\infty} C^k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} n![z^n]C^k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} |(\textsc{Seq}_k(\mathcal{C}))_n| = |(\textsc{Seq}(\mathcal{C}))_n| . \qquad \square$$

Triedy k-prvkových a konečných množín. V prípade označených objektov sa rozdiel medzi množinami a multimnožinami stráca – prvkom množiny totiž môže byť aj viackrát „ten istý“ objekt s inými značkami; naopak všetky objekty v multimnožine sú vždy „po dvoch rôzne“, pretože majú odlišné značky. Namiesto tried konečných podmnožín a multimnožín teda budeme pre kombinatorické triedy označených objektov $\mathcal{C}$ definovať iba triedy konečných množín pozostávajúce z niekoľkých izotónne preznačených objektov triedy $\mathcal{C}$, na ktorých poradí nezáleží.

Nech $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}})$ je kombinatorická trieda označených objektov taká, že $\mathcal{C}_0 = \emptyset$. Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ zaveďme na kombinatorickej triede označených objektov $\textsc{Seq}_k(\mathcal{C}) = (\textsc{Seq}_k(\mathcal{C}), |\cdot|_{\textsc{Seq}_k(\mathcal{C})})$ reláciu ekvivalencie $\equiv$ takú, že pre $((x_1, \ldots, x_k), f), ((y_1, \ldots, y_k), g) \in \textsc{Seq}_k(\mathcal{C})$ je

$$((x_1, \ldots, x_k), f) \equiv ((y_1, \ldots, y_k), g)$$

práve vtedy, keď existuje permutácia $\varphi\colon [k] \to [k]$ množiny $[k]$ taká, že pre $j = 1, \ldots, k$ je $x_j = y_{\varphi(j)}$ a $f(u, j) = g(u, \varphi(j))$ pre všetky $u \in [|x_j|_{\mathcal{C}}]$. Kombinatorickú triedu $\textsc{Set}_k(\mathcal{C}) = (\textsc{Set}_k(\mathcal{C}), |\cdot|)$ potom definujeme ako

$$\textsc{Set}_k(\mathcal{C}) := \textsc{Seq}_k(\mathcal{C}) / \equiv,$$

pričom pre všetky $((x_1, \ldots, x_k), f) \in \textsc{Seq}_k(\mathcal{C})$ je

$$|[((x_1, \ldots, x_k), f)]_{\equiv}| := |((x_1, \ldots, x_k), f)|_{\textsc{Seq}_k(\mathcal{C})} = |x_1|_{\mathcal{C}} + \ldots + |x_k|_{\mathcal{C}}.$$

Ďalej položme

$$\textsc{Set}(\mathcal{C}) := \sum_{j=0}^{\infty} \textsc{Set}_j(\mathcal{C}) \tag{3.7}$$

a pre všetky $k \in \mathbb{N}$ definujme

$$\textsc{Set}_{\geq k}(\mathcal{C}) := \sum_{j=k}^{\infty} \textsc{Set}_j(\mathcal{C}). \tag{3.8}$$

Triedu $\textsc{Set}_k(\mathcal{C})$ nazývame *triedou k-prvkových množín* označených objektov triedy $\mathcal{C}$, triedu $\textsc{Set}(\mathcal{C})$ nazývame *triedou konečných množín* označených objektov triedy $\mathcal{C}$ a triedu $\textsc{Set}_{\geq}(\mathcal{C})$ nazývame *triedou najmenej k-prvkových množín* označených objektov triedy $\mathcal{C}$.

Veta 3.7.5. *Prechod k triede k-prvkových množín je pre všetky $k \in \mathbb{N}$ prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach označených objektov. Ak je navyše $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|)$ kombinatorická trieda označených objektov s $\mathcal{C}_0 = \emptyset$ a s exponenciálnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$, je exponenciálnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\textsc{Set}_k(\mathcal{C})$ formálny mocninový rad*

$$\frac{1}{k!}C^k(z).$$

Dôkaz. Nech $((x_1, \ldots, x_k), f) \in \textsc{Seq}_k(\mathcal{C})$. Trieda ekvivalencie $[((x_1, \ldots, x_k), f)]_\equiv$ potom pozostáva z práve všetkých objektov $((y_1, \ldots, y_k), g)$, kde $y_1, \ldots, y_k \in \mathcal{C}$ a $g\colon [|y_1|] + \ldots + [|y_k|] \to [|y_1| + \ldots + |y_k|]$ je bijekcia spĺňajúca $f(u, j) < f(v, j)$ pre všetky $j \in [k]$ a $u, v \in [|y_j|]$ také, že $u < v$, pričom pre nejakú permutáciu $\varphi\colon [k] \to [k]$ a $j = 1, \ldots, k$ je $x_j = y_{\varphi(j)}$ a $f(u, j) = g(u, \varphi(j))$ pre všetky $u \in [|x_j|]$. Pre $j = 1, \ldots, k$ je potom $g([|y_{\varphi(j)}|] \times \{\varphi(j)\}) = f([|x_j|] \times \{j\})$ – keďže sú pritom tieto obrazy množín pre $j = 1, \ldots, k$ po dvoch disjunktné, je zobrazením g jednoznačne určená aj permutácia φ. Každá permutácia $\varphi\colon [k] \to [k]$ teda zodpovedá práve jednému objektu z triedy ekvivalencie $[((x_1, \ldots, x_k), f)]_\equiv$, ktorá v dôsledku toho obsahuje presne $k!$ rôznych objektov. Keďže sú všetky objekty z tejto triedy ekvivalencie rovnakej veľkosti, pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dostávame

$$\left|(\textsc{Set}_k(\mathcal{C}))_n\right| = \frac{1}{k!}\left|(\textsc{Seq}_k(\mathcal{C}))_n\right|.$$

Pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $S_k(z)$ triedy označených objektov $\textsc{Set}_k(\mathcal{C})$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ teda vďaka vete 3.7.3 dostávame

$$[z^n]S_k(z) = \frac{1}{k!}[z^n]C^k(z) = [z^n]\frac{1}{k!}C^k(z),$$

z čoho vyplýva aj dokazovaná rovnosť

$$S_k(z) = \frac{1}{k!}C^k(z). \qquad \square$$

Dôkaz predchádzajúcej vety bol založený na pozorovaní, že pre každú postupnosť dĺžky k zloženú z označených objektov triedy $\mathcal{C}$ sú ľubovoľné dve jej permutácie navzájom rozlíšiteľné, pretože na aspoň dvoch pozíciách musia obsahovať objekty označené rôznou množinou značiek. To je pravda iba v prípade, že $\mathcal{C}_0 = \emptyset$, čo vysvetľuje použitie tohto predpokladu už pri triedach k-prvkových množín (a nie až pri triedach konečných množín, kde je tento predpoklad nevyhnutný).

Veta 3.7.6. *Prechod k triede konečných množín je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach označených objektov. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda označených objektov s $\mathcal{C}_0 = \emptyset$ a s exponenciálnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$, je exponenciálnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\textsc{Set}(\mathcal{C})$ formálny mocninový rad*

$$e^{C(z)}.$$

Dôkaz. Zo vzťahu (3.7) a vety 3.7.5 pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $S(z)$ triedy $\textsc{Set}(\mathcal{C})$ dostávame

$$S(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}C^j(z) = e^{C(z)}. \qquad \square$$

Veta 3.7.7. *Prechod k triede najmenej k-prvkových množín je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach označených objektov. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda označených objektov s $\mathcal{C}_0 = \emptyset$ a s exponenciálnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$, je exponenciálnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\textsc{Set}_{\geq k}(\mathcal{C})$ formálny mocninový rad*

$$e^{C(z)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}C^j(z).$$

Dôkaz. Zo vzťahu (3.8) a vety 3.7.5 pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $S_{\geq k}(z)$ triedy $\textsc{Set}_{\geq k}(\mathcal{C})$ dostávame

$$S(z) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j!} C^j(z) = e^{C(z)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} C^j(z).$$ □

Triedy orientovaných kružníc. Nech $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}})$ je kombinatorická trieda označených objektov taká, že $\mathcal{C}_0 = \emptyset$. Pre všetky $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zaveďme na triede $\textsc{Seq}_k(\mathcal{C}) = (\textsc{Seq}_k(\mathcal{C}), |\cdot|_{\textsc{Seq}_k(\mathcal{C})})$ reláciu ekvivalencie $\equiv$ takú, že pre $((x_1, \ldots, x_k), f), ((y_1, \ldots, y_k), g) \in \textsc{Seq}_k(\mathcal{C})$ je

$$((x_1, \ldots, x_k), f) \equiv ((y_1, \ldots, y_k), g)$$

práve vtedy, keď existuje zobrazenie $\varphi\colon [k] \to [k]$ realizujúce cyklický posun – t. j.

$$\varphi(j) = ((j - 1 + s) \bmod k) + 1$$

pre nejaké $s \in \mathbb{Z}_k$ a $j = 1, \ldots, k$ – také, že pre $j = 1, \ldots, k$ je $x_j = y_{\varphi(j)}$ a $f(u, j) = g(u, \varphi(j))$ pre všetky $u \in [|x_j|_{\mathcal{C}}]$. *Triedu* $\textsc{Cyc}_k(\mathcal{C}) = (\textsc{Cyc}_k(\mathcal{C}), |\cdot|)$ *orientovaných kružníc dĺžky* k zložených z označených objektov triedy $\mathcal{C}$ potom definujeme ako

$$\textsc{Cyc}_k(\mathcal{C}) := \textsc{Seq}_k(\mathcal{C}) / \equiv,$$

pričom pre všetky $((x_1, \ldots, x_k), f) \in \textsc{Seq}_k(\mathcal{C})$ je

$$|[((x_1, \ldots, x_k), f)]_{\equiv}| := |((x_1, \ldots, x_k), f)|_{\textsc{Seq}_k(\mathcal{C})} = |x_1|_{\mathcal{C}} + \ldots + |x_k|_{\mathcal{C}}.$$

Triedu $\textsc{Cyc}(\mathcal{C})$ *všetkých orientovaných kružníc* zložených z označených objektov triedy $\mathcal{C}$ ďalej definujeme ako

$$\textsc{Cyc}(\mathcal{C}) := \sum_{k=1}^{\infty} \textsc{Cyc}_k(\mathcal{C}). \tag{3.9}$$

Veta 3.7.8. *Prechod k triede orientovaných kružníc dĺžky* k *je pre všetky* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach označených objektov. Ak je navyše* $\mathcal{C}$ *kombinatorická trieda označených objektov s* $\mathcal{C}_0 = \emptyset$ *a s exponenciálnou vytvárajúcou funkciou* $C(z)$*, je exponenciálnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy* $\textsc{Cyc}_k(\mathcal{C})$ *formálny mocninový rad*

$$\frac{1}{k} C^k(z).$$

Dôkaz. Nech $((x_1, \ldots, x_k), f) \in \textsc{Seq}_k(\mathcal{C})$. Podobne ako pri dôkaze vety 3.7.5 potom zisťujeme, že trieda ekvivalencie $[((x_1, \ldots, x_k), f)]_{\equiv}$ pozostáva z práve k rôznych objektov. Keďže sú navyše všetky objekty z tejto triedy ekvivalencie rovnakej veľkosti, pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$|(\textsc{Cyc}_k(\mathcal{C}))_n| = \frac{1}{k} |(\textsc{Seq}_k(\mathcal{C}))_n|.$$

Pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $Y_k(z)$ triedy označených objektov $\textsc{Cyc}_k(\mathcal{C})$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ tak vďaka vete 3.7.3 dostávame

$$[z^n] Y_k(z) = \frac{1}{k} [z^n] C^k(z) = [z^n] \frac{1}{k} C^k(z),$$

a teda aj

$$Y_k(z) = \frac{1}{k} C^k(z).$$ □

Veta 3.7.9. *Prechod k triede všetkých orientovaných kružníc je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach označených objektov. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda označených objektov s $\mathcal{C}_0 = \emptyset$ a s exponenciálnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$, je exponenciálnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy* $\mathrm{Cyc}(\mathcal{C})$ *formálny mocninový rad*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C^k(z) = \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{1 - C(z)}\right).$$

Dôkaz. Zo vzťahu (3.9) a vety 3.7.8 pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $Y(z)$ triedy $\mathrm{Cyc}(\mathcal{C})$ dostávame

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C^k(z),$$

kde súčet je cez lokálne konečný systém radov, keďže $[z^0]C(z) = 0$. Podľa vety 2.9.4 je ďalej

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{1 - C(z)}\right) = -\mathrm{Ln}\left(1 - C(z)\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-1)^k C^k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C^k(z) = Y(z),$$

čím je dokázané aj druhé z vyjadrení exponenciálnej vytvárajúcej funkcie $Y(z)$. □

Punktácia. *Punktáciu* kombinatorickej triedy označených objektov $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}})$ definujeme podobne ako pre triedy neoznačených objektov: ide o kombinatorickú triedu označených objektov $\Theta\mathcal{C} = (\Theta\mathcal{C}, |\cdot|)$ pozostávajúcu z objektov triedy $\mathcal{C}$, v ktorých je jedna zo značiek zvolená ako význačná - je teda

$$\Theta\mathcal{C} := \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \times [n],$$

pričom pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathcal{C}_n$ a $k \in [n]$ je $|(x,k)| := |x|_{\mathcal{C}}$.

Veta 3.7.10. *Punktácia je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach označených objektov. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda označených objektov s exponenciálnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$, je exponenciálnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\Theta\mathcal{C}$ formálny mocninový rad*

$$z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} C(z).$$

Dôkaz. Pre $n = 0$ je

$$\left|(\Theta\mathcal{C})_n\right| = 0 = n! \cdot [z^n] z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} C(z)$$

a pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je

$$\left|(\Theta\mathcal{C})_n\right| = n\,|\mathcal{C}_n| = n \cdot n! \cdot [z^n]C(z) = n \cdot n! \cdot \frac{1}{n} \cdot [z^{n-1}]C'(z) = n! \cdot [z^{n-1}]C'(z) = n! \cdot [z^n] z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} C(z).$$

Exponenciálnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\Theta\mathcal{C}$ teda musí byť $zC'(z)$. □

Substitúcia. Pod *substitúciou* kombinatorickej triedy označených objektov $\mathcal{D}$ spĺňajúcej $\mathcal{D}_0 = \emptyset$ do kombinatorickej triedy označených objektov $\mathcal{C}$ – resp. pod *zložením* tried $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ – rozumieme kombinatorickú triedu $\mathcal{C} \circ \mathcal{D}$ pozostávajúcu z označených objektov, ktoré vzniknú z objektov triedy $\mathcal{C}$ nahradením atómov izotónne preznačenými objektmi triedy $\mathcal{D}$. Ak sú pritom atómy pôvodného objektu z triedy $\mathcal{C}$ označené značkami $1, \ldots, n$, bude pre všetky $k \in [n]$ atóm so značkou k nahradený tým spomedzi objektov triedy $\mathcal{D}$, ktorého minimálna značka je spomedzi dosadzovaných objektov k-ta najmenšia. Každý takýto objekt triedy $\mathcal{C} \circ \mathcal{D}$ je teda jednoznačne určený označeným objektom triedy $\mathcal{C}$ veľkosti n a n-prvkovou množinou označených objektov triedy $\mathcal{D}$, pričom veľkosť výsledného objektu je daná veľkosťou tejto n-prvkovej množiny z triedy $(\mathrm{Set}_n(\mathcal{D}), |\cdot|_{\mathrm{Set}_n(\mathcal{D})})$.

Nech teda $(\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}}), (\mathcal{D}, |\cdot|_{\mathcal{D}})$ sú kombinatorické triedy označených objektov. Kombinatorická trieda označených objektov $(\mathcal{C} \circ \mathcal{D}, |\cdot|)$ je potom daná ako

$$\mathcal{C} \circ \mathcal{D} := \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \times \textsc{Set}_n(\mathcal{D}),$$

pričom pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathcal{C}_n$ a $S \in \textsc{Set}_n(\mathcal{D})$ je

$$|(x,S)| := |S|_{\textsc{Set}_n(\mathcal{D})}.$$

Veta 3.7.11. *Substitúcia je prípustnou konštrukciou na kombinatorických triedach označených objektov. Ak je navyše $\mathcal{C}$ kombinatorická trieda označených objektov s exponenciálnou vytvárajúcou funkciou $C(z)$ a $\mathcal{D}$ je kombinatorická trieda označených objektov s $\mathcal{D}_0 = \emptyset$ a s exponenciálnou vytvárajúcou funkciou $D(z)$, je exponenciálnou vytvárajúcou funkciou kombinatorickej triedy $\mathcal{C} \circ \mathcal{D}$ formálny mocninový rad*

$$(C \circ D)(z) = C(D(z)).$$

Dôkaz. Nech $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel taká, že

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}.$$

Vďaka tvrdeniu 3.6.6 je potom exponenciálnou vytvárajúcou funkciou triedy $\mathcal{C} \circ \mathcal{D}$ formálny mocninový rad

$$\sum_{u \in \mathcal{C} \circ \mathcal{D}} \frac{z^{|u|}}{|u|!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x \in \mathcal{C}_n} \sum_{S \in \textsc{Set}_n(\mathcal{D})} \frac{z^{|(x,S)|}}{|(x,S)|!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x \in \mathcal{C}_n} \sum_{S \in \textsc{Set}_n(\mathcal{D})} \frac{z^{|S|_{\textsc{Set}_n(\mathcal{D})}}}{|S|_{\textsc{Set}_n(\mathcal{D})}!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{S \in \textsc{Set}_n(\mathcal{D})} \frac{z^{|S|_{\textsc{Set}_n(\mathcal{D})}}}{|S|_{\textsc{Set}_n(\mathcal{D})}!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{D^n(z)}{n!} = C(D(z)) = (C \circ D)(z). \qquad \square$$

Iteratívne a rekurzívne špecifikácie. *Špecifikáciou* kombinatorických tried označených objektov nazveme, podobne ako pri triedach neoznačených objektov, systém rovníc

$$\mathcal{A}^{(1)} = \Phi_1\left(\mathcal{A}^{(1)}, \ldots, \mathcal{A}^{(m)}\right),$$
$$\mathcal{A}^{(2)} = \Phi_2\left(\mathcal{A}^{(1)}, \ldots, \mathcal{A}^{(m)}\right),$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{A}^{(m)} = \Phi_m\left(\mathcal{A}^{(1)}, \ldots, \mathcal{A}^{(m)}\right),$$

kde $\mathcal{A}^{(1)}, \ldots, \mathcal{A}^{(m)}$ sú neznáme kombinatorické triedy označených objektov a $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ sú m-árne prípustné konštrukcie na kombinatorických triedach označených objektov – typicky sa pritom stačí obmedziť na prípustné konštrukcie, ktoré sú dané ako termy zložené z neutrálnych tried $\mathcal{E}$, atomických tried $\mathcal{Z}$ a štandardných prípustných konštrukcií zavedených vyššie. Podobne ako pre kombinatorické triedy neoznačených objektov tiež špecifikácie delíme na *iteratívne* a *rekurzívne*.

3.8 Symbolická metóda pre označené objekty: príklady

Príklad 3.8.1. Všetky *permutácie* množín $[n]$ pre $n \in \mathbb{N}$, s veľkosťou danou počtom prvkov n permutovanej množiny, tvoria kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{P}$, ktorú môžeme vyjadriť ako

$$\mathcal{P} = \textsc{Seq}(\mathcal{Z}),$$

kde $\mathcal{Z}$ je atomická trieda – prvkami tejto triedy sú totiž všetky postupnosti atómov označených v prípade postupnosti dĺžky $n \in \mathbb{N}$ značkami $1, \ldots, n$. Exponenciálna vytvárajúca funkcia $P(z)$ triedy $\mathcal{P}$ je teda daná ako

$$P(z) = \frac{1}{1-z},$$

z čoho pre všetky $n \in \mathbb{N}$ pre počet permutácií množiny $[n]$ podľa očakávania dostávame

$$|\mathcal{P}_n| = n![z^n]P(z) = n!.$$

Príklad 3.8.2. *Urnou* nazveme graf o $n \in \mathbb{N}$ označených vrcholoch bez jedinej hrany. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ evidentne existuje práve jeden takýto graf, čo môžeme potvrdiť aj pomocou symbolickej metódy. Triedu $\mathcal{U}$ všetkých urien s veľkosťou danou počtom vrcholov totiž môžeme evidentne vyjadriť ako

$$\mathcal{U} = \textsc{Set}(\mathcal{Z}),$$

z čoho pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $U(z)$ triedy $\mathcal{U}$ dostávame

$$U(z) = e^z.$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je teda naozaj

$$|\mathcal{U}_n| = n![z^n]U(z) = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Príklad 3.8.3. Uvažujme teraz počet všetkých *surjektívnych zobrazení* z množiny $[n]$ pre $n \in \mathbb{N}$ do množiny $[r]$ pre $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pre $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pevné tvorí množina takýchto surjekcií pre všetky $n \in \mathbb{N}$ kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{S}^{(r)}$, kde veľkosťou surjekcie $\varphi\colon [n] \to [r]$ rozumieme číslo n. Každú takúto surjekciu pritom možno opísať postupnosťou vzorov jednotlivých prvkov $1, \ldots, r$, ktorými môžu byť ľubovoľné neprázdne podmnožiny množiny $[n]$. Je teda

$$\mathcal{S}^{(r)} = \textsc{Seq}_r(\textsc{Set}_{\geq 1}(\mathcal{Z})),$$

kde $\mathcal{Z}$ je atomická trieda. Pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $S_r(z)$ triedy $\mathcal{S}^{(r)}$ tak dostávame vzťah

$$S_r(z) = (e^z - 1)^r.$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je teda počet surjekcií z množiny $[n]$ do množiny $[r]$ daný ako

$$\left|\mathcal{S}^{(r)}\right| = n![z^n]S_r(z) = n![z^n](e^z-1)^r = n![z^n]\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}e^{jz} = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}j^n = r!\left\{ {n \atop r} \right\}.$$

Tento súvis so Stirlingovými číslami druhého druhu nie je z kombinatorického hľadiska nijak prekvapivý – každá surjekcia do r-prvkovej množiny je totiž jednoznačne daná rozkladom svojho definičného oboru na r tried a informáciou o tom, na ktoré prvky sa zobrazia prvky jednotlivých tried rozkladu.

Príklad 3.8.4. Podobne ako v predchádzajúcom príklade môžeme uvažovať aj celkový počet všetkých *surjektívnych zobrazení* z množiny $[n]$ pre $n \in \mathbb{N}$ do ktorejkoľvek z množín $[r]$ pre $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Takéto surjekcie tvoria kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{S}$, kde veľkosťou surjekcie $\varphi\colon [n] \to [r]$ rozumieme číslo n; túto triedu potom možno evidentne opísať ako

$$\mathcal{S} = \textsc{Seq}(\textsc{Set}_{\geq 1}(\mathcal{Z})),$$

z čoho pre príslušnú exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $S(z)$ dostávame

$$S(z) = \frac{1}{1-(e^z-1)} = \frac{1}{2-e^z}.$$

Neskôr uvidíme, že pomocou analytických metód možno ľahko dospieť k asymptotickému odhadu pre koeficienty tejto vytvárajúcej funkcie.

Príklad 3.8.5. Jazyk všetkých slov nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ môžeme chápať aj ako kombinatorickú triedu *označených* objektov $\mathcal{W}$, kde veľkosťou každého slova je jeho bežne definovaná dĺžka. Každé slovo je pritom dané dvojicou urien, kde prvá urna pozostáva z atómov označených indexmi písmen a a druhá urna pozostáva z atómov označených indexmi písmen b v danom slove. Pre triedu $\mathcal{U}$ z príkladu 3.8.2 je teda

$$\mathcal{W} = \mathcal{U} \times \mathcal{U},$$

z čoho pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $W(z)$ triedy $\mathcal{W}$ dostávame

$$W(z) = U^2(z) = e^{2z}.$$

Podľa očakávania teda pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$|\mathcal{W}_n| = n![z^n]W(z) = n![z^n]e^{2z} = n!\frac{2^n}{n!} = 2^n.$$

Príklad 3.8.6. Triedu $\mathcal{P}$ všetkých permutácií množín $[n]$ pre $n \in \mathbb{N}$ z príkladu 3.8.1 možno špecifikovať aj s využitím poznatku, že každú permutáciu možno práve jedným spôsobom rozložiť na disjunktné cykly – prichádzame tak ku vzťahu

$$\mathcal{P} = \textsc{Set}(\textsc{Cyc}(\mathcal{Z})),$$

z čoho pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $P(z)$ triedy $\mathcal{P}$ dostávame

$$P(z) = \exp\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{1-z}\right)\right) = \frac{1}{1-z},$$

čo sa zhoduje s pozorovaním z príkladu 3.8.1.

Príklad 3.8.7. Uvažujme teraz pre všetky $r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{P}^{(r)}$ pozostávajúcu z práve všetkých permutácií množín $[n]$ pre $n \in \mathbb{N}$ rozložiteľných na práve r disjunktných cyklov; veľkosťou permutácie opäť rozumieme počet prvkov permutovanej množiny. Túto triedu možno špecifikovať ako

$$\mathcal{P}^{(r)} = \textsc{Set}_r(\textsc{Cyc}(\mathcal{Z})),$$

z čoho pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $P_r(z)$ triedy $\mathcal{P}^{(r)}$ dostávame vzťah

$$P_r(z) = \frac{1}{r!}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)^r.$$

Preto

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} := \left|\mathcal{P}_n^{(r)}\right| = n![z^n]P_r(z) = \frac{n!}{r!}[z^n]\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)^r.$$

Tieto hodnoty sa zvyknú nazývať *Stirlingovými číslami prvého druhu.*

Príklad 3.8.8. *Dismutáciou* nazývame permutáciu bez pevného bodu – všetky cykly takejto permutácie sú teda dĺžky aspoň 2. Uvažujme kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{D}$ pozostávajúcu zo všetkých dismutácií množín $[n]$ pre $n \in \mathbb{N}$. Veľkosťou dismutácie opäť rozumieme počet prvkov permutovanej množiny.

Pre ľubovoľnú kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{C}$ spĺňajúcu $\mathcal{C}_0 = \emptyset$ môžeme uvažovať kombinatorickú triedu

$$\textsc{Cyc}_{>1}(\mathcal{C}) = \sum_{k=2}^{\infty} \textsc{Cyc}_k(\mathcal{C}),$$

ktorej exponenciálna vytvárajúca funkcia $C_{>1}(z)$ je evidentne daná ako

$$C_{>1}(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} C^k(z) = \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{1 - C(z)}\right) - C(z).$$

Triedu $\mathcal{D}$ potom možno vyjadriť pomocou špecifikácie

$$\mathcal{D} = \textsc{Set}(\textsc{Cyc}_{>1}(\mathcal{Z})),$$

z čoho pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $D(z)$ triedy $\mathcal{D}$ dostávame

$$D(z) = \exp\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{1-z}\right) - z\right) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

Kapitola 4

Lagrangeova veta o inverzii

Enumeračné úlohy často vedú k vyjadreniu obyčajnej alebo exponenciálnej vytvárajúcej funkcie $C(z)$ uvažovanej kombinatorickej triedy $\mathcal{C}$ neoznačených resp. označených objektov v podobe formálneho mocninového radu, ktorý je *vzhľadom na skladanie radov inverzný* k nejakému známemu radu – vytvárajúca funkcia $C(z)$ teda môže byť daná ako $z = R(C(z))$ pre nejaký známy formálny mocninový rad $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$. Hoci v takom prípade nemusí byť vždy možné prejsť od takéhoto implicitného vyjadrenia vytvárajúcej funkcie $C(z)$ k jej explicitnému vyjadreniu, možno pomocou koeficientov radu $R(z)$ vyjadriť koeficienty radu $C(z)$. O vzťahu koeficientov týchto dvoch radov hovorí *Lagrangeova veta o inverzii*, ktorú v nasledujúcom dokážeme a aplikujeme na riešenie niekoľkých kombinatorických úloh. Niektoré časti tejto kapitoly vychádzajú z knihy [10].

4.1 Formálne Laurentove rady

Hoci možno Lagrangeovu vetu o inverzii dokázať napríklad aj analyticky alebo kombinatoricky, my túto vetu dokážeme – podobne ako všetky ostatné fundamentálne vlastnosti formálnych mocninových radov – čisto algebraicky. Takýto dôkaz si ale vyžaduje rozšíriť obor integrity $\mathbb{C}[\![z]\!]$ formálnych mocninových radov s komplexnými koeficientmi na jeho podielové pole $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ pozostávajúce zo všetkých *formálnych Laurentových radov* o jednej premennej z s komplexnými koeficientmi. Formálne Laurentove rady pritom definujeme ako *zľava konečné*, čo v komplexnej analýze zodpovedá existencii pólu v bode 0; rady, ktoré by zodpovedali podstatnej izolovanej singularite v bode 0, prvkami $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ nie sú.

Definícia 4.1.1. *Formálny Laurentov rad* o jednej premennej z s komplexnými koeficientmi je postupnosť $R = (a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, kde pre všetky $n \in \mathbb{Z}$ je $a_n \in \mathbb{C}$ a existuje $N \in \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla $n < N$ je $a_n = 0$. Pre ľubovoľné takéto N potom namiesto $R = (a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ píšeme

$$R = R(z) = a_N z^N + a_{N+1} z^{N+1} + a_{N+2} z^{N+2} + \ldots = \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n$$

a prvky postupnosti $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ nazývame *koeficientmi* radu R. Koeficient pri z^n označujeme pre všetky $n \in \mathbb{Z}$ ako

$$[z^n]R(z) := a_n.$$

Koeficient a_0 radu R nazývame *konštantným* a koeficient a_{-1} nazývame *formálnym rezíduom* radu R. Množinu všetkých formálnych Laurentových radov o jednej premennej z s komplexnými koeficientmi označujeme $\mathbb{C}(\!(z)\!)$.

Každý formálny mocninový rad $R(z)$ zároveň považujeme aj za formálny Laurentov rad taký, že pre všetky celé čísla $n < 0$ je $[z^n]R(z) = 0$. Dostávame tak inklúziu $\mathbb{C}[\![z]\!] \subseteq \mathbb{C}(\!(z)\!)$.

Dve najdôležitejšie operácie na formálnych Laurentových radoch – *súčet* a *Cauchyho súčin* – definujeme obdobným spôsobom ako pre formálne mocninové rady.

Definícia 4.1.2. Nech $R(z), S(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$ sú formálne Laurentove rady. *Súčtom* radov $R(z)$ a $S(z)$ nazývame formálny Laurentov rad $(R+S)(z) = R(z) + S(z)$ taký, že pre všetky $n \in \mathbb{Z}$ je

$$[z^n](R+S)(z) = [z^n]R(z) + [z^n]S(z).$$

Cauchyho súčinom radov $R(z)$ a $S(z)$ nazývame formálny Laurentov rad $(R \cdot S)(z) = R(z) \cdot S(z)$ taký, že pre všetky $n \in \mathbb{Z}$ je

$$[z^n](R \cdot S)(z) = \sum_{k=N}^{n-N} \left([z^k]R(z)\right)\left([z^{n-k}]S(z)\right),$$

kde $N \in \mathbb{Z}$ je ľubovoľné celé číslo také, že pre všetky celé čísla $n < N$ je $[z^n]R(z) = [z^n]S(z) = 0$.

Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ďalej označíme ako z^{-n} formálny Laurentov rad $R(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$ taký, že $[z^{-n}]R(z) = 1$ a $[z^k]R(z) = 0$ pre všetky $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-n\}$.

Podobným spôsobom ako pre formálne mocninové rady by sme ľahko dokázali, že $(\mathbb{C}(\!(z)\!), +, \cdot, 0, 1)$ je obor integrity. Z uvedenej definície operácií súčtu a Cauchyho súčinu formálnych Laurentových radov navyše ľahko vidieť, že obor integrity $(\mathbb{C}[\![z]\!], +, \cdot, 0, 1)$ je podokruhom $\mathbb{C}(\!(z)\!)$. Dokážeme teraz, že $(\mathbb{C}(\!(z)\!), +, \cdot, 0, 1)$ tvorí v skutočnosti pole.

Tvrdenie 4.1.3. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!) \setminus \{0\}$ je nenulový formálny Laurentov rad. Potom existuje práve jeden formálny Laurentov rad $R^{-1}(z)$ taký, že $R(z)R^{-1}(z) = 1$ a $(\mathbb{C}(\!(z)\!), +, \cdot, 0, 1)$ je pole.*

Dôkaz. Rad $R(z)$ je nenulový – nech je teda N najmenšie $n \in \mathbb{Z}$ také, že $[z^n]R(z) \neq 0$. To znamená, že

$$R(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n,$$

kde $a_N \neq 0$. Potom

$$S(z) := z^{-N}R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N} z^n \in \mathbb{C}[\![z]\!]$$

je formálny mocninový rad s nenulovým konštantným koeficientom a podľa tvrdenia 2.3.2 tak k nemu existuje multiplikatívny inverzný prvok $S^{-1}(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$. Pre rad

$$R^{-1}(z) := z^{-N}S^{-1}(z)$$

ale v takom prípade dostávame

$$R(z)R^{-1}(z) = z^N S(z) z^{-N} S^{-1}(z) = S(z)S^{-1}(z) = 1.$$

Obor integrity $(\mathbb{C}(\!(z)\!), +, \cdot, 0, 1)$ tak musí byť poľom, z čoho vyplýva aj jedinečnosť multiplikatívneho inverzného prvku $R^{-1}(z)$. □

Formálnu deriváciu formálneho Laurentovho radu definujeme podobne ako pre formálne mocninové rady, čo vychádza zo skutočnosti, že aj Laurentove rady analytických funkcií možno derivovať člen po člene.

Definícia 4.1.4. Nech $R(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$ je formálny Laurentov rad. *Formálnou deriváciou* radu $R(z)$ nazveme formálny Laurentov rad

$$R'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}R(z) := \sum_{n=N-1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n.$$

4.2 Lagrangeova veta o inverzii

Začnime dôkazom jednoduchého tvrdenia charakterizujúceho tie formálne mocninové rady $R(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, ku ktorým existuje rad *inverzný vzhľadom na skladanie* – čiže formálny mocninový rad $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ taký, že $R(S(z)) = S(R(z)) = z$. Keďže sú tieto zložené rady $R(S(z))$ a $S(R(z))$ definované iba za predpokladu $[z^0]S(z) = 0$ resp. $[z^0]R(z) = 0$, obmedzíme sa v znení tvrdenia iba na rady s nulovými konštantnými koeficientmi.

Tvrdenie 4.2.1. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ je formálny mocninový rad taký, že $[z^0]R(z) = 0$. Formálny mocninový rad $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ spĺňajúci $[z^0]S(z) = 0$ a $R(S(z)) = S(R(z)) = z$ potom existuje práve vtedy, keď $[z^1]R(z) \neq 0$; v takom prípade je rad $S(z)$ daný jednoznačne. Ak navyše $[z^0]S(z) = 0$ a je splnená aspoň jedna z rovností $R(S(z)) = z$ alebo $S(R(z)) = z$, nutne $R(S(z)) = S(R(z)) = z$.*

Dôkaz. Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných koeficientov takých, že

$$R(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Ak $a_1 = [z^1]R(z) = 0$, musí pre všetky $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ spĺňajúce $[z^0]S(z) = 0$ byť

$$[z^1]R(S(z)) = [z^1]\sum_{n=1}^{\infty} a_n S^n(z) = [z^1]\sum_{n=2}^{\infty} a_n S^n(z) = 0,$$

a teda $R(S(z)) \neq z$.

Uvažujme teda prípad, keď $a_1 = [z^1]R(z) \neq 0$. Predpokladajme, že formálny mocninový rad $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, daný ako

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

pre postupnosť komplexných koeficientov $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, vyhovuje rovnosti $R(S(z)) = z$. Z definície zloženia formálnych mocninových radov potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n S^n(z) = a_1(b_1 z^1 + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots) + a_2(b_1 z^1 + b_2 z^2 + \ldots)^2 + a_3(b_1 z^1 + b_2 z^2 + \ldots)^3 + \ldots = z.$$

Z toho vyplýva, že

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 &= 1,\\
a_1 b_2 + a_2 b_1^2 &= 0,\\
a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 &= 0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ak pritom pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ poznáme koeficienty $b_1, \ldots, b_n$, môžeme z $(n+1)$-tej z uvedených rovníc – vďaka predpokladu $a_1 \neq 0$ – jednoznačne vyjadriť aj hodnotu koeficientu b_{n+1}. Pre ľubovoľný rad $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ s koeficientmi spĺňajúcimi uvedený systém rovníc naopak evidentne $R(S(z)) = z$. Existuje teda práve jeden rad $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ taký, že $[z^0]S(z) = 0$ a $R(S(z)) = z$. Z rovnosti $a_1 b_1 = 1$ navyše vyplýva $[z^1]S(z) \neq 0$ a z horeuvedených úvah dostaneme existenciu jediného radu $T(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ spĺňajúceho $[z^0]T(z) = 0$ a $S(T(z)) = z$. Keďže pritom $(R \circ S)(z) = z$, musí byť aj $(R \circ S)(T(z)) = T(z)$, a teda $R(z) = R(S(T(z))) = T(z)$. Dostávame tak aj druhú rovnosť $S(R(z)) = z$.

Keby napokon pre nejaký rad $T(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ rôzny od $S(z)$ bolo $[z^0]T(z) = 0$ a $T(R(z)) = z$, z uvedeného by vyplývalo aj $R(T(z)) = z$, čo by odporovalo dokázanej jednoznačnosti radu $S(z)$ spĺňajúceho $[z^0]S(z) = 0$ a $R(S(z)) = z$. □

Môžeme teraz sformulovať a dokázať samotnú Lagrangeovu vetu o inverzii, pomocou ktorej možno pre formálne mocninové rady $R(z), S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ spĺňajúce $[z^0]R(z) = [z^0]S(z) = 0$ a $S(R(z)) = z$ – a podľa tvrdenia 4.2.1 teda aj $R(S(z)) = z$ – vyjadriť koeficienty $R(z)$ pomocou koeficientov $S(z)$.

Veta 4.2.2 (Lagrangeova veta o inverzii)**.** *Nech $R(z), S(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ sú formálne mocninové rady také, že $[z^0]R(z) = [z^0]S(z) = 0$ a $S(R(z)) = z$. Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ potom*

$$[z^n]R(z) = \frac{1}{n}[z^{-1}]\frac{1}{S^n(z)}. \tag{4.1}$$

Špeciálne v prípade, keď $S(z) = z/\phi(z)$ pre nejaký formálny mocninový rad $\phi(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ spĺňajúci $[z^0]\phi(z) \neq 0$ a $R(z) = z\phi(R(z))$, je pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$[z^n]R(z) = \frac{1}{n}[z^{n-1}]\phi^n(z) \tag{4.2}$$

a pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $k \in \mathbb{N}$ je[1]

$$[z^n]R^k(z) = \frac{k}{n}[z^{n-k}]\phi^n(z). \tag{4.3}$$

Poznámka 4.2.3. Pri vzťahu (4.2) sa niekedy zvykne hovoriť o inverzii v *Lagrangeovom tvare*, kým vzťah (4.3) sa nazýva *Bürmannovým tvarom* Lagrangeovej vety o inverzii.

Dôkaz vety 4.2.2. Podľa tvrdenia 4.2.1 musí byť aj $R(S(z)) = z$. Ak teda

$$R(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

a

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

pre nejaké postupnosti komplexných koeficientov $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, je

$$R(S(z)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k S^k(z) = z. \tag{4.4}$$

Pokúsme sa pre dané $n \in \mathbb{N}$ z tohto vzťahu vyjadriť koeficient a_n. Využijeme pritom očividnú vlastnosť formálnych Laurentových radov: pre rezíduum derivácie ľubovoľného $L(z) \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$ platí $[z^{-1}]L'(z) = 0$.

Derivovaním rovnosti (4.4) dostávame

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k S^{k-1}(z) S'(z) = 1.$$

Rad $S(z)$ je vďaka tvrdeniu 4.2.1 nenulový a rovnosť tak môžeme predeliť radom $S^n(z)$:

$$\frac{1}{S^n(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k S^{k-n-1}(z) S'(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k a_k}{k-n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} S^{k-n}(z) + n a_n S^{-1}(z) S'(z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k a_k}{k-n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} S^{k-n}(z).$$

[1] Vo všeobecnosti nemusí byť $k \leq n$, takže koeficient $[z^{n-k}]\phi^n(z)$ treba na pravej strane nasledujúcej rovnosti interpretovať v zmysle definície pre Laurentove rady; keďže je ale $\phi^n(z)$ formálny mocninový rad, bude v prípade $k > n$ vždy $[z^{n-k}]\phi^n(z) = 0$.

Keďže je teda rezíduum formálnej derivácie každého formálneho Laurentovho radu nulové a keďže podľa tvrdenia 4.2.1 musí byť $b_1 \neq 0$, nutne

$$[z^{-1}]\frac{1}{S^n(z)} = [z^{-1}]na_nS^{-1}(z)S'(z) = na_n[z^{-1}]\frac{S'(z)}{S(z)} = na_n[z^{-1}]\frac{b_1 + 2b_2z + 3b_3z^2 + \ldots}{b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + \ldots} =$$
$$= na_n[z^{-1}]\left(\frac{b_1 + 2b_2z + 3b_3z^2 + \ldots}{b_1z} \cdot \frac{1}{1 + (b_2/b_1)z + (b_3/b_1)z^2 + \ldots}\right) = na_n,$$

čím je dokázaná rovnosť (4.1):

$$a_n = [z^n]R(z) = \frac{1}{n}[z^{-1}]\frac{1}{S^n(z)}.$$

Nech ďalej $S(z) = z/\phi(z)$ pre $\phi(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ také, že $[z^0]\phi(z) \neq 0$. Potom

$$S(R(z)) = \frac{R(z)}{\phi(R(z))}$$

a rovnosti $R(S(z)) = S(R(z)) = z$ sú tak ekvivalentné rovnosti $R(z) = z\phi(R(z))$. V takom prípade je

$$a_n = [z^n]R(z) = \frac{1}{n}[z^{-1}]\frac{1}{S^n(z)} = \frac{1}{n}[z^{n-1}]\frac{z^n}{S^n(z)} = \frac{1}{n}[z^{n-1}]\phi^n(z),$$

čo dokazuje rovnosť (4.2).

Pri dôkaze rovnosti (4.3) napokon môžeme postupovať podobne ako vyššie. Predpokladajme, že pre $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je

$$R^k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

pre nejakú postupnosť koeficientov $(c_n)_{n=1}^{\infty}$. Keďže $R(S(z)) = z$, musí byť $R^k(S(z)) = z^k$ – čiže

$$R^k(S(z)) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j S^j(z) = z^k.$$

Derivovaním tejto rovnosti dostávame

$$\sum_{j=1}^{\infty} jc_jS^{j-1}(z)S'(z) = kz^{k-1}.$$

Z toho

$$\frac{kz^{k-1}}{S^n(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} jc_jS^{j-n-1}(z)S'(z) = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{jc_j}{j-n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}S^{j-n}(z) + na_nS^{-1}(z)S'(z) + \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{jc_j}{j-n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}S^{j-n}(z)$$

a rovnakým spôsobom ako vyššie tak zisťujeme, že

$$[z^{-1}]\frac{kz^{k-1}}{S^n(z)} = [z^{-1}]nc_nS^{-1}(z)S'(z) = nc_n.$$

Skutočne teda

$$c_n = [z^n]R^k(z) = \frac{1}{n}[z^{-1}]\frac{kz^{k-1}}{S^n(z)} = \frac{k}{n}[z^n]\frac{z^{k+n}}{S^n(z)} = \frac{k}{n}[z^n]z^k\phi^n(z) = \frac{k}{n}[z^{n-k}]\phi^n(z).$$

Pre $k = 0$ je rovnosť (4.3) triviálna – veta je teda dokázaná. □

Ukážme si teraz príklad kombinatorickej aplikácie Lagrangeovej vety o inverzii – pôjde o zovšeobecnenie úlohy o počte plných binárnych stromov z príkladov 1.3.1 a 3.5.3.

Príklad 4.2.4. Uvažujme kombinatorickú triedu $\mathcal{T}^{(t)}$ neoznačených objektov pozostávajúcu zo všetkých *plných t-árnych stromov* pre nejaké $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ – čiže zo všetkých usporiadaných zakorenených stromov, ktorých vnútorné vrcholy majú vždy presne t synov. Veľkosť stromu je daná počtom vrcholov.

Triedu $\mathcal{T}^{(t)}$ môžeme opísať pomocou rekurzívnej špecifikácie

$$\mathcal{T}^{(t)} = \mathcal{Z}_\bullet + \mathcal{Z}_\bullet \times \left(\mathcal{T}^{(t)}\right)^t,$$

kde $\mathcal{Z}_\bullet = \{\bullet\}$ je atomická trieda. Pre obyčajnú vytvárajúcu funkciu $T_t(z)$ triedy $\mathcal{T}^{(t)}$ tak dostávame vzťah

$$T_t(z) = z(1 + T_t^t(z)).$$

Pre rad $\phi_t(z) = 1 + z^t$ je teda $T_t(z) = z\phi_t(T_t(z))$ a z Lagrangeovej vety o inverzii preto vyplýva, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je

$$\left|\mathcal{T}_n^{(t)}\right| = [z^n]T_t(z) = \frac{1}{n}[z^{n-1}]\phi_t^n(z) = \frac{1}{n}[z^{n-1}](1+z^t)^n = \begin{cases} \frac{1}{n}\binom{n}{(n-1)/t} & \text{ak } n \equiv 1 \pmod t, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$

kde v rámci posledného kroku sme použili binomickú vetu. Všimnime si, že v súlade s príkladom 1.3.1 a príkladom 3.5.3 pre $t = 2$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ dostávame

$$\left|\mathcal{T}_{2n+1}^{(2)}\right| = [z^{2n+1}]T_2(z) = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1)(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.$$

4.3 Enumerácia označených stromov: Cayleyho vzorec

Odvodíme teraz známy *Cayleyho vzorec*, podľa ktorého existuje presne n^{n-2} stromov o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ označených vrcholoch; alternatívne ho možno formulovať ako tvrdenie hovoriace, že existuje presne n^{n-1} zakorenených stromov o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ označených vrcholoch. Práve túto druhú verziu tvrdenia teraz dokážeme s použitím symbolickej metódy a Lagrangeovej vety o inverzii.

Veta 4.3.1. *Pre všetky $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ existuje presne n^{n-1} zakorenených stromov o n vrcholoch označených prvkami množiny $[n]$.*

Dôkaz. Kombinatorickú triedu označených objektov $\mathcal{T}$, pozostávajúcu zo všetkých zakorenených stromov s veľkosťou danou počtom vrcholov, možno vyjadriť pomocou rekurzívnej špecifikácie

$$\mathcal{T} = \mathcal{Z} \star \textsc{Set}(\mathcal{T});$$

každý zakorenený strom totiž pozostáva z koreňa a niekoľkých podstromov, ktoré možno považovať za zakorenené vo vrcholoch spojených hranou s koreňom pôvodného stromu. Pre exponenciálnu vytvárajúcu funkciu $T(z)$ triedy $\mathcal{T}$ tak dostávame vzťah

$$T(z) = ze^{T(z)}.$$

Z Lagrangeovej vety o inverzii preto vyplýva, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je

$$|\mathcal{T}_n| = n![z^n]T(z) = n! \cdot \frac{1}{n}[z^{n-1}]e^{nz} = n! \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n^{n-1}.$$

□

Dôsledok 4.3.2 (Cayleyho vzorec)**.** *Pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existuje presne n^{n-2} stromov o n vrcholoch označených prvkami množiny $[n]$.*

Dôkaz. Nech $\mathcal{U}$ je kombinatorická trieda všetkých takýchto označených stromov s veľkosťou danou počtom vrcholov. Kombinatorická trieda $\mathcal{T}$ z dôkazu predchádzajúcej vety je k nej potom vo vzťahu

$$\Theta\mathcal{U} = \mathcal{T}.$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $|\mathcal{T}_n| = |(\Theta\mathcal{U})_n| = n|\mathcal{U}_n|$. Keďže teda z vety 4.3.1 máme $|\mathcal{T}_n| = n^{n-1}$, prichádzame k výsledku $|\mathcal{U}_n| = n^{n-2}$. □

Existuje aj viacero iných dôkazov Cayleyho vzorca, z ktorých mnohé využívajú omnoho elementárnejšie nástroje, než sú vytvárajúce funkcie, symbolická metóda a Lagrangeova veta o inverzii. Na ukážku teraz uveďme bijektívny dôkaz založený na tzv. *Prüferových kódoch.*

Bijektívny dôkaz Cayleyho vzorca. Pre $n = 1$ existuje práve jeden strom o n označených vrcholoch, pričom $n^{n-2} = 1$. Predpokladajme teda, že $n \geq 2$. Ku každému stromu T o n vrcholoch označených prvkami množiny $[n]$ potom možno priradiť postupnosť prvkov tejto množiny $[n]$ dĺžky $(n-2)$ – tzv. *Prüferov kód* stromu T – definovanú nasledujúcim spôsobom: nech $T_1, \ldots, T_{n-1}$ sú stromy také, že $T_1 = T$ a strom T_{k+1} vznikne pre $k = 1, \ldots, n-2$ zo stromu T_k odstránením listu s najmenšou značkou; nech $v_k \in [n]$ je značka vrcholu, s ktorým list odstránený v k-tom kroku susedí. *Prüferovým kódom* stromu T potom nazveme postupnosť $(v_1, \ldots, v_{n-2})$.

Dokážeme, že *každá* postupnosť prvkov $[n]$ dĺžky $n-2$ je Prüferovým kódom nejakého stromu. Nech $(v_1, \ldots, v_{n-2}) \in [n]^{n-2}$. Ak je táto postupnosť Prüferovým kódom nejakého stromu T, musí byť pre $k = 1, \ldots, n-2$ jeho k-tym odstráneným listom vrchol so značkou

$$\ell_k = \min\left([n] \setminus (\{\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}\} \cup \{v_k, \ldots, v_{n-2}\})\right); \tag{4.5}$$

čísla $\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}$ sú totiž práve všetky značky vrcholov odstránených v predchádzajúcich krokoch a spomedzi zvyšných vrcholov so značkami z $[n] \setminus \{\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}\}$ sú listmi stromu T_k práve tie z týchto vrcholov, ktoré sa nevyskytujú medzi vrcholmi so značkami $v_k, \ldots, v_{n-2}$. Keby bol totiž listom stromu T_k vrchol s niektorou zo značiek $v_k, \ldots, v_{n-2}$ – napríklad v_j pre $j \in \{k, \ldots, n-2\}$ – v j-tom kroku by sme odstránili s ním susedný list a strom T_{j+1} by pozostával z práve jedného vrcholu; to je spor, pretože každý zo stromov $T_1, \ldots, T_{n-1}$ obsahuje aspoň dva vrcholy. Keby bol naopak niektorý vrchol so značkou z $[n] \setminus (\{\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}\} \cup \{v_k, \ldots, v_{n-2}\})$ vnútorným vrcholom stromu T_k, museli by sme pre nejaké $j \in \{k, \ldots, n-2\}$ odstrániť v j-tom kroku celého procesu jeho suseda, pretože vo výsledku musíme získať strom T_{n-1} bez vnútorných vrcholov; to ale znamená, že ide o vrchol so značkou $v_j \notin [n] \setminus (\{\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}\} \cup \{v_k, \ldots, v_{n-2}\})$, čo je opäť spor. V rámci (4.5) teda naozaj vyberáme najmenšiu značku listu v strome T_k.

Týchto $n-2$ postupne odstránených listov jednoznačne určuje $n-2$ hrán stromu T, ktoré musia pre $k = 1, \ldots, n-2$ spájať vrcholy so značkami ℓ_k a v_k. Zvyšná hrana stromu T spája jediné dva vrcholy so značkami z $[n] \setminus \{\ell_1, \ldots, \ell_{n-2}\}$.

K ľubovoľnej postupnosti $(v_1, \ldots, v_{n-2}) \in [n]^{n-2}$ teraz môžeme skonštruovať graf tak, že začneme s grafom G_1 o n vrcholoch so značkami $1, \ldots, n$ a s jedinou hranou spájajúcou dvojicu rôznych vrcholov so značkami z $[n] \setminus \{\ell_1, \ldots, \ell_{n-2}\}$ – keďže $\ell_1, \ldots, \ell_{n-2}$ sú evidentne po dvoch rôzne, je táto dvojica vrcholov daná jednoznačne. Pre $k = 2, \ldots, n-1$ teraz graf G_k vznikne z grafu G_{k-1} pridaním hrany spájajúcej vrcholy so značkami ℓ_{n-k} a v_{n-k}. Musíme dokázať, že graf G_{n-1}, ktorý týmto postupom nakoniec dostaneme, bude stromom.

Keďže má G_{n-1} presne $n-1$ hrán, stačí dokázať acyklickosť grafov $G_1, \ldots, G_{n-1}$. Dokážeme o niečo silnejšie tvrdenie: pre $k = 1, \ldots, n-1$ je graf acyklický a neobsahuje žiadnu hranu incidentnú s vrcholom s niektorou zo značiek $\{\ell_1, \ldots, \ell_{n-k-1}\}$. Graf G_1 obsahuje jedinú hranu, takže určite acyklický je; priamo z jeho definície navyše vyplýva, že jeho jediná hrana nie je incidentná so žiadnym vrcholom s niektorou zo značiek $\{\ell_1, \ldots, \ell_{n-2}\}$. Nech je ďalej graf G_k pre $k \in [n-2]$ acyklický a nech neobsahuje žiadnu hranu incidentnú s vrcholom s niektorou zo značiek $\{\ell_1, \ldots, \ell_{n-k-1}\}$. Graf G_{k+1} vznikne z grafu G_k pridaním hrany incidentnej s vrcholom so značkou ℓ_{n-k-1}, pričom s týmto vrcholom nie je incidentná žiadna hrana grafu G_k – acyklický teda musí byť aj graf G_{k+1}. Novopridaná hrana navyše spája vrchol so značkou ℓ_{n-k-1} s vrcholom so značkou v_{n-k-1} a zo (4.5) vyplýva, že $v_{n-k-1} \notin \{\ell_1, \ldots, \ell_{n-k-2}\}$. Graf G_{k+1} teda neobsahuje žiadnu hranu incidentnú s vrcholom s niektorou zo značiek $\{\ell_1, \ldots, \ell_{n-k-2}\}$.

Zostáva dokázať, že zobrazenie priraďujúce stromu jeho Prüferov kód a zobrazenie priraďujúce postupnostiam z $[n]^{n-2}$ pre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ príslušný strom G_{n-1} sú vzájomné inverzné bijekcie. Z našej argumentácie v súvislosti s definíciou stromu G_{n-1} vyplýva, že ak k Prüferovmu kódu ľubovoľného stromu T opísaným spôsobom zostrojíme strom G_{n-1}, bude $G_{n-1} = T$. Potrebujeme ešte dokázať, že Prüferovým kódom stromu G_{n-1} zostrojeného vyššie opísaným spôsobom k postupnosti $(v_1, \ldots, v_{n-2}) \in [n]^{n-2}$ je opäť postupnosť $(v_1, \ldots, v_{n-2})$.

Nech teda $T = G_{n-1}$ opísaným spôsobom prislúcha k nejakej postupnosti $(v_1, \ldots, v_{n-2}) \in [n]^{n-2}$ a nech $T_1, \ldots, T_{n-1}$ sú stromy získané zo stromu T ako v definícii Prüferovho kódu. Potrebujeme dokázať, že pre $k = 1, \ldots, n-2$ je list s najmenšou značkou v strome T_k susedný vrcholu v_k. Vyššie sme ale už videli, že najmenšia značka ℓ_k listu v strome T_k je daná ako

$$\ell_k = \min\left([n] \setminus (\{\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}\} \cup \{v_k, \ldots, v_{n-2}\})\right).$$

Strom T_k pritom pozostáva z vrcholov so značkami $[n] \setminus \{\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}\}$ a obsahuje všetky hrany stromu $T = G_{n-1}$ spájajúce dvojice takýchto vrcholov. Keďže navyše pre $j = 1, \ldots, k-1$ je

$$\ell_j = \min\left([n] \setminus (\{\ell_1, \ldots, \ell_{j-1}\} \cup \{v_j, \ldots, v_{n-2}\})\right),$$

nutne $v_k \notin \{\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}\}$. Strom T_k teda obsahuje vrcholy so značkami ℓ_k aj v_k, a teda musí obsahovať aj hranu medzi týmito dvoma vrcholmi, ktorá je súčasťou stromu $T = G_{n-1}$ – vrchol s minimálnou značkou v strome T_k teda naozaj musí susediť s vrcholom so značkou v_k. $\square$

Veľké množstvo ďalších rôznorodých dôkazov Cayleyho vzorca je zozbieraných v knihe Matouška a Nešetřila [8].

Kapitola 5

Základy analytickej kombinatoriky

Vytvárajúce funkcie kombinatorických tried sme doposiaľ chápali výhradne ako *formálne* mocninové rady – nešlo teda o funkcie v pravom slova zmysle, nedávalo zmysel hovoriť o dosadzovaní hodnôt za premennú z a otázky konvergencie radov pri takomto pohľade nehrali žiadnu rolu. V našom ponímaní sú napríklad dobre definovanými aj obyčajné vytvárajúce funkcie ako napríklad

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} z^n$$

alebo

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$$

– hoci ide o mocninové rady s nulovým polomerom konvergencie, ktoré tak nie sú reprezentáciami žiadnej funkcie analytickej v bode 0.

V nasledujúcich partiách tohto textu sa budeme zaoberať predovšetkým analýzou asymptotických vlastností koeficientov vytvárajúcich funkcií – jedným z najdôležitejších problémov enumeratívnej kombinatoriky. Tu sa naopak analytický pohľad na vytvárajúce funkcie ukazuje ako rozhodujúci. Uvidíme, že pokiaľ je vytvárajúca funkcia daná mocninovým radom s nenulovým polomerom konvergencie – a teda reprezentuje funkciu analytickú v bode 0 – možno na analýzu asymptotických vlastností jej koeficientov aplikovať nástroje komplexnej analýzy, ako napríklad Cauchyho integrálny vzorec; kľúčovú úlohu pritom budú zohrávať singularity takto analyticky chápaných vytvárajúcich funkcií. Vstúpime tak na pôdu *analytickej kombinatoriky*.

Namiesto oboru integrity formálnych mocninových radov sa teda poväčšine budeme pohybovať v jeho podokruhu tvorenom komplexnými funkciami analytickými v bode 0. Symbolická metóda – ako aj všetky ďalšie techniky vybudované na čisto formálnej úrovni – však vďaka pozorovaniam učineným v druhej a tretej kapitole zostanú použiteľné aj naďalej. Ak sa napríklad vytvárajúca funkcia nejakej kombinatorickej triedy, vyjadrená pomocou elementárnych radov $a \in \mathbb{C}$ a z a štandardných operácií na formálnych mocninových radoch ukáže byť konvergentnou na okolí bodu 0, môžeme ihneď prejsť do komplexnej analýzy a tento nový pohľad na vytvárajúcu funkciu využiť na analýzu jej koeficientov.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať najzákladnejšími analytickými vlastnosťami – obyčajných aj exponenciálnych – vytvárajúcich funkcií. Budeme teda skúmať vlastnosti holomorfných funkcií, ktorých Maclaurinov rad má nezáporné reálne koeficienty (čo je prípad všetkých vytvárajúcich funkcií) a špeciálne prirodzené koeficienty (ktorými sa vyznačujú *obyčajné* vytvárajúce funkcie). Pôjde pritom o matematický základ potrebný na skúmanie asymptotických vlastností koeficientov vytvárajúcich funkcií *metódou analýzy singularít*, ktorou sa budeme zaoberať v nasledujúcej kapitole.

5.1 Polomer konvergencie radu a asymptotické vlastnosti koeficientov

Na úvod nášho skúmania radov z podokruhu $\mathbf{H}_0$ oboru integrity $\mathbb{C}[\![z]\!]$ dokážme jednoduché tvrdenie dávajúce do súvisu polomer konvergencie Maclaurinovho radu analytickej funkcie s asymptotickým správaním jej koeficientov, ktoré okrem iného poskytuje aj veľmi jednoduchú charakterizáciu podokruhu $\mathbf{H}_0$ okruhu $\mathbb{C}[\![z]\!]$. Pôjde pritom o variant vety o polomere konvergencie mocninového radu známej z komplexnej analýzy.

Tvrdenie 5.1.1. *Nech $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad. Potom $R(z) \in \mathbf{H}_0$ práve vtedy, keď existuje reálne číslo $r \geq 0$ také, že pre $n \to \infty$ je $|[z^n]R(z)| = O(r^n)$. Polomer konvergencie funkcie $R(z)$ v bode 0 je v takom prípade daný ako*

$$\varrho = \frac{1}{\inf \{ r \geq 0 \mid |[z^n]R(z)| = O(r^n) \}},$$

kde pre účely tohto tvrdenia je $1/0 = \infty$.

Dôkaz. Podľa vety o polomere konvergencie [5, veta 3.2.3] je polomer konvergencie ϱ mocninového radu s koeficientmi rovnakými ako v $R(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ daný vzťahom

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|}},$$

kde $1/0 = \infty$ a $1/\infty = 0$. Polomer konvergencie ϱ je teda nenulový práve vtedy, keď je horná limita

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|}$$

konečná. Za tohto predpokladu však zároveň platí rovnosť

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|} = \inf \{ r \geq 0 \mid |[z^n]R(z)| = O(r^n) \}, \tag{5.1}$$

o čom sa môžeme presvedčiť nasledovne:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|} &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \inf \left\{ r \geq 0 \;\middle|\; \sup_{n\geq m} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|} \leq r \right\} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \inf \left\{ r \geq 0 \;\middle|\; \forall n \geq m : \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|} \leq r \right\} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \inf \{ r \geq 0 \mid \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq r^n \} \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} \inf_{m\in\mathbb{N}} \inf \{ r \geq 0 \mid \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq r^n \} = \\
&= \inf \{ r \geq 0 \mid \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq r^n \} \overset{(**)}{=} \\
&\overset{(**)}{=} \inf \{ r \geq 0 \mid \exists C > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq Cr^n \} = \\
&= \inf \{ r \geq 0 \mid |[z^n]R(z)| = O(r^n) \}.
\end{aligned}$$

Rovnosť s označením $(*)$ tu vyplýva z toho, že ide o limitu postupnosti infím rastúceho reťazca množín, ktorá je nutne nerastúca. Predposlednú rovnosť $(**)$ možno dokázať nasledovne: keďže je množina na pravej strane rovnosti nadmnožinou množiny na ľavej strane, nutne

$$\begin{aligned}
&\inf \{ r \geq 0 \mid \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq r^n \} \geq \\
&\qquad \geq \inf \{ r \geq 0 \mid \exists C > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq Cr^n \}.
\end{aligned}$$

Za účelom sporu predpokladajme, že je táto nerovnosť ostrá a označme

$$r_0 = \inf \{ r \geq 0 \mid \exists C > 0 \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \geq m : |[z^n]R(z)| \leq Cr^n \} .$$

Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ potom existuje $r \in [r_0, r_0 + \varepsilon]$ také, že pre nejaké $C > 0$, nejaké $m \in \mathbb{N}$ a všetky $n \geq m$ je $|[z^n]R(z)| \leq Cr^n$; súčasne však musí existovať $\delta > 0$ také, že pre žiadne $s \in [r_0, r_0 + \delta]$ neexistuje $m' \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq m'$ je $|[z^n]R(z)| \leq s^n$. To však nie je možné – ak napríklad vezmeme $\varepsilon = \delta/2$ a k nemu prislúchajúce $r \in [r_0, r_0 + \varepsilon]$ a $C > 0$, môžeme uvažovať

$$s = r + \delta/2 \in [r_0, r_0 + \delta].$$

Pre dostatočne veľké n potom musí byť $s^n \geq Cr^n$ – existuje teda aj $m' \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq m'$ je $|[z^n]R(z)| \leq s^n$: spor. To dokazuje rovnosť $(**)$ a tým pádom aj rovnosť (5.1).

Pre rady s nenulovým polomerom konvergencie ϱ teda existuje $r \geq 0$ také, že pre $n \to \infty$ je $|[z^n]R(z)| = O(r^n)$ a samotný polomer konvergencie ϱ je daný ako v znení tvrdenia. Zostáva dokázať, že existencia reálneho čísla $r \geq 0$ spĺňajúceho $|[z^n]R(z)| = O(r^n)$ pre $n \to \infty$ implikuje nenulovosť polomeru konvergencie uvažovaného radu. V takom prípade ale existujú $C > 0$ a $m \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq m$ je $|[z^n]R(z)| \leq Cr^n$, v dôsledku čoho pre polomer konvergencie ϱ dostávame

$$\varrho^{-1} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|[z^n]R(z)|} \leq \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|Cr^n|} = r < \infty,$$

takže skutočne $\varrho > 0$. □

Dôsledok 5.1.2. *Nech $R(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$ je formálny mocninový rad. Potom $R(z) \in \mathbf{H}_0$ práve vtedy, keď existuje reálne číslo $r \geq 0$ také, že pre $n \to \infty$ je $[z^n]R(z) = O(r^n)$. Polomer konvergencie funkcie $R(z)$ v bode 0 je v takom prípade daný ako*

$$\varrho = \frac{1}{\inf \{ r \geq 0 \mid [z^n]R(z) = O(r^n) \}},$$

kde pre účely tohto tvrdenia je $1/0 = \infty$.

Polomer konvergencie funkcie analytickej v bode 0 teda úzko súvisí s asymptotickými vlastnosťami koeficientov jej Maclaurinovho radu. Pozorovania učinené v rámci tohto oddielu už onedlho preformulujeme do podoby *prvého princípu asymptotiky koeficientov* – získame tak nástroj na „hrubozrnnú“ analýzu koeficientov vytvárajúcich funkcií a súčasne aj náš prvý jednoduchý výsledok z oblasti analytickej kombinatoriky.

5.2 Pringsheimova veta

Dokážeme teraz ďalšie dôležité tvrdenie o funkciách, ktorých Maclaurinov rad má nezáporné reálne koeficienty. Vieme, že každá funkcia, ktorej Maclaurinov rad má polomer konvergencie ϱ spĺňajúci $0 < \varrho < \infty$, musí mať aspoň jednu singularitu s absolútnou hodnotou ϱ [5, veta 13.2.1] – každú takúto singularitu budeme nazývať *dominantnou.* Takzvaná *Pringsheimova veta* je spresnením tohto tvrdenia pre funkcie z $\mathbf{H}_0 \cap \mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$ s nenulovým konečným polomerom konvergencie ϱ: hovorí, že singularitou každej takejto funkcie musí byť aj *samotný polomer konvergencie* ϱ. Ak má teda funkcia z $\mathbf{H}_0 \cap \mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$ singularitu, je medzi jej dominantnými singularitami vždy aj nejaké kladné reálne číslo. Dôkaz Pringsheimovej vety možno nájsť napríklad aj v [12].

Veta 5.2.1 (Pringsheimova veta). *Nech $R(z) \in \mathbf{H}_0 \cap \mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$ je funkcia s polomerom konvergencie ϱ Maclaurinovho radu spĺňajúcim $0 < \varrho < \infty$. Potom je bod ϱ singularitou funkcie $R(z)$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že pre $z \in D(0,\varrho)$ je

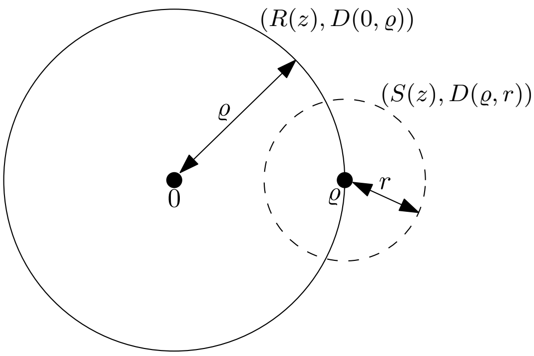
$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

kde pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je a_n nezáporné reálne číslo. Na $D(0,\varrho)$ sú potom holomorfné aj všetky derivácie $R^{(m)}(z)$ funkcie R pre $m \in \mathbb{N}$ [5, dôsledok 6.3.4], pričom pre všetky $z \in D(0,\varrho)$ je

$$R^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n^{\underline{m}} a_n z^{n-m}; \tag{5.2}$$

ide tu o dôsledok tvrdenia 2.4.2 a skutočnosti, že formálna derivácia sa pre rady z $\mathbf{H}_0$ správa rovnako ako bežná analytická derivácia.

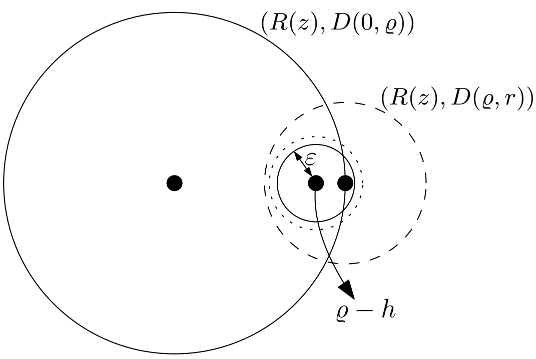
Za účelom sporu teraz predpokladajme, že bod ϱ nie je singularitou funkcie $R(z)$. To znamená, že existuje priame analytické predĺženie $(S(z), D(\varrho, r))$ analytického prvku $(R(z), D(0,\varrho))$ v bode ϱ, kde $r > 0$ je reálne číslo. Táto situácia je znázornená na obrázku 5.1.



Obr. 5.1: Analytické predĺženie funkcie $R(z)$ v bode ϱ.

Z definície priameho analytického predĺženia vyplýva $R(z) = S(z)$ pre všetky $z \in D(0,\varrho) \cap D(\varrho, r)$. Môžeme teda obor definície funkcie $R(z)$ rozšíriť na $D(0,\varrho) \cup D(\varrho, r)$ a namiesto $S(z)$ pre $z \in D(\varrho, r)$ písať opäť len $R(z)$.

Zvoľme teraz reálne h spĺňajúce $0 < h < \varrho$ a reálne $\varepsilon > h$ tak, aby pre nejaké $\delta > 0$ platilo $D(\varrho - h, \varepsilon + \delta) \subseteq D(\varrho, r)$.[1] Táto situácia je znázornená na obrázku 5.2.



Obr. 5.2: Voľba hodnôt h a ε.

[1] Za predpokladu $r \leq \varrho$, nespôsobujúceho ujmu na všeobecnosti, možno vziať napríklad $h < r/3$ a $\varepsilon = 2h$.

Funkcia $R(z)$ je v (nezápornom reálnom) bode $\varrho - h$ analytická – možno ju tam teda rozvinúť do Taylorovho radu

$$R(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - \varrho + h)^m. \tag{5.3}$$

Keďže je $R(z)$ analytická na $D(\varrho - h, \varepsilon + \delta) \subseteq D(\varrho, r)$, z vety o Taylorových radoch [5, veta 7.2.1] vyplýva konvergencia tohto radu pre všetky $z \in \overline{D}(\varrho - h, \varepsilon)$. Podľa tej istej vety a podľa (5.2) navyše pre koeficienty b_m pre všetky $m \in \mathbb{N}$ dostávame vzťah

$$b_m = \frac{R^{(m)}(\varrho - h)}{m!} = \frac{1}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} n^{\underline{m}} a_n (\varrho - h)^{n-m} = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (\varrho - h)^{n-m}.$$

Keďže sú všetky koeficienty a_n nezáporné reálne a keďže $\varrho - h > 0$, sú všetky koeficienty b_m takisto nezáporné reálne.

Vyhodnoťme teraz rad (5.3) v bode $z = \varrho - h + \varepsilon$. Zisťujeme, že

$$\begin{aligned}
R(\varrho - h + \varepsilon) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m \varepsilon^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (\varrho - h)^{n-m} \right) \varepsilon^m = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a_n (\varrho - h)^{n-m} \varepsilon^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (\varrho - h)^{n-m} \varepsilon^m \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\varrho - h + \varepsilon\right)^n,
\end{aligned}$$

kde všetky rady konvergujú a zámena nekonečných súčtov je odôvodnená nezápornosťou všetkých členov. Maclaurinov rad pre $R(z)$ teda konverguje v bode $\varrho - h + \varepsilon > \varrho$, pričom podľa vety o polomere konvergencie musí v tomto bode divergovať: spor. $\square$

5.3 Prvý princíp asymptotiky koeficientov

Tvrdenie 5.1.1 vyjadruje polomer konvergencie analytickej funkcie pomocou asymptotických vlastností koeficientov jej Maclaurinovho radu. Možno ho však chápať aj „naopak“ – ako tvrdenie opisujúce asymptotické správanie koeficientov pomocou polomeru konvergencie.

V špeciálnom prípade vytvárajúcich funkcií teda ide o jednoduchý nástroj na „hrubozrnnú“ analýzu ich koeficientov na základe polomeru konvergencie, alebo ekvivalentne – podľa Pringsheimovej vety – na základe kladnej dominantnej singularity. Tento ekvivalentný pohľad na tvrdenie 5.1.1 explicitne sformulujeme vo vete 5.3.5, ktorá sa tak stane naším prvým jednoduchým výsledkom z oblasti analytickej kombinatoriky, umožňujúcim skúmať „exponenciálny rast“ hornej hranice koeficientov vytvárajúcich funkcií, pričom akákoľvek „subexponenciálna zložka“ bude takouto analýzou zanedbaná. Táto idea je sformalizovaná v nasledujúcej definícii.

Definícia 5.3.1. Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel. Hovoríme, že $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je *exponenciálneho rádu* $q > 0$ – a píšeme $a_n \bowtie q^n$ – ak

$$q = \inf \{ r > 0 \mid |a_n| = O(r^n) \text{ pre } n \to \infty \}.$$

Namiesto $a_n \bowtie 1^n$ budeme písať $a_n \bowtie 1$ a namiesto $a_n \bowtie \left(q^{-1}\right)^n$ budeme písať $a_n \bowtie q^{-n}$.

Takto definovaný pojem exponenciálneho rádu možno zachytiť rôznymi ekvivalentnými spôsobmi, ako ukazujú napríklad nasledujúce tri tvrdenia.

Tvrdenie 5.3.2. *Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel a $q > 0$. Potom $a_n \bowtie q^n$ práve vtedy, keď*
$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dôkaz. Z tvrdenia 5.1.1 vyplýva, že za uvedených predpokladov je $q = \varrho^{-1}$, kde ϱ je polomer konvergencie mocninového radu
$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$
Vďaka vete o polomere konvergencie ale súčasne aj
$$\varrho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$
a tvrdenie je dokázané. □

Tvrdenie 5.3.3. *Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel a $q > 0$. Potom $a_n \bowtie q^n$ práve vtedy, keď sú pre všetky $\varepsilon > 0$ splnené nasledujúce podmienky:*

(*i*) *Pre nekonečne veľa rôznych $n \in \mathbb{N}$ je $|a_n| > (q - \varepsilon)^n$.*

(*ii*) *Pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ je $|a_n| < (q + \varepsilon)^n$.*

Dôkaz. Platnosť podmienky (*i*) pre všetky $\varepsilon > 0$ je očividne ekvivalentná s výrokom „pre žiadne $p < q$ nie je $|a_n| = O(p^n)$“. Podobne platnosť podmienky (*ii*) pre všetky $\varepsilon > 0$ je ekvivalentná s výrokom „pre všetky $p > q$ je $|a_n| = O(p^n)$“. Priamo z definície exponenciálneho rádu už potom vyplýva, že obidva tieto výroky sú pravdivé práve vtedy, keď $a_n \bowtie q^n$. □

Tvrdenie 5.3.4. *Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel a $q > 0$. Potom $a_n \bowtie q^n$ práve vtedy, keď pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je*
$$a_n = q^n \alpha(n),$$
kde $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ je funkcia spĺňajúca $\alpha(n) \bowtie 1$.[2]

Dôkaz. Položme $\alpha(n) := a_n/q^n$. Potom
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha(n)|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{q^n}} = \frac{1}{q} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$
Z tvrdenia 5.3.2 teda vyplýva, že $a_n \bowtie q^n$ práve vtedy, keď $\alpha(n) \bowtie 1$. □

Veta 5.3.5. *Nech $R(z) \in \mathbf{H}_0$ je analytická funkcia s polomerom konvergencie ϱ Maclaurinovho radu spĺňajúcim $0 < \varrho < \infty$. Potom*
$$[z^n]R(z) \bowtie \varrho^{-n}.$$

Dôkaz. Vyplýva bezprostredne z tvrdenia 5.1.1 a definície exponenciálneho rádu. □

Ak špeciálne $R(z) \in \mathbf{H}_0 \cap \mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$ – čo je prípad všetkých vytvárajúcich funkcií – je ϱ v predchádzajúcej vete rovné kladnej dominantnej singularite funkcie $R(z)$ a exponenciálny rád hovorí, namiesto o ich absolútnej hodnote, o samotných koeficientoch tejto vytvárajúcej funkcie. Vetu 5.3.5 vyslovenú v tomto kontexte Flajolet a Sedgewick [3] nazývajú *prvým princípom asymptotiky koeficientov*. Slovne možno tento princíp zhrnúť tak, že *absolútna hodnota* dominantných singularít vytvárajúcej funkcie udáva *exponenciálny rád* jej koeficientov.

[2] Funkcia $\alpha(n)$ sa v tomto kontexte nazýva aj *subexponenciálny faktor*. Ide o funkciu, ktorej horná hranica rastie pomalšie, než ľubovoľná rastúca exponenciálna funkcia (avšak pre nekonečne veľa n sa dá zdola ohraničiť ľubovoľnou klesajúcou exponenciálnou funkciou). Do tejto triedy patria napríklad všetky polynomické alebo logaritmické funkcie.

Omnoho hlbším tvrdením je *druhý princíp asymptotiky koeficientov*, podľa ktorého je subexponenciálny faktor vytvárajúcich funkcií v určitých (často nastávajúcich) prípadoch daný *charakterom* týchto singularít – napríklad funkcie, ktorých jediná dominantná singularita je pólom, všetky vykazujú veľmi podobné asymptotické vlastnosti koeficientov; podobne aj všetky funkcie, ktorých jediná dominantná singularita je algebraickým bodom vetvenia a podobne. Tento druhý princíp asymptotiky koeficientov je úzko spätý s *metódou analýzy singularít*, ktorou sa budeme zaoberať v nasledujúcej kapitole.

5.4 Hankelova integrálna reprezentácia funkcie $1/\Gamma(z)$

Funkciu gama možno pre všetky $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $\operatorname{Re} z > 0$ definovať prostredníctvom (vo všeobecnosti obojstranne) nevlastného *Eulerovho integrálu*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \,\mathrm{d}t,$$

ktorý konverguje pre všetky z s kladnou reálnou zložkou a reprezentuje tak funkciu, ktorá je na svojom definičnom obore holomorfná [5]. V rámci tohto oddielu dokážeme alternatívnu integrálnu reprezentáciu pre funkciu $1/\Gamma(z)$, pomocou ktorej možno túto funkciu vyjadriť *vo všetkých bodoch komplexnej roviny.* Táto tzv. *Hankelova integrálna reprezentácia* funkcie $1/\Gamma(z)$ už viac nebude nevlastným integrálom komplexnej funkcie reálnej premennej, ale pôjde o *nevlastný krivkový integrál* komplexnej funkcie komplexnej premennej – čo je typ integrálu, s ktorým sme sa doposiaľ nestretli. Tento výsledok neskôr využijeme pri dôkazoch tvrdení, na ktorých je založená *metóda analýzy singularít* – jeden zo stredobodov analytickej kombinatoriky. Čitateľa odkazujeme aj na [3, 4].

Funkcia gama: opakovanie. Na úvod si pripomeňme niekoľko základných poznatkov o funkcii gama [5]. Vieme, že pre všetky $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z > 0$ funkcia $\Gamma(z)$ spĺňa rekurentný vzťah $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; dôležitými hodnotami funkcie gama sú $\Gamma(1) = 1$ a $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. V dôsledku uvedeného rekurentného vzťahu a hodnoty funkcie gama v bode 1 zisťujeme, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(n+1) = n!$ – funkciu gama tak možno chápať ako spojité rozšírenie faktoriálu.

Pomocou rekurentného vzťahu

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)},$$

ktorý očividne platí pre všetky z z jej pôvodného definičného oboru $S = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, možno funkciu gama analyticky predĺžiť na definičný obor $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Body $0, -1, -2, \ldots$ sú potom jednoduchými pólmi funkcie gama.

Dôležitý je navyše súvis funkcie gama so sínusom: pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ je

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{5.4}$$

Napríklad odtiaľto možno vidieť, že funkcia $\Gamma(z)$ je na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ – a teda v dôsledku jej súvisu s faktoriálom aj na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ – nenulová. Funkcia $1/\Gamma(z)$ je teda po odstránení jej odstrániteľných singularít – čo je spôsob, akým budeme túto funkciu v nasledujúcom vždy chápať – *celá*, t. j. holomorfná na $\mathbb{C}$: vďaka nenulovosti funkcie gama je holomorfná na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, pričom jednoduché póly funkcie $\Gamma(z)$ v bodoch $0, -1, -2, \ldots$ sa premietnu do jednoduchých koreňov funkcie $1/\Gamma(z)$.

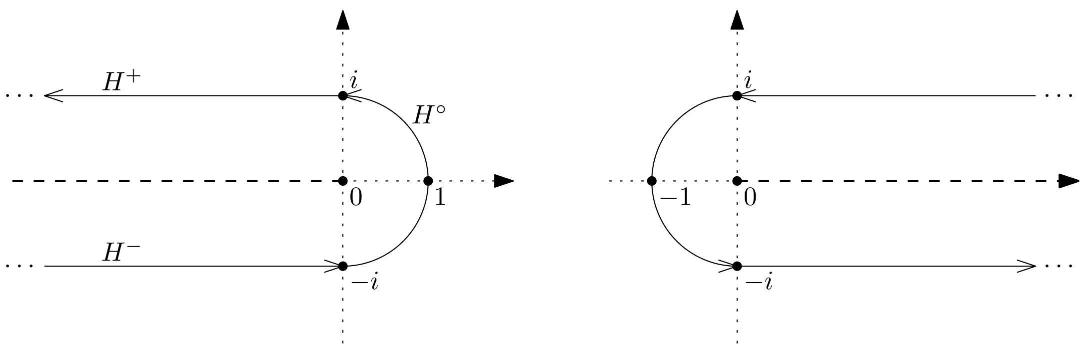
Integrály pozdĺž nevlastných kriviek. V komplexnej analýze obvykle uvažujeme konečné krivky, dané nejakým spojitým zobrazením $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, kde $\alpha \leq \beta$ sú reálne čísla. Dôležitými triedami takýchto kriviek sú *hladké* a *po častiach hladké* krivky [5].

Budeme teraz nútení uvažovať o niečo všeobecnejší pojem krivky, zahŕňajúci tzv. *nevlastné* – alebo „nekonečné“ – krivky. Pod (vlastnou alebo nevlastnou) krivkou budeme rozumieť ľubovoľné spojité zobrazenie $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$, kde I je neprázdny uzavretý interval reálnej osi. Interval I teda môže byť typu $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\infty)$, $(-\infty,\beta]$, alebo $(-\infty,\infty)$, kde $\alpha \le \beta$ sú reálne čísla; v prvom prípade hovoríme o vlastnej krivke a vo zvyšných prípadoch o (jednostranne resp. obojstranne) nevlastnej krivke.

Rovnako ako pre vlastné krivky možno pre nevlastné krivky definovať aj opačnú krivku a zúženie krivky na podinterval; ak sú navyše $\gamma_1\colon I \to \mathbb{C}$ a $\gamma_2\colon J \to \mathbb{C}$ vlastné alebo nevlastné krivky také, že intervaly I resp. J sú ohraničené sprava resp. zľava, možno podobne ako pre dvojice vlastných kriviek definovať aj spojenie $\gamma_1 + \gamma_2$. Pojmy hladkej a po častiach hladkej krivky možno na nevlastné krivky taktiež rozšíriť prirodzeným spôsobom. Integrály pozdĺž nevlastných po častiach hladkých kriviek definujeme rovnako ako v prípade konečných kriviek [5, definícia 4.3.1]; ide však v tomto prípade o nevlastné integrály. Tie nemusia vždy existovať – stačí si uvedomiť, že špeciálnym prípadom nevlastnej po častiach hladkej krivky je napríklad aj reálna os alebo polos, a teda každý nevlastný integrál funkcie reálnej premennej možno chápať aj ako integrál pozdĺž nevlastnej krivky.

Čitateľovi prenechávame dôkaz obdoby tvrdenia o reparametrizácii [5, tvrdenie 4.4.5] pre integrály pozdĺž nevlastných kriviek, vďaka ktorej nie je nutné nevlastné krivky vždy parametrizovať explicitne.

Hankelova integrálna reprezentácia. Pod *Hankelovou integrálnou reprezentáciou* funkcie $1/\Gamma(z)$ rozumieme jej vyjadrenie pre všetky $z \in \mathbb{C}$ pomocou integrálu pozdĺž nevlastnej krivky ako napríklad v nasledujúcich dvoch vetách, ktoré budeme po zvyšok tohto oddielu dokazovať.[3]



(a) Hankelova krivka H. **(b)** Hankelova krivka G.

Obr. 5.3: Hankelove krivky z viet 5.4.1 a 5.4.3. „Čiarkovane“ je znázornený uvažovaný rez komplexnej roviny.

Veta 5.4.1. *Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ je*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_H e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w,$$

kde H je krivka na obrázku 5.3a. *Pri funkcii w^{-z} pritom uvažujeme jej* hlavnú vetvu *na* $\mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$; *t. j. pre všetky $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$ je*

$$w^{-z} = e^{-z\,\mathrm{Ln}\,w} = e^{(\ln|w| + i\arg w)(-z)},$$

kde Ln *je hlavná vetva prirodzeného logaritmu,* ln *je reálny prirodzený logaritmus a argument vyberáme z intervalu* $(-\pi,\pi)$.[4]

[3] Skôr než o jedno konkrétne tvrdenie ide o skupinu podobných tvrdení, pričom nevlastné krivky v nich používané sú vždy – až na drobné detaily – veľmi podobné; takéto krivky sa niekedy zvyknú nazývať *Hankelovými krivkami* alebo *krivkami Hankelovho typu.*

[4] Možno tiež povedať, že ide o vetvu funkcie w^{-z} takú, že $1^{-z} = 1$.

Formálne môžeme krivku H definovať ako

$$H := H^- + H^\circ + H^+,$$

kde $H^-\colon (-\infty,0] \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $t \in (-\infty,0]$ predpisom $H^-(t) = t - i$, $H^\circ\colon [-\pi/2,\pi/2] \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $t \in [-\pi/2,\pi/2]$ predpisom $H^\circ(t) = e^{it}$ a $H^+\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $t \in [0,\infty)$ predpisom $H^+(t) = -t + i$.

Poznámka 5.4.2. Hlavnú vetvu funkcie w^{-z} uvažujeme v rozrezanej rovine $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. Vieme ale, že singularitou tejto funkcie môže byť iba bod $w = 0$; v bodoch $w \in (-\infty,0)$ naopak možno túto funkciu analyticky predĺžiť, pričom ale toto predĺženie môže byť rôzne v závislosti od toho, z ktorej strany polpriamky $(-\infty,0]$ sa k bodu w blížime. V nasledujúcom bude užitočné uvažovať hodnoty funkcie w^{-z} aj na reze $(-\infty,0)$, pričom budeme rozlišovať medzi hodnotami „na vrchnej a spodnej strane“ rezu – pre všetky $w \in (-\infty,0)$ *definujeme* $(w+0i)^{-z}$ ako hodnotu funkcie w^{-z} získanú jej priamym analytickým predĺžením v nejakom bode $w+\varepsilon i$ pre $\varepsilon > 0$; podobne pre všetky $w \in (-\infty,0)$ definujeme $(w-0i)^{-z}$ ako hodnotu w^{-z} získanú priamym analytickým predĺžením tejto funkcie v nejakom bode $w - \varepsilon i$ pre $\varepsilon > 0$. Pre všetky $w \in (-\infty,0)$ teda

$$(w-0i)^{-z} = |w|^{-z}e^{i\pi z},$$
$$(w+0i)^{-z} = |w|^{-z}e^{-i\pi z},$$

pričom hodnota $|w|^{-z}$ je daná hlavnou vetvou w^{-z}, t. j. $|w|^{-z} = e^{(\ln|w|)(-z)}$, kde logaritmus je reálny.

Nasledujúcu formuláciu Hankelovej integrálnej reprezentácie budeme používať pri dokazovaní tvrdení, na ktorých je založená metóda analýzy singularít. Ide o jednoduchý dôsledok vety 5.4.1.

Veta 5.4.3. *Pre všetky $z \in \mathbb{C}$ je*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_G e^{-u}(-u)^{-z}\,\mathrm{d}u,$$

kde G je krivka na obrázku 5.3b. *Pri funkcii $(-u)^{-z}$ pritom uvažujeme jej* hlavnú vetvu *na* $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$; *t. j. pre všetky $u \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ je*

$$(-u)^{-z} = e^{-z\,\mathrm{Ln}(-u)}e^{(\ln|u|+i\arg(-u))(-z)},$$

kde Ln *je hlavná vetva prirodzeného logaritmu,* ln *je reálny prirodzený logaritmus a argument vyberáme z intervalu $(-\pi,\pi)$.*

Dôkaz. Stačí na reprezentáciu z vety 5.4.1 použiť substitúciu $w = -u$. Z $\mathrm{d}u$ sa potom stane $-\mathrm{d}w$ a pre u opisujúce krivku G opíše w krivku H. □

Dôkaz Hankelovej integrálnej reprezentácie. Budeme teraz postupne dokazovať vetu 5.4.1 – a tým pádom aj vetu 5.4.3. Najprv ukážeme, že nevlastný integrál

$$\frac{1}{2\pi i}\int_H e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w \tag{5.5}$$

z vety 5.4.1 konverguje pre všetky $z \in \mathbb{C}$. To nám očividne zaručí nasledujúca lema.[5] Vo zvyšku tohto oddielu pre všetky $n \in \mathbb{N}$ kladieme $H_n^- := H^- \restriction [-n,0]$ a $H_n^+ := H^+ \restriction [0,n]$.

[5] Na dôkaz existencie integrálu (5.5) by nám v nasledujúcej leme stačilo ukázať bodovú konvergenciu – vlastnosť lokálne rovnomernej konvergencie ale využijeme neskôr.

Lema 5.4.4. *Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ položme*

$$I_n^-(z) := \int_{H_n^-} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w \qquad a \qquad I_n^+(z) := \int_{H_n^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w.$$

Potom sú postupnosti funkcií $(I_n^-(z))_{n=0}^{\infty}$ a $(I_n^+(z))_{n=0}^{\infty}$ premennej z na $\mathbb{C}$ lokálne rovnomerne konvergentné, a teda pre $n \to \infty$ je

$$\int_{H_n^-} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} \int_{H^-} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w,$$
$$\int_{H_n^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} \int_{H^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w,$$

kde nevlastné integrály na pravej strane konvergujú pre všetky $z \in \mathbb{C}$.

Dôkaz. Lemu dokážeme pre integrál pozdĺž H^+ – pre krivku H^- by sme mohli argumentovať analogicky. Z definície je

$$I_n^+(z) = \int_{H_n^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_0^n e^{-t+i}(-t+i)^{-z}(-1)\,\mathrm{d}t = -\int_0^n e^{-t+i}(-t+i)^{-z}\,\mathrm{d}t.$$

Potrebujeme ukázať, že postupnosť funkcií $(I_n^+(z))_{n=0}^{\infty}$ pre $n \to \infty$ na $\mathbb{C}$ lokálne rovnomerne konverguje. Zafixujme preto $a \in \mathbb{C}$ a ľubovoľnú *ohraničenú* oblasť S takú, že $a \in S$. Ukážeme, že postupnosť funkcií $(I_n^+(z))_{n=0}^{\infty}$ na S konverguje rovnomerne. Budeme pritom v skutočnosti dokazovať, že táto postupnosť funkcií je na S „rovnomerne cauchyovská“: pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq m \geq n_0$ a všetky $z \in S$ je

$$\left|I_n^+(z) - I_m^+(z)\right| < \varepsilon.$$

Počítajme teda:

$$\left|I_n^+(z) - I_m^+(z)\right| = \left|\int_m^n e^{-t+i}(-t+i)^{-z}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_m^n \left|e^{-t+i}(-t+i)^{-z}\right|\,\mathrm{d}t. \tag{5.6}$$

Pre ľubovoľné $t \in \mathbb{R}$ ale, pri výbere argumentov z intervalu $(-\pi, \pi)$,

$$\begin{aligned}
\left|e^{-t+i}(-t+i)^{-z}\right| &= \left|e^{-t+i}e^{(-z)(\ln|-t+i|+i\arg(-t+i))}\right| = \\
&= \left|e^{-t+i}e^{(-\operatorname{Re} z)(\ln|-t+i|+i\arg(-t+i))}e^{(-i\operatorname{Im} z)(\ln|-t+i|+i\arg(-t+i))}\right| = \\
&= \left|e^{-t}e^{i}e^{(-\operatorname{Re} z)\ln|-t+i|}e^{i(-\operatorname{Re} z)\arg(-t+i)}e^{-i(\operatorname{Im} z)\ln|-t+i|}e^{(\operatorname{Im} z)\arg(-t+i)}\right| = \\
&= e^{-t}\,|-t+i|^{-\operatorname{Re} z}\left|e^{\arg(-t+i)\operatorname{Im} z}\right| \leq e^{-t}\,|-t+i|^{-\operatorname{Re} z}\,e^{\pi|\operatorname{Im} z|}.
\end{aligned}$$

Z (5.6) preto

$$\left|I_n^+(z) - I_m^+(z)\right| \leq \int_m^n e^{-t}\,|-t+i|^{-\operatorname{Re} z}\,e^{\pi|\operatorname{Im} z|}\,\mathrm{d}t = e^{\pi|\operatorname{Im} z|}\int_m^n e^{-t}\,|-t+i|^{-\operatorname{Re} z}\,\mathrm{d}t. \tag{5.7}$$

Číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ teraz môžeme zvoliť tak, aby pre všetky $z \in S$ a všetky $t \geq n_0$ bolo

$$|-t+i|^{-\operatorname{Re} z} \leq e^{t/2};$$

špeciálne bude táto vlastnosť splnená aj pre všetky $t \in [m, n]$ a z nerovnosti (5.7) dostaneme

$$\begin{aligned}
\left|I_n^+(z) - I_m^+(z)\right| &\leq e^{\pi|\operatorname{Im} z|}\int_m^n e^{-t/2}\,\mathrm{d}t \leq e^{\pi|\operatorname{Im} z|}\int_m^{\infty} e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = \\
&= e^{\pi|\operatorname{Im} z|}\lim_{n\to\infty}\left[-2e^{-t/2}\right]_m^n = 2e^{\pi|\operatorname{Im} z|}e^{-m/2} \leq \\
&\leq 2e^{\pi|\operatorname{Im} z|}e^{-n_0/2},
\end{aligned}$$

pričom túto hodnotu možno vhodnou voľbou n_0 stlačiť pod ľubovoľné $\varepsilon > 0$.

Z dokázanej „rovnomernej cauchyovskosti“ postupnosti funkcií $(I_n^+(z))_{n=0}^{\infty}$ na S vyplýva aj jej rovnomerná konvergencia na S. Špeciálne je totiž pre každé $z \in S$ postupnosť čísel $(I_n^+(z))_{n=0}^{\infty}$ cauchyovská, a teda existuje funkcia $I^+(z)$, ku ktorej postupnosť $(I_n^+(z))_{n=0}^{\infty}$ na S konverguje bodovo. Pre dané $\varepsilon > 0$ teda existuje $n_0(z) \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0(z)$ je $|I_n^+(z) - I^+(z)| < \varepsilon/2$. Z dokázaného vyplýva, že súčasne existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq m \geq n_0$ a všetky $z \in S$ je $|I_n^+(z) - I_m^+(z)| < \varepsilon/2$. V dôsledku toho teda pre všetky $m \geq n_0$ a všetky $z \in S$ existuje $n \geq m$ také, že $|I_n^+(z) - I_m^+(z)| < \varepsilon/2$ a $|I_n^+(z) - I^+(z)| < \varepsilon/2$, z čoho $|I_m^+(z) - I^+(z)| < \varepsilon$. □

Z lemy 5.4.4 tak dostávame aj konvergenciu integrálu (5.5), keďže o konvergencii integrálu funkcie $e^w w^{-z}$ pozdĺž konečnej krivky H° nemôžu byť najmenšie pochybnosti.

Naším najbližším cieľom teraz bude dokázať, že funkcia premennej z daná integrálom (5.5) je celá. Popri leme 5.4.4 bude kľúčom k dôkazu tejto skutočnosti nasledujúca lema 5.4.5.

Lema 5.4.5. *Nech γ s $\gamma^* \subseteq \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ je po častiach hladká* vlastná *(t. j. konečná) krivka. Potom je funkcia*

$$F(z) := \int_\gamma e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w$$

celá (t. j. holomorfná na $\mathbb{C}$).

Dôkaz. Dokážeme najprv, že funkcia $F(z)$ je *spojitá* na $\mathbb{C}$. Zvoľme teda $a \in \mathbb{C}$ pevne; ukážeme spojitosť funkcie $F(z)$ v bode a. Položme $g(z, w) := e^w w^{-z}$. Takto definovaná funkcia je očividne spojitá na množine $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.[6] Keďže je množina γ^* kompaktná, existujú ohraničené oblasti $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{C}$ také, že:

(*i*) $a \in T_1$,

(*ii*) $\gamma^* \subseteq T_2$ a $\overline{T_2} \subseteq \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Funkcia $g(z, w)$ je teda spojitá na kompaktnej množine $\overline{T_1} \times \overline{T_2}$, a preto musí byť na tejto množine rovnomerne spojitá. To znamená, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $z_1, z_2 \in \overline{T_1}$ a všetky $w_1, w_2 \in \overline{T_2}$ platí

$$|z_1 - z_2| < \delta \;\wedge\; |w_1 - w_2| < \delta \Rightarrow |g(z_1, w_1) - g(z_2, w_2)| < \varepsilon. \tag{5.8}$$

Uvažujme teraz ľubovoľnú postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ prvkov množiny $\overline{T_1}$ takú, že $a_n \to a$ pre $n \to \infty$. Pre všetky $\delta > 0$ teda existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené $n \geq n_0$ je

$$|a_n - a| < \delta. \tag{5.9}$$

Z (5.8) a (5.9) dohromady vyplýva, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$ a všetky $w \in \overline{T_2}$ je

$$|g(a_n, w) - g(a, w)| < \varepsilon.$$

Postupnosť funkcií $g(a_n, w)$ premennej w teda na $\overline{T_2}$ pre $n \to \infty$ konverguje rovnomerne k funkcii $g(a, w)$. S použitím zámeny krivkového integrálu s rovnomernou limitou [5, veta 7.1.8] teda dostávame

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F(a_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_\gamma e^w w^{-a_n}\,\mathrm{d}w = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma g(a_n, w)\,\mathrm{d}w = \\ &= \int_\gamma \lim_{n\to\infty} g(a_n, w)\,\mathrm{d}w = \int_\gamma g(a, w)\,\mathrm{d}w = \int_\gamma e^w w^{-a}\,\mathrm{d}w = F(a).\end{aligned}$$

Keďže je $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ľubovoľnou postupnosťou prvkov $\overline{T_1}$ konvergujúcou k $a \in T_1$, z Heineho definície limity dostávame

$$\lim_{z\to a} F(z) = F(a)$$

a funkcia $F(z)$ je skutočne spojitá v bode a. Tým je dokázaná spojitosť funkcie $F(z)$ na $\mathbb{C}$.

[6] Spojitosť funkcie $g(z, w)$ bude jediným predpokladom na túto funkciu, ktorý potrebujeme na dôkaz spojitosti funkcie $F(z)$. Rovnako by sme teda vedeli dokázať aj spojitosť ďalších funkcií definovaných krivkovými integrálmi.

Zostáva dokázať *holomorfnosť* funkcie $F(z)$ na $\mathbb{C}$. Vieme už, že funkcia $F(z)$ je spojitá a že funkcia $g(z,w) = e^w w^{-z}$ je spojitá na $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$. Pre fixné $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ je navyše funkcia

$$e^w w^{-z} = e^w e^{-z \operatorname{Ln} w}$$

premennej z očividne holomorfná na $\mathbb{C}$. Z Cauchyho integrálnej vety pre trojuholník tak pre ľubovoľný trojuholník γ_Δ s $\gamma_\Delta^* \subseteq \mathbb{C}$ dostávame

$$\int_{\gamma_\Delta} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\Delta} \int_\gamma e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \int_{\gamma_\Delta} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w = \int_\gamma 0\,\mathrm{d}w = 0,$$

kde zámena integrálov je odôvodnená spojitosťou $e^w w^{-z}$ na $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ [5, tvrdenie 10.4.3]. Z Morerovej vety teda vyplýva, že funkcia $F(z)$ je holomorfná na $\mathbb{C}$, t. j. celá. □

Dôsledok 5.4.6. *Integrál* (5.5) *definuje celú funkciu*

$$I(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_H e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Podľa lemy 5.4.5 sú nasledujúce funkcie premennej z celé pre všetky $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{H_n^-} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w, \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{H^\circ} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w, \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{H_n^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w.$$

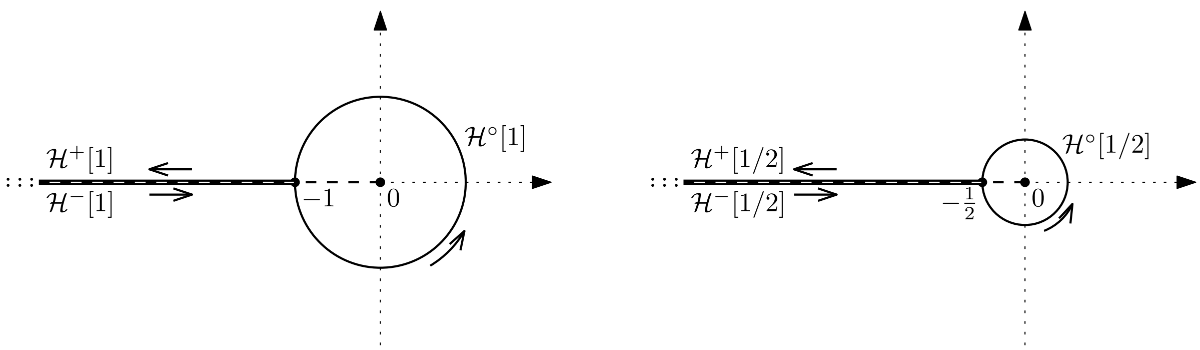
Keďže lokálne rovnomerná limita holomorfných funkcií je holomorfná [5, veta 7.1.9], musia byť vďaka leme 5.4.4 celé funkcie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{H^-} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{H^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w,$$

v dôsledku čoho je celá aj funkcia $I(z)$. □

Zostáva ukázať, že celá funkcia $I(z)$ z predchádzajúceho dôsledku je v skutočnosti rovná $1/\Gamma(z)$. Náš postup bude nasledovný: dokážeme túto rovnosť funkcií pre všetky reálne $z < -1$ rôzne od celého čísla a následne ju rozšírime na všetky $z \in \mathbb{C}$ pomocou vety o jednoznačnosti.

V nasledujúcom budeme uvažovať pre každé $\varepsilon > 0$ modifikáciu Hankelovej krivky H, ktorú označíme $\mathcal{H}[\varepsilon]$. Pôjde o krivku v komplexnej rovine rozrezanej pozdĺž $(-\infty, 0]$, ktorú však chápeme ako v poznámke 5.4.2 – budeme rozlišovať medzi vrchnou a spodnou stranou zápornej reálnej osi $(-\infty, 0)$, pričom pre každé reálne číslo $x < 0$ budeme jeho „vrchnú stranu“ označovať $x + 0i$ a jeho „spodnú stranu“ $x - 0i$. Samozrejme ide v oboch prípadoch o rovnaký bod komplexnej roviny; význam tejto



(a) Krivka $\mathcal{H}[1]$. **(b)** Krivka $\mathcal{H}[1/2]$.

Obr. 5.4: Krivky $\mathcal{H}[1]$ a $\mathcal{H}[1/2]$.

notácie spočíva v tom, že sa pri vyhodnocovaní integrálu podľa w obsahujúceho v integrande w^{-z} (prípadne inú funkciu premennej w, ktorú možno v tomto bode považovať za analytickú v zmysle poznámky 5.4.2), pozdĺž krivky prechádzajúcej cez bod $w = x + 0i$, použije hodnota $(x + 0i)^{-z}$. Podobne pre $w = x - 0i$ sa použije hodnota $(x - 0i)^{-z}$. Formálnu definíciu kriviek v takto „obohatenej" rozrezanej rovine prenechávame čitateľovi. Je však dôležité si uvedomiť, že celý tento koncept nie je ničím iným, než skratkou pre inak pomerne zložitú, avšak presnú, konštrukciu.

Krivku $\mathcal{H}[\varepsilon]$ v duchu práve zavedených konvencií definujeme pre každé $\varepsilon > 0$ takto:

$$\mathcal{H}[\varepsilon] := \mathcal{H}^-[\varepsilon] + \mathcal{H}^\circ[\varepsilon] + \mathcal{H}^+[\varepsilon],$$

kde krivka $\mathcal{H}^-[\varepsilon]\colon (-\infty, -\varepsilon] \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $t \in (-\infty, -\varepsilon]$ predpisom $\mathcal{H}^-[\varepsilon](t) = t - 0i$, krivka $\mathcal{H}^\circ[\varepsilon]\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $t \in [-\pi, \pi]$ predpisom[7] $\mathcal{H}^\circ[\varepsilon](t) = \varepsilon e^{it}$ a napokon krivka $\mathcal{H}^+[\varepsilon]\colon [\varepsilon, \infty) \to \mathbb{C}$ je daná pre všetky $t \in [\varepsilon, \infty)$ predpisom $\mathcal{H}^+[\varepsilon](t) = -t + 0i$. Krivky $\mathcal{H}[1]$ a $\mathcal{H}[1/2]$ sú znázornené na obrázku 5.4.

Pre všetky $\varepsilon > 0$ a $z \in \mathbb{C}$ také, že $\operatorname{Re} z < 0$, teraz dokážeme konvergenciu integrálu

$$\int_{\mathcal{H}[\varepsilon]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w.$$

Stačí pritom dokázať konvergenciu integrálov pozdĺž $\mathcal{H}^-[\varepsilon]$ a $\mathcal{H}^+[\varepsilon]$. Avšak

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}^-[\varepsilon]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{t-0i}(t-0i)^{-z}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}(-t-0i)^{-z}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{-z}e^{i\pi z}\,\mathrm{d}t = e^{i\pi z}\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{-z}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

pričom integrál

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{-z}\,\mathrm{d}t$$

konverguje vďaka elementárnej teórii okolo funkcie gama z minulého semestra. Od Eulerovho integrálu pre funkciu $\Gamma(1-z)$ – ktorý je dobre definovaný, keďže predpoklad $\operatorname{Re} z < 0$ implikuje $\operatorname{Re}(1-z) > 0$ – sa totiž tento integrál líši iba dolnou hranicou ε namiesto 0. Podobne dostávame

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}^+[\varepsilon]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w &= \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t+0i}(-t+0i)^{-z}(-1)\,\mathrm{d}t = -\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}(-t+0i)^{-z}\,\mathrm{d}t = \\ &= -\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{-z}e^{-i\pi z}\,\mathrm{d}t = -e^{-i\pi z}\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{-z}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

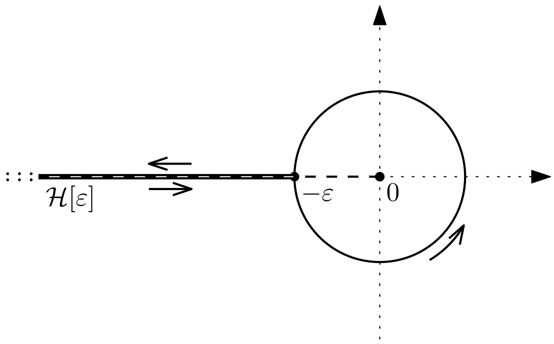
Aproximácie Eulerovho integrálu k funkcii gama konvergujú lokálne rovnomerne [5, lema 14.4.2] – zo vzťahov získaných vyššie teda pre $\varepsilon = 1/n$, $n \to \infty$ a $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z < 0$ dostávame

$$\int_{\mathcal{H}^-[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} e^{i\pi z}\,\Gamma(1-z), \tag{5.10}$$

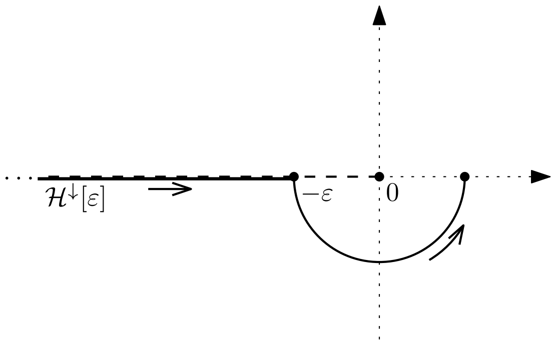
$$\int_{\mathcal{H}^+[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} -e^{-i\pi z}\,\Gamma(1-z). \tag{5.11}$$

(Bude nám ale stačiť aj bodová konvergencia.) Dokážeme teraz, že pre z ako vyššie sú hodnoty integrálov funkcie $e^w w^{-z}$ premennej w pozdĺž kriviek $\mathcal{H}[\varepsilon]$ pre rôzne $\varepsilon > 0$ vždy tie isté.

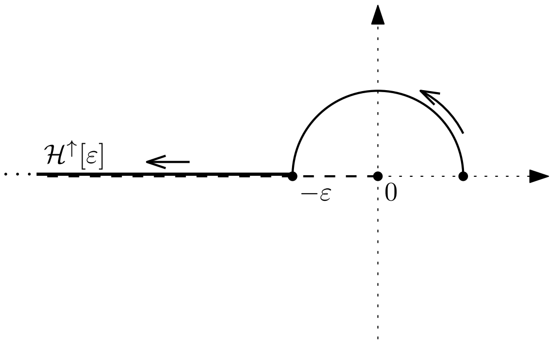
[7] Pri konvenciách $\varepsilon e^{-i\pi} = -\varepsilon - 0i$ a $\varepsilon e^{i\pi} = -\varepsilon + 0i$.



(a) Krivka $\mathcal{H}[\varepsilon]$.



(b) Krivka $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon]$.



(c) Krivka $\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon]$.

Obr. 5.5: Rozdelenie krivky $\mathcal{H}[\varepsilon]$ na krivky $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon]$ a $\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon]$.

Lema 5.4.7. *Nech* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *a* $z \in \mathbb{C}$ *je také, že* $\operatorname{Re} z < 0$. *Potom*

$$\int_{\mathcal{H}[\varepsilon_1]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w = \int_{\mathcal{H}[\varepsilon_2]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Každú z kriviek $\mathcal{H}[\varepsilon]$ pre $\varepsilon > 0$ rozdeľme na dve časti $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon]$ a $\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon]$, tak ako na obrázku 5.5. Pre všetky $\varepsilon > 0$ potom možno integrál

$$\int_{\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w$$

bezo zmeny jeho hodnoty interpretovať aj tak, že integrandom je funkcia $e^w w^{-z}$ pre vetvu funkcie w^{-z} danú ako

$$w^{-z} = e^{(\ln|w| + i \arg w)(-z)},$$

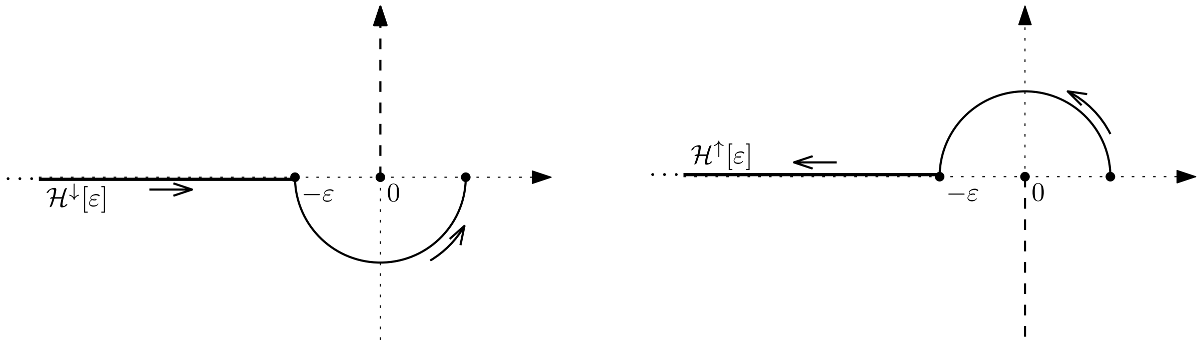
kde $\arg w$ vyberáme z intervalu $(-3\pi/2, \pi/2)$ – môžeme teda pracovať aj v komplexnej rovine rozrezanej ako na obrázku 5.6a. Podobne integrál

$$\int_{\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w$$

možno interpretovať aj tak, že jeho integrandom je funkcia $e^w w^{-z}$ pre vetvu w^{-z} danú ako

$$w^{-z} = e^{(\ln|w| + i \arg w)(-z)},$$

kde $\arg w$ vyberáme z intervalu $(-\pi/2, 3\pi/2)$; to zodpovedá rezu komplexnej roviny na obrázku 5.6b.



(a) Argument z intervalu $(-3\pi/2, \pi/2)$ pri $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon]$.   **(b)** Argument z intervalu $(-\pi/2, 3\pi/2)$ pri $\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon]$.

Obr. 5.6: Možná zmena rezu komplexnej roviny („čiarkovane“) pri integráloch pozdĺž kriviek $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon]$ a $\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon]$.

Integrandy sú potom v obidvoch prípadoch holomorfné na celej „novorozrezanej“ komplexnej rovine, ktorá je jednoducho súvislá. Integrály pozdĺž $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon_1]$ resp. $\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon_1]$ teda môžeme bezo zmeny ich hodnoty premeniť na integrály pozdĺž $\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon_2] + [\varepsilon_2, \varepsilon_1]$ resp. $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] + \mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon_2]$, pretože v oboch prípadoch nahrádzame nejakú „vlastnú podkrivku“ inou vlastnou krivkou s rovnakým počiatočným aj koncovým bodom [5, dôsledok 5.6.2]. Teda

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{H}[\varepsilon_1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w &= \int_{\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon_1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon_1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \\
&= \int_{\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon_2]+[\varepsilon_2,\varepsilon_1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{[\varepsilon_1,\varepsilon_2]+\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon_2]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \\
&= \int_{\mathcal{H}^{\downarrow}[\varepsilon_2]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{\mathcal{H}^{\uparrow}[\varepsilon_2]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{[\varepsilon_2,\varepsilon_1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{[\varepsilon_1,\varepsilon_2]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \\
&= \int_{\mathcal{H}[\varepsilon_2]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w,
\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Vráťme sa teraz k pôvodne uvažovanému integrálu pozdĺž Hankelovej krivky H – dokážeme, že pre $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z < 0$ v ňom možno krivku H nahradiť ľubovoľnou z kriviek $\mathcal{H}[\varepsilon]$.

Lema 5.4.8. *Nech $z \in \mathbb{C}$ je také, že $\operatorname{Re} z < 0$. Potom pre všetky $\varepsilon > 0$ je*

$$\int_H e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\mathcal{H}[\varepsilon]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w.$$

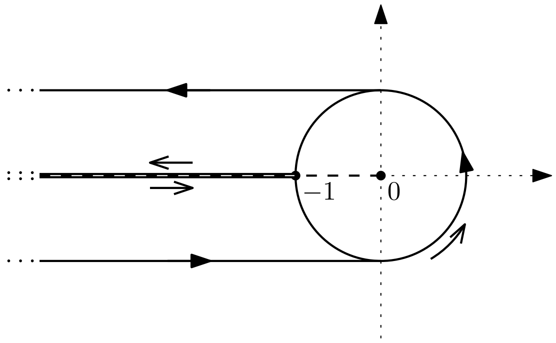
Dôkaz. Vďaka leme 5.4.7 stačí tvrdenie dokázať len pre $\varepsilon = 1$. Z tvaru kriviek H a $\mathcal{H}[1]$ – znázornených aj na obrázku 5.7 – ľahko vidieť, že stačí dokázať rovnosti

$$\int_{H^-} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\mathcal{H}^-[1]+(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[-\pi,-\pi/2])} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w$$

a

$$\int_{H^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_{(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[\pi/2,\pi])+\mathcal{H}^+[1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w.$$

Dokážeme druhú z týchto rovností – prvá by sa dokazovala analogicky.

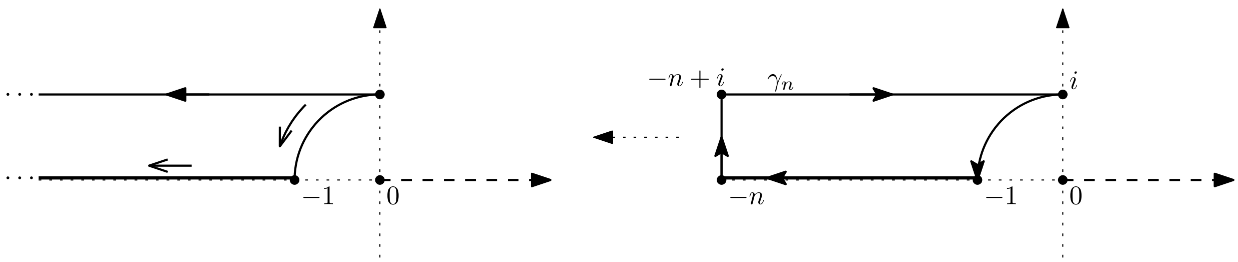


Obr. 5.7: Krivky H (plné šípky na krivke) a $\mathcal{H}[1]$ (jednoduché šípky vedľa krivky).

Podobne ako v dôkaze lemy 5.4.7 môžeme pri krivkách H^+ a $(\mathcal{H}^\circ[1] \upharpoonright [\pi/2, \pi]) + \mathcal{H}^+[1]$ bezo zmeny hodnoty integrálov zmeniť uvažovaný rez komplexnej roviny – napríklad na $[0, \infty)$, pričom integrand

$$e^w w^{-z} = e^w e^{(\ln|w| + i \arg w)(-z)},$$

interpretujeme ako daný vetvou, v ktorej $\arg w$ vyberáme z intervalu $(0, 2\pi)$.[8] Táto situácia je znázornená na obrázku 5.8a.



(a) Zmena rezu komplexnej roviny. **(b)** Uzavretá krivka γ_n.

Obr. 5.8: Dôkaz rovnosti integrálov pre krivky H^+ a $(\mathcal{H}^\circ[1] \upharpoonright [\pi/2, \pi]) + \mathcal{H}^+[1]$.

Pre všetky prirodzené $n \geq 2$ teraz označme $\mathcal{H}_n^+[1] := \mathcal{H}^+[1] \upharpoonright [1, n] = [-1 + 0i, -n + 0i]$; pripomeňme si tiež, že $H_n^+ = H^+ \upharpoonright [0, n] = [i, -n + i]$. Definujme uzavretú krivku

$$\gamma_n := (\mathcal{H}^\circ[1] \upharpoonright [\pi/2, \pi]) + \mathcal{H}_n^+[1] + [-n + 0i, -n + i] + (-H_n^+).$$

Tá je znázornená na obrázku 5.8b.

Z Cauchyho integrálnej vety pre jednoducho súvislú oblasť pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ dostávame

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_n} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w = \\ &= \int_{(\mathcal{H}^\circ[1] \upharpoonright [\pi/2, \pi]) + \mathcal{H}_n^+[1]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w + \int_{[-n+0i, -n+i]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w - \int_{H_n^+} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Avšak

$$\int_{[-n+0i, -n+i]} e^w w^{-z} \, \mathrm{d}w = \int_0^1 e^{-n+ti} (-n + ti)^{-z} i \, \mathrm{d}t, \tag{5.12}$$

pričom pre dostatočne veľké n a fixné z je

$$\left|(-n + ti)^{-z}\right| \leq e^{n/2}$$

[8] Pre krivky H^- a $\mathcal{H}^-[1] + (\mathcal{H}^\circ[1] \upharpoonright [-\pi, -\pi/2])$ by sme mohli použiť rovnaký rez, ktorý by však v tomto prípade zodpovedal výberu argumentu z intervalu $(-2\pi, 0)$.

pre všetky $t \in [0,1]$. Preto

$$\left|\int_0^1 e^{-n+ti}(-n+ti)^{-z} i \,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \left|e^{-n+ti}(-n+ti)^{-z} i\right| \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 e^{-n} e^{n/2} \,\mathrm{d}t = e^{-n/2},$$

z čoho vďaka (5.12) dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-n+0i,-n+i]} e^w w^{-z} \,\mathrm{d}w = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-n+ti}(-n+ti)^{-z} \,\mathrm{d}t = 0.$$

V dôsledku toho

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[\pi/2,\pi])+\mathcal{H}_n^+[1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{[-n+0i,-n+i]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w - \int_{H_n^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[\pi/2,\pi])+\mathcal{H}_n^+[1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w - \lim_{n\to\infty}\int_{H_n^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \\
&= \int_{(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[\pi/2,\pi])+\mathcal{H}^+[1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w - \int_{H^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w,
\end{aligned}$$

čiže

$$\int_{H^+} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_{(\mathcal{H}^\circ[1]\restriction[\pi/2,\pi])+\mathcal{H}^+[1]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w,$$

čo bolo treba dokázať. □

Môžeme teraz pristúpiť k dôkazu samotnej Hankelovej integrálnej reprezentácie funkcie $1/\Gamma(z)$.

Dôkaz vety 5.4.1. Predpokladajme najprv, že $z < -1$. Vďaka leme 5.4.8 je pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\int_H e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\mathcal{H}[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w,$$

v dôsledku čoho aj

$$\begin{aligned}
\int_H e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{H}[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathcal{H}^-[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{\mathcal{H}^\circ[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \int_{\mathcal{H}^+[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w\right).
\end{aligned}$$

Keďže ale $z < -1$, s použitím vety o odhade pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dostávame

$$\left|\int_{\mathcal{H}^\circ[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w\right| \leq \frac{2\pi e}{n},$$

a teda

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{H}^\circ[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = 0.$$

Podľa (5.10), (5.11) a (5.4) potom pre $z \notin \mathbb{Z}$ je

$$\begin{aligned}
\int_H e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{H}^-[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{H}^\circ[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w + \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{H}^+[1/n]} e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \\
&= e^{i\pi z}\Gamma(1-z) - e^{-i\pi z}\,\Gamma(1-z) = 2i\left(\frac{e^{i\pi z} - e^{i\pi z}}{2i}\right)\Gamma(1-z) = 2i\sin(\pi z)\Gamma(1-z) = \frac{2\pi i}{\Gamma(z)}.
\end{aligned}$$

Pre všetky reálne čísla $z < -1$ také, že $z \notin \mathbb{Z}$ teda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_H e^w w^{-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{\Gamma(z)}.$$

Keďže sú navyše funkcie na oboch stranách celé, z vety o jednoznačnosti dostávame platnosť uvedeného vzťahu aj pre všetky $z \in \mathbb{C}$, čím je dôkaz Hankelovej integrálnej reprezentácie dokončený. $\square$

Kapitola 6

Metóda analýzy singularít

Metóda analýzy singularít – dielo P. Flajoleta a A. Odlyzka [2] z roku 1990 – tvorí samotné jadro analytickej kombinatoriky: umožňuje totiž prejsť, pomocou jednoduchého mechanického postupu, od singulárnych rozvojov analyticky chápanej vytvárajúcej funkcie k veľmi presnému asymptotickému odhadu pre jej koeficienty. V tejto kapitole sa najprv budeme zaoberať základným variantom tejto metódy pre vytvárajúce funkcie s jedinou dominantnou singularitou, ktorou podľa Pringsheimovej vety musí byť kladné reálne číslo. Už v tejto svojej najjednoduchšej podobe metóda analýzy singularít nachádza veľké množstvo rôznych kombinatorických aplikácií – tým sa budeme venovať vzápätí. Neskôr v hrubých rysoch naznačíme možnosti zovšeobecnenia metódy analýzy singularít na funkcie s viacerými dominantnými singularitami a preskúmame niektoré významné triedy funkcií, ktorých koeficienty možno pomocou tejto metódy analyzovať.

6.1 Metóda analýzy singularít v skratke

V nasledujúcom sa budeme zaoberať funkciami $R(z) \in \mathbf{H}_0 \cap \mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$ – čiže funkciami analytickými v bode 0, ktorých Maclaurinov rozvoj má všetky koeficienty nezáporné reálne. Túto podmienku spĺňajú okrem iného všetky obyčajné aj exponenciálne vytvárajúce funkcie, ktoré sú v bode 0 analytické. Spočiatku tiež budeme predpokladať existenciu *jedinej* dominantnej singularity funkcie $R(z)$, ktorou podľa Pringsheimovej vety musí byť reálne číslo $\varrho > 0$ rovné polomeru konvergencie Maclaurinovho radu funkcie $R(z)$.

Metóda analýzy singularít nám pre širokú triedu takýchto funkcií umožní prejsť pomocou mechanického procesu od *singulárneho rozvoja* funkcie $R(z)$ v bode ϱ k *asymptotickému rozvoju* pre koeficienty jej Maclaurinovho radu. Asymptotické vlastnosti koeficientov tak budú dané vlastnosťami singulárneho rozvoja funkcie $R(z)$ v bode ϱ, čiže v konečnom dôsledku najmä *hodnotou* a *charakterom* singularity ϱ. K prvému princípu asymptotiky koeficientov, dávajúcemu do súvisu *hodnotu* dominantnej singularity ϱ s exponenciálnym rádom postupnosti koeficientov Maclaurinovho radu funkcie, tak pridáme aj *druhý princíp asymptotiky koeficientov* P. Flajoleta a R. Sedgewicka [3], podľa ktorého sú subexponenciálne vlastnosti koeficientov Maclaurinovho radu funkcie dané charakterom dominantných singularít.

Idea metódy analýzy singularít spočíva v kombinácii dvoch ingrediencií: asymptotických odhadov pre koeficienty Maclaurinových radov istej *štandardnej triedy funkcií*, ktoré budeme pripúšťať ako možné členy singulárnych rozvojov funkcie $R(z)$ a takzvaných *viet o transfere*, podľa ktorých zanedbateľné členy singulárneho rozvoja za istých podmienok zodpovedajú zanedbateľným členom asymptotického rozvoja pre koeficienty. Asymptotický odhad pre koeficienty funkcie $R(z)$ potom často možno získať nasledujúcim spôsobom: funkciu $R(z)$ lokálne rozvinieme do jej singulárneho rozvoja v bode ϱ, ktorým je nejaký rad funkcií

$$R(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) + c_3 f_3(z) + \ldots,$$

kde $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sú komplexné koeficienty[1] a zanedbáme všetky až na konečne veľa členov tohto rozvoja. Funkciu $R(z)$ teda napríklad vyjadríme ako

$$R(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) + c_3 f_3(z) + O\left(g(z)\right),$$

kde funkcia g je na okolí bodu ϱ oproti funkciám f_1, f_2, f_3 zanedbateľná. Ak teraz funkcie f_1, f_2, f_3 a g patria do štandardnej triedy funkcií a ak sú splnené neveľmi obmedzujúce podmienky vety o transfere, možno koeficienty funkcie $R(z)$ pre $n \to \infty$ vyjadriť ako

$$[z^n]R(z) = c_1[z^n]f_1(z) + c_2[z^n]f_2(z) + c_3[z^n]f_3(z) + O\left([z^n]g(z)\right),$$

pričom presné asymptotické odhady koeficientov $[z^n]f_1(z)$, $[z^n]f_2(z)$, $[z^n]f_3(z)$ a $[z^n]g(z)$ pre $n \to \infty$ možno získať z „katalógu“ takýchto odhadov pre štandardnú triedu funkcií. V konečnom dôsledku tak získame presný asymptotický odhad pre koeficienty Maclaurinovho radu samotnej funkcie $R(z)$.

Za *štandardnú triedu funkcií* pritom budeme považovať triedu pozostávajúcu z funkcií typu

$$\left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha} \left(\frac{\varrho}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1 - \frac{z}{\varrho}}\right)^{\beta} \tag{6.1}$$

pre $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $\varrho > 0$, pričom pre mocninové funkcie w^{α}, w^{β} a prirodzený logaritmus vždy uvažujeme ich hlavnú vetvu. Definičným oborom týchto funkcií je teda $\mathbb{C} \setminus [\varrho, \infty)$ – pracujeme preto v komplexnej rovine narezanej pozdĺž polpriamky $[\varrho, \infty)$.

Poznámka 6.1.1. Účelom faktora ϱ/z je v (6.1) vyrobiť z $\operatorname{Ln}(1/(1 - z/\varrho)) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ formálny mocninový rad s konštantným koeficientom rovným jednej, na ktorý tak možno aplikovať umocňovanie na exponent $\beta \in \mathbb{C}$. V prípade, že $\beta \in \mathbb{N}$, bude asymptotický odhad pre funkciu (6.1) rovnaký ako pre funkciu

$$\left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha} \left(\operatorname{Ln} \frac{1}{1 - \frac{z}{\varrho}}\right)^{\beta}.$$

Poznámka 6.1.2. V pôvodnom článku P. Flajoleta a A. Odlyzka [2] sa uvažuje o niečo všeobecnejšia štandardná trieda funkcií, zahŕňajúca aj iterované logaritmy.

Keďže $\beta \in \mathbb{C}$ môže byť aj nulové, bude nám takto umožnené analyzovať napríklad funkcie, ktorých jediná dominantná singularita ϱ je pólom alebo algebraickým bodom vetvenia a možno ich tak v bode ϱ rozvinúť do Laurentovho resp. Puiseuxovho radu. Okrem toho sú vytvárajúce funkcie často už priamo alebo „takmer priamo“ dané požadovaným singulárnym rozvojom, ktorý môže byť aj konečný – ukážkovým príkladom je vytvárajúca funkcia pre posunuté Catalanove čísla

$$T(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4z}$$

s dominantnou singularitou $\varrho = 1/4$, ktorá je algebraickým bodom vetvenia.

Vety o transfere možno sformulovať v rôznych podobách, využívajúc rôzne asymptotické notácie ako napríklad O, o, alebo $\sim$. Spoločným menovateľom týchto viet je predpoklad na funkcie, pre ktoré sú tieto vety použiteľné: musia byť definované a analytické na určitej špeciálnej oblasti – tzv. Δ-*obore* – neobsahujúcej bod ϱ a „o niečo väčšej“, než $D(0, \varrho)$.

[1]Tieto koeficienty by samozrejme bolo možné zahrnúť do funkcií $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ Ak ale jednotlivé členy radu majú patriť do uvažovanej štandardnej triedy funkcií, je užitočnejšie vyjadrenie v uvedenom tvare.

6.2 Koeficienty štandardnej triedy funkcií

Nech $f(z) \in \mathbf{H}_0 \cap \mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$ je funkcia daná Maclaurinovým radom o polomere konvergencie $\varrho > 0$ taká, že ϱ je jej jediná dominantná singularita. Maclaurinov rad funkcie $g(z) := f(\varrho z)$ má potom očividne polomer konvergencie rovný jednej, pričom bod 1 je jedinou dominantnou singularitou tejto funkcie. Maclaurinov rozvoj funkcie $g(z)$ navyše získame dosadením ϱz za premennú z v Maclaurinovom rozvoji funkcie $f(z)$; z toho je zrejmé, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$[z^n]f(z) = \varrho^{-n}[z^n]g(z). \tag{6.2}$$

V nasledujúcom sa preto bez ujmy na všeobecnosti obmedzíme na funkcie s jedinou dominantnou singularitou $\varrho = 1$; pre ostatné $\varrho > 0$ bude stačiť v závere analýzy použiť vzťah (6.2). Nami uvažovaná štandardná trieda bude pri tejto voľbe ϱ pozostávať z funkcií

$$(1-z)^\alpha \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z}\right)^\beta$$

pre $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, kde pri umocňovaní na komplexný exponent uvažujeme jeho hlavnú vetvu. Naším prvým cieľom bude nájsť asymptotický rozvoj pre koeficienty Maclaurinových radov funkcií

$$(1-z)^\alpha .$$

Pre $\alpha \in \mathbb{N}$ je $(1-z)^\alpha$ polynomickou funkciou – koeficienty Maclaurinovho radu takejto funkcie sú teda počnúc nejakým $n_0 \in \mathbb{N}$ všetky nulové. Tento triviálny prípad už teda nemusíme ďalej uvažovať a môžeme predpokladať, že $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. V rámci nasledujúceho tvrdenia a jeho dôkazu pritom uvidíme, že pomerne presný asymptotický odhad koeficientov $[z^n]\,(1-z)^\alpha$ pre $n \to \infty$ možno získať aj pomocou relatívne elementárnych metód. V znení tohto tvrdenia pre jednoduchosť predpokladáme reálnosť čísla α; neskôr vo vete 6.2.2 totiž dokážeme o niečo presnejší odhad aj pre komplexné exponenty. Aj nasledujúce tvrdenie by ale bolo možné dokázať pre všetky $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ v prípade, že by sme použili vhodné zovšeobecnenie Stirlingovej aproximácie reálnej funkcie gama.

Tvrdenie 6.2.1. *Nech $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Pre $n \to \infty$ potom*

$$[z^n](1-z)^\alpha = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right) \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}.$$

Dôkaz. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}[z^n](1-z)^\alpha &= (-1)^n \binom{\alpha}{n} = (-1)^n \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!} = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} = \\ &= \frac{(n-\alpha-1)\ldots(-\alpha)}{n!} = \binom{n-\alpha-1}{n}.\end{aligned}$$

Vďaka rekurentnému vzťahu pre funkciu $\Gamma(z)$ potom

$$[z^n](1-z)^\alpha = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+1)}$$

a zo Stirlingovej aproximácie pre reálnu funkciu gama [5, veta 14.7.7] tak pre $n \to \infty$ dostávame

$$\begin{aligned}[z^n](1-z)^\alpha &= \frac{\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n-\alpha}}\left(\frac{n-\alpha}{e}\right)^{n-\alpha}\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right)}{\Gamma(-\alpha)\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right)} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} n^{-\alpha-1} e^{\alpha+1}\left(1 - \alpha/n\right)^{n-\alpha-1/2}\left(1 + 1/n\right)^{-n-1/2}\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right) = \\ &= \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} e^{\alpha+1}\left(1 - \alpha/n\right)^{-\alpha-1}\left(1 - \frac{\alpha+1}{n+1}\right)^{n+1/2}\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right) = \\ &= \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} e^{\alpha+1}\left(1 - \frac{\alpha+1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right).\end{aligned}$$

Predposledný faktor výsledného výrazu pritom pre dostatočne veľké $n \in \mathbb{N}$ spĺňa [5, lema 14.5.2]

$$0 \leq e^{-\alpha-1} - \left(1 - \frac{\alpha+1}{n+1}\right)^{n+1} \leq (\alpha+1)^2 \frac{e^{-\alpha-1}}{n},$$

z čoho

$$\left(1 - \frac{\alpha+1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-\alpha-1}\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right),$$

a teda naozaj

$$[z^n](1-z)^\alpha = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right). \qquad \square$$

O niečo presnejšiu verziu asymptotického odhadu z predchádzajúceho tvrdenia teraz pre všetky $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ dokážeme metódou P. Flajoleta a A. Odlyzka [2] založenou na použití Cauchyho integrálneho vzorca pre derivácie a Hankelovej integrálnej reprezentácie funkcie $1/\Gamma(z)$.

Získame tak *asymptotický rozvoj*[2] pre koeficienty $[z^n](1-z)^\alpha$ a $n \to \infty$, ktorý ich umožní asymptoticky odhadnúť s chybou $O(n^{-k})[z^n](1-z)^\alpha$ pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Najpodstatnejšou výhodou metódy založenej na Hankelovej integrálnej reprezentácii je ale jej priamočiara adaptovateľnosť na všeobecnejšie triedy funkcií, čo oceníme akonáhle do našich úvah zahrnieme logaritmické faktory.

Veta 6.2.2. *Nech $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Pre $n \to \infty$ potom*

$$[z^n](1-z)^\alpha \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(\alpha)}{n^k}\right),$$

kde $\varepsilon_k(\alpha)$ je, pre všetky $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, polynomická funkcia premennej α stupňa $2k$. Prvých niekoľko členov tohto asymptotického rozvoja je

$$[z^n](1-z)^\alpha = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left(1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(3\alpha+1)}{24n^2} + O\left(n^{-3}\right)\right).$$

Dôkaz. Predpokladajme, že $n \geq 2$ a označme

$$a_n := [z^n](1-z)^\alpha.$$

Podľa Cauchyho integrálneho vzorca pre koeficienty Maclaurinovho radu potom

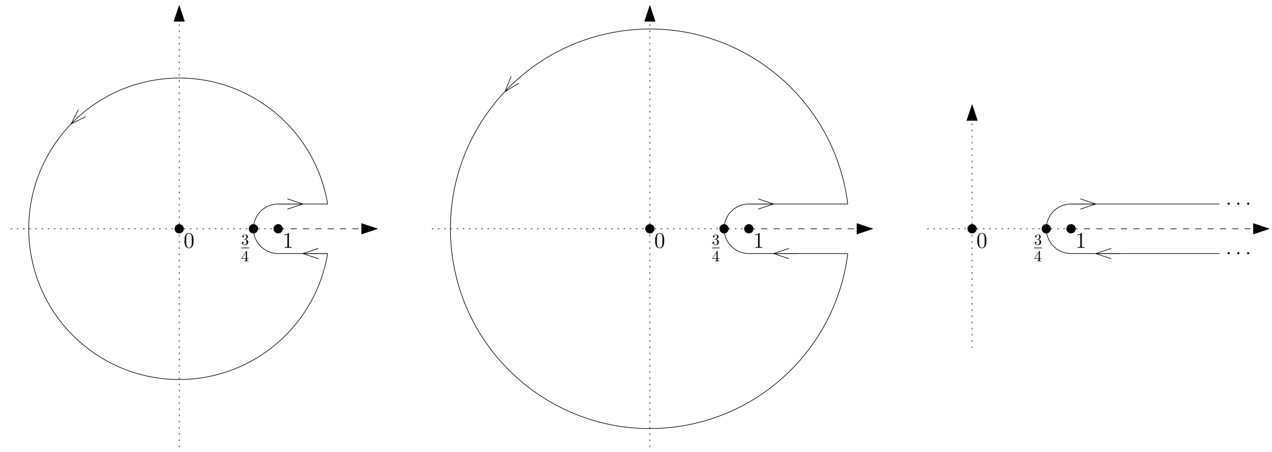
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(0,1/2)} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z.$$

Keďže je hlavná vetva funkcie $(1-z)^\alpha$ holomorfná na $\mathbb{C} \setminus [1,\infty)$, môžeme v Cauchyho integrálnom vzorci vymeniť kružnicu $\kappa(0,1/2)$ za ľubovoľnú kladne orientovanú jednoduchú uzavretú po častiach hladkú krivku v $\mathbb{C} \setminus [1,\infty)$ takú, že bod 0 leží v jej vnútri. Špeciálne môžeme vziať ľubovoľnú z kriviek $K_n[R]$ pre reálne $R > 1$, daných nasledovne:

$$K_n[R] = \left[Re^{-i\theta}, 1 - \frac{i}{n}\right] - \kappa_{[\pi/2,3\pi/2]}\left(1, \frac{1}{n}\right) + \left[1 + \frac{i}{n}, Re^{i\theta}\right] + \kappa_{[\theta,2\pi-\theta]}\left(0, R\right),$$

kde $\theta \in (0,\pi/2)$ je také, že $R\sin\theta = 1/n$. Typické krivky $K_n[R]$ sú znázornené na obrázkoch 6.1a a 6.1b.

[2]Vo všeobecnosti rozumieme *asymptotickým rozvojom* postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ pre $n \to \infty$ vyjadrenie jej členov v tvare $a_n \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(n)$, pričom tento zápis treba chápať ako $a_n = \sum_{k=0}^{s} \varphi_k(n) + O(\varphi_{s+1}(n))$ pre všetky prirodzené čísla s.



(a) Krivka $K_4[3/2]$. **(b)** Krivka $K_4[2]$. **(c)** Hankelovská krivka $K_4[\infty]$.

Obr. 6.1: Krivky z dôkazu vety 6.2.2. Čiarkovane je znázornený uvažovaný rez komplexnej roviny pozdĺž $[1, \infty)$.

Pre integrál pozdĺž „veľkej takmer-kružnice“

$$\kappa_n(R) := \kappa_{[\theta, 2\pi-\theta]}(0, R)$$

teraz z vety o odhade vyplýva

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_n(R)} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\kappa(0,R)} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{(R+1)^{\operatorname{Re}\alpha}}{R^{n+1}} = \frac{(R+1)^{\operatorname{Re}\alpha}}{R^n}.$$

Pre dostatočne veľké n teda

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_n(R)} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z = 0.$$

V dôsledku toho pre krivky $\hat{K}_n(R)$ definované ako

$$\hat{K}_n(R) := \left[Re^{-i\theta}, 1 - \frac{i}{n}\right] - \kappa_{[\pi/2, 3\pi/2]}\left(1, \frac{1}{n}\right) + \left[1 + \frac{i}{n}, Re^{i\theta}\right]$$

zisťujeme, že

$$a_n = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n[R]} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{K}_n(R)} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n[\infty]} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$

kde $K_n[\infty]$ je nevlastná krivka hankelovského typu znázornená na obrázku 6.1c. Formálne je táto krivka definovaná nasledovne:

$$K_n[\infty] := K_n^-[\infty] + K_n^\circ[\infty] + K_n^+[\infty],$$

kde polpriamka $K_n^-[\infty] \colon (-\infty, 1] \to \mathbb{C}$ je pre všetky $t \in (-\infty, 1]$ daná ako $K_n^-[\infty](t) = -t - i/n$, polkružnica $K_n^\circ[\infty]$ je daná ako $K_n^\circ[\infty] = -\kappa_{[\pi/2, 3\pi/2]}(1, 1/n)$ a polpriamka $K_n^+[\infty] \colon [1, \infty) \to \mathbb{C}$ je pre všetky $t \in [1, \infty)$ daná ako $K_n^+[\infty](t) = t + i/n$.

Zostáva teda nájsť asymptotický rozvoj pre nevlastné integrály

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n[\infty]} \frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z \tag{6.3}$$

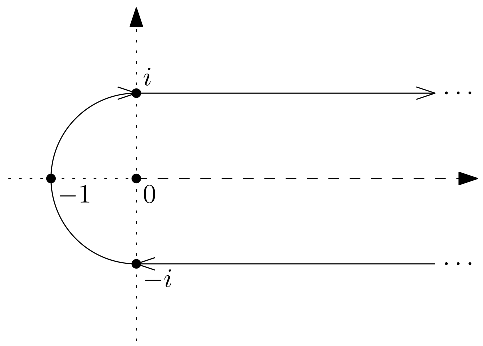
v prípade, že $n \to \infty$. Aplikujme substitúciu $u := n(z-1)$. Keďže pre všetky $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ a $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ je $\operatorname{Ln}(z/n) = \operatorname{Ln} z - \ln n$ – z čoho pre hlavnú vetvu mocninovej funkcie vyplýva $(z/n)^\alpha = n^{-\alpha}z^\alpha$ – integrál (6.3) sa tým zmení na

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-G}\left(-\frac{u}{n}\right)^\alpha\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}u = \\ &= \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i}\int_{-G}(-u)^\alpha\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1}\mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{6.4}$$

kde $-G$, znázornená aj na obrázku 6.2, je opačne orientovaná Hankelova krivka G z vety 5.4.3, podľa ktorej

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-G}(-u)^\alpha e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}.$$

Z toho možno získať určitú intuíciu o pôvode faktora $1/\Gamma(-\alpha)$ v asymptotickom rozvoji zo znenia vety – výraz $(1+u/n)^{-n-1}$ totiž pre $n \to \infty$ konverguje k e^{-u} a integrál z (6.4) tak „nápadne pripomína" práve uvedený Hankelov integrál pre $1/\Gamma(-\alpha)$. Ozajstný dôkaz však vyžaduje o niečo technickejší prístup.



Obr. 6.2: Hankelova krivka $-G$.

Všimnime si najprv, že v integráli (6.4) je príspevok získaný integrovaním pozdĺž častí krivky $-G$, na ktorých platí $\operatorname{Re} u \geq (\ln n)^2$, zanedbateľný (t. j. nemá žiaden vplyv na asymptotický rozvoj pre a_n). Pre takéto u je totiž

$$\left|\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n/2}\right| \leq \left(1+\frac{(\ln n)^2}{n}\right)^{-n/2} = e^{-(n/2)\ln\left(1+\frac{(\ln n)^2}{n}\right)}.$$

Keďže pre všetky dostatočne veľké n je $(\ln n)^2/n < 1$, môžeme vonkajší logaritmus v exponente rozvinúť do Mercatorovho radu, čím dostaneme

$$\left|\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n/2}\right| \leq e^{(-n/2)\left(\frac{(\ln n)^2}{n}+O\left(\frac{(\ln n)^4}{n^2}\right)\right)} = e^{(-1/2)((\ln n)^2+O(1))} \leq e^{-C(\ln n)^2}$$

pre vhodnú konštantu $C > 0$. Ak teda označíme ako Γ zúženie krivky $-G$ na u také, že $\operatorname{Re} u \geq (\ln n)^2$, môžeme integrál pozdĺž Γ odhadnúť ako[3]

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i}\int_\Gamma(-u)^\alpha\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1}\mathrm{d}u\right| &\le \frac{n^{|\mathrm{Re}\,\alpha|+1}}{2\pi}\left|\int_\Gamma(-u)^\alpha\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1}\mathrm{d}u\right|\le\\ &\le \frac{n^{|\mathrm{Re}\,\alpha|+1}}{2\pi}\left|\int_\Gamma(-u)^\alpha\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n/2}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n/2-1}\mathrm{d}u\right|\le\\ &\le \frac{n^{|\mathrm{Re}\,\alpha|+1}}{\pi}\int_{(\ln n)^2}^\infty(t+1)^r e^{-C(\ln n)^2}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n/2-1}\mathrm{d}t\le\\ &\le n^{-D\ln n}\int_{(\ln n)^2}^\infty(t+1)^r\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n/2-1}\mathrm{d}t \end{aligned}\tag{6.5}$$

pre nejaké vhodné konštanty $r, D > 0$ a dostatočne veľké n. Nevlastný integrál

$$\int_{(\ln n)^2}^\infty(t+1)^r\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n/2-1}\mathrm{d}t \tag{6.6}$$

ale pre dostatočne veľké n konverguje k nejakej kladnej hodnote zhora ohraničenej polynomickou funkciou premennej n, pretože po substitúcii $x = t/n$ pre nejaké $s > r$ nezávislé od n dostávame

$$\begin{aligned}\int_{(\ln n)^2}^\infty(t+1)^r\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n/2-1}\mathrm{d}t &= \int_{(\ln n)^2/n}^\infty(xn+1)^r(1+x)^{-n/2-1}n\,\mathrm{d}x\le\\ &\le\int_{(\ln n)^2/n}^\infty(xn)^s(1+x)^{-n/2-1}n\,\mathrm{d}x=\\ &= n^{s+1}\int_{(\ln n)^2/n}^\infty x^s(1+x)^{-n/2-1}\mathrm{d}x=\\ &= n^{s+1}\left(\int_{(\ln n)^2/n}^1 x^s(1+x)^{-n/2-1}\mathrm{d}x+\int_1^\infty x^s(1+x)^{-n/2-1}\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Keďže pre $x\in[(\ln n)^2/n, 1]$ je $x^s(1+x)^{-n/2-1}\le 1$, nutne

$$\int_{(\ln n)^2/n}^1 x^s(1+x)^{-n/2-1}\mathrm{d}x\le 1;$$

pre dostatočne veľké n tiež

$$\int_1^\infty x^s(1+x)^{-n/2-1}\mathrm{d}x\le\int_1^\infty x^{-2}\mathrm{d}x = 1.$$

Hodnota integrálu (6.6) je teda zhora ohraničená polynomickou funkciou $2n^{s+1}$, z čoho vyplýva, že (6.5) skutočne klesá rýchlejšie, než n^{-k} pre ľubovoľné $k\in\mathbb{N}$. V dôsledku toho sa teda v integráli (6.4) môžeme obmedziť na konečnú krivku zodpovedajúcu u takým, že $\mathrm{Re}\,u\le(\ln n)^2$ – príspevok získaný integrovaním pozdĺž zvyšných častí tejto krivky je totiž zanedbateľný.

Označme túto konečnú časť krivky $-G$ ako γ – teda

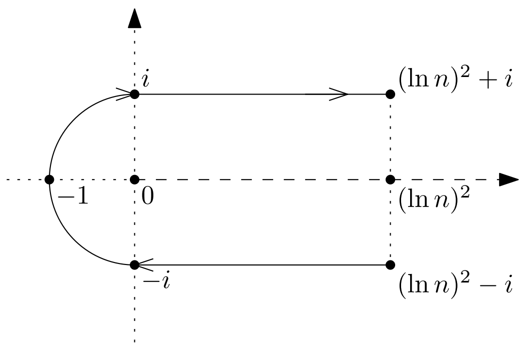
$$\gamma = \gamma^- + \gamma^\circ + \gamma^+,$$

kde

$$\gamma^- = [(\ln n)^2 - i, -i],\qquad \gamma^\circ = -\kappa_{[\pi/2,3\pi/2]}(0,1)\qquad\text{a}\qquad \gamma^+ = [i, (\ln n)^2 + i].$$

Krivka γ je znázornená na obrázku 6.3.

[3] Takto definované Γ nie je krivka, ale ide o reťaz pozostávajúcu z dvoch disjunktných nevlastných kriviek. Integrál pozdĺž Γ definujeme ako súčet integrálov pozdĺž týchto dvoch kriviek.



Obr. 6.3: Krivka γ.

Doposiaľ dokázané výsledky tak možno zhrnúť do nasledujúceho vzťahu: pre $a_n = [z^n](1-z)^\alpha$ a $n \to \infty$ je

$$a_n = \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i} \int_\gamma (-u)^\alpha \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}u + O\left(n^{-c \ln n}\right) \tag{6.7}$$

pre nejakú konštantu $c > 0$. Na nájdenie asymptotického rozvoja pre a_n teda stačí nájsť takýto rozvoj pre uvedený integrál.

Pre všetky $u \in \gamma^*$ ale evidentne $|u| \leq (\ln n)^2 + 1$. Pre dostatočne veľké n je potom $|u/n| < 1$ a z Maclaurinovho rozvoja funkcie $\mathrm{Ln}(1 + u/n)$ do Mercatorovho radu a následného Maclaurinovho rozvoja exponenciálnej funkcie pre všetky takéto u dostávame

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n-1} &= e^{-(n+1)\,\mathrm{Ln}(1+u/n)} = e^{-(n+1)\left(u/n - u^2/(2n^2) + u^3/(3n^3) - u^4/(4n^4) + \ldots\right)} = \\
&= e^{-u} e^{u-(n+1)\left(u/n - u^2/(2n^2) + u^3/(3n^3) - u^4/(4n^4) + \ldots\right)} = \\
&= e^{-u} e^{u-(n+1)u/n + (n+1)u^2/(2n^2) - (n+1)u^3/(3n^3) + \ldots} = \\
&= e^{-u} \left(1 + \frac{u^2 - 2u}{2n} + \frac{3u^4 - 20u^3 + 24u^2}{24n^2} + \ldots\right).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Uvedený vzťah možno písať aj ako

$$\left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n-1} = e^{-u} \left(1 + \varphi_1(u) n^{-1} + \varphi_2(u) n^{-2} + \varphi_3(u) n^{-3} + \ldots\right), \tag{6.9}$$

kde $\varphi_k(u)$ je pre všetky $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ polynomická funkcia premennej u stupňa $2k$ a kostupňa k. Každý mocninový rad s polomerom konvergencie ϱ navyše musí konvergovať rovnomerne na $D(0, r)$ pre ľubovoľné $r < \varrho$ [5, cvičenie 7.3]. Preto aj rad funkcií (6.9), ktorý konverguje na $D(0, n)$, musí konvergovať rovnomerne na oblasti obsahujúcej γ^*. V dôsledku toho môžeme tento rad integrovať člen po člene [5, veta 7.1.8] a vďaka (6.7) dostávame

$$a_n = \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i} \left(\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}\, \mathrm{d}u + \sum_{k=1}^{\infty} \int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u) n^{-k}\, \mathrm{d}u \right) + O\left(n^{-c \ln n}\right). \tag{6.10}$$

Vzťahom (6.10) je daný aj asymptotický rozvoj pre a_n a $n \to \infty$:

$$a_n \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i} \left(\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}\, \mathrm{d}u + \sum_{k=1}^{\infty} n^{-k} \int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u)\, \mathrm{d}u \right).$$

Pre všetky $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a všetky dostatočne veľké $n \in \mathbb{N}$ totiž z (6.10) dostávame

$$a_n = \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i} \left(\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}\, \mathrm{d}u + \sum_{k=1}^{t-1} n^{-k} \int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u)\, \mathrm{d}u + \chi_t(n) \right),$$

kde

$$\chi_t(n) = \sum_{k=t}^{\infty} n^{-k} \int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u + O\left(n^{-c\ln n}\right).$$

Treba dokázať, že pre $n \to \infty$ je $\chi_t(n) = O(n^{-t})$. Pre dostatočne veľké $n \in \mathbb{N}$ je ale

$$\chi_t(n) = n^{-t}\left(\sum_{k=t}^{\infty} n^{-k+t} \int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u + O\left(n^{-c\ln n}\right)\right) =$$

$$= n^{-t}\left(\int_\gamma \sum_{k=t}^{\infty} n^{-k+t} (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u + O\left(n^{-c\ln n}\right)\right),$$

kde nekonečný rad konverguje absolútne pre všetky $u \in \gamma^*$ podľa vety o polomere konvergencie mocninového radu [5, veta 3.2.3]. Postupnosť súčtov

$$\sum_{k=t}^{\infty} \left| n^{-k+t} (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u) \right|$$

je pritom pre $n \to \infty$ nerastúca, a teda

$$\int_\gamma \sum_{k=t}^{\infty} n^{-k+t} (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u = O(1).$$

V dôsledku toho naozaj $\chi_t(n) = O(n^{-t})$.

Všimnime si ďalej, že

$$\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}\,\mathrm{d}u = \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u}\,\mathrm{d}u + O\left(n^{-\ln n}\right) \tag{6.11}$$

a pre všetky $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je

$$\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u + O\left(n^{-\ln n}\right). \tag{6.12}$$

Ide tu o jednoduchý dôsledok toho, že absolútnu hodnotu mocninovej funkcie $(-u)^\alpha$, ako aj polynomických funkcií $\varphi_k(u)$, možno pre dostatočne veľké n a $u \in (-G)^*$ s $\operatorname{Re} u \geq (\ln n)^2$ zhora odhadnúť napríklad funkciou $e^{\operatorname{Re} u/4}$. V dôsledku toho možno absolútnu hodnotu rozdielu integrálov na ľavej a pravej strane (6.12) zhora odhadnúť napríklad integrálom

$$2\int_{(\ln n)^2}^{\infty} e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = 4e^{-(\ln n)^2} = O\left(n^{-\ln n}\right)$$

a podobne pre (6.11).

V konečnom dôsledku teda zisťujeme, že asymptotický rozvoj pre a_n a $n \to \infty$ je daný ako

$$a_n \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i}\left(\int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u}\,\mathrm{d}u + \sum_{k=1}^{\infty} n^{-k} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u\right).$$

Z Hankelovej integrálnej reprezentácie funkcie $1/\Gamma(z)$ ale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}$$

a každý z integrálov

$$\frac{1}{2\pi i n^k} \int_{-G} (-u)^\alpha e^{-u} \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u$$

možno – po roznásobení polynómu $\varphi_k(u)$ zvyškom integrandu a integrovaní výsledku člen po člene – vyjadriť ako konečný súčet integrálov typu

$$\frac{1}{2\pi i n^k}\int_{-G}(-u)^{\alpha}e^{-u}c_j u^j\,\mathrm{d}u = \frac{(-1)^j c_j}{n^k}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-G}(-u)^{\alpha+j}e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{d_j}{n^k}\cdot\frac{1}{\Gamma(-\alpha-j)} = \\ = \frac{d_j(-\alpha-1)(-\alpha-2)\dots(-\alpha-j)}{\Gamma(-\alpha)n^k}$$

pre $j = k,\dots,2k$, kde $c_k,\dots,c_{2k}\in\mathbb{Q}$ a $d_k,\dots,d_{2k}\in\mathbb{Q}$ sú konštanty. Opätovným pozbieraním jednotlivých členov

$$d_j(-\alpha-1)(-\alpha-2)\dots(-\alpha-j)$$

pre každé $k\in\mathbb{N}$ a $j = k,\dots,2k$ do polynómu $\varepsilon_k(\alpha)$ tak dostávame existenciu asymptotického rozvoja

$$a_n = [z^n](1-z)^{\alpha} \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(\alpha)}{n^k}\right)$$

zo znenia vety. Priamym výpočtom založeným na (6.8) ďalej ľahko vyjadríme $\varepsilon_k(\alpha)$ pre ľubovoľné $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ – napríklad

$$\varepsilon_1(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2},$$
$$\varepsilon_2(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(3\alpha+1)}{24},$$

atď. Tým je veta dokázaná. □

Pri dôkaze asymptotických odhadov pre zvyšné funkcie z nami uvažovanej štandardnej triedy sa nám zíde tzv. *Leibnizovo pravidlo* umožňujúce za určitých okolností vymeniť deriváciu s integrálom.

Tvrdenie 6.2.3 (Leibnizovo pravidlo)**.** *Nech $a\le b$ a $c\le d$ sú reálne čísla. Pre ľubovoľnú funkciu $f(s,t)$ dvoch reálnych premenných s,t, ktorá je na $[a,b]\times[c,d]$ spojitá a spojite diferencovateľná podľa s, je na intervale $[a,b]$*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_c^d f(s,t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d\frac{\partial}{\partial s}f(s,t)\,\mathrm{d}t.$$

Dôkaz. Pre ľubovoľné pevne dané $s_0\in[a,b]$ je pre všetky $s\in[a,b]$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_c^d f(s,t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_c^d\left(f(s,t)-f(s_0,t)\right)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_c^d\int_{s_0}^s\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{s_0}^s\int_c^d\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_c^d\frac{\partial}{\partial s}f(s,t)\,\mathrm{d}t,$$

kde zámenu integrálov možno odôvodniť spojitosťou funkcie $\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)$ [5, tvrdenie 10.4.2]. □

Podobne ako pri zámene integrálov [5, tvrdenie 10.4.3] možno Leibnizovo pravidlo evidentne priamočiaro rozšíriť aj na prípad krivkových integrálov pozdĺž konečných kriviek.

Zahrnieme teraz do našich úvah aj logaritmické faktory a postupne dokážeme asymptotické odhady koeficientov Maclaurinových radov pre všetky funkcie z nami uvažovanej štandardnej triedy. Začneme funkciami

$$(1-z)^{\alpha}\left(\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^{\beta},$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sú čísla *také, že* $\alpha \notin \mathbb{N}$. Asymptotický rozvoj z nasledujúcej vety umožňuje odhadnúť koeficienty Maclaurinových radov týchto funkcií pre $n \to \infty$ s chybou

$$O\left((\ln n)^{-k}\right)[z^n]\left((1-z)^\alpha\left(\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^\beta\right)$$

pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Veta 6.2.4. *Pre všetky* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ *a* $\beta \in \mathbb{C}$ *je*

$$[z^n](1-z)^\alpha\left(\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^\beta = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}(\ln n)^\beta\left(1+O\left((\ln n)^{-1}\right)\right) \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}(\ln n)^\beta.$$

Pre tieto koeficienty navyše existuje asymptotický rozvoj

$$[z^n](1-z)^\alpha\left(\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^\beta \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}(\ln n)^\beta\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_k(\alpha,\beta)}{(\ln n)^k}\right),$$

kde pre všetky $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *je*

$$\eta_k(\alpha,\beta) = \binom{\beta}{k}\Gamma(-\alpha)\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\frac{1}{\Gamma(s)}\right]_{s=-\alpha}.$$

Dôkaz. Metóda dôkazu je z veľkej časti prakticky identická ako pri vete 6.2.2. Koeficient

$$a_n := [z^n](1-z)^\alpha\left(\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^\beta$$

možno pomocou Cauchyho integrálneho vzorca pre derivácie vyjadriť ako

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(0,1/2)}\frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}}\left(\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^\beta \mathrm{d}z.$$

Rovnakými metódami ako v dôkaze vety 6.2.2 potom možno tento vzorec transformovať na nevlastný integrál pozdĺž hankelovskej krivky $K_n[\infty]$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n[\infty]}\frac{(1-z)^\alpha}{z^{n+1}}\left(\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^\beta \mathrm{d}z.$$

Substitúciou $u := n(z-1)$ následne dostávame, pre Hankelovu krivku $-G$ a dostatočne veľké $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-G}\left(-\frac{u}{n}\right)^\alpha\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1}\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-1}\operatorname{Ln}\left(-\frac{n}{u}\right)\right)^\beta\frac{1}{n}\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i}\int_{-G}(-u)^\alpha\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1}\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-1}(\ln n - \operatorname{Ln}(-u))\right)^\beta \mathrm{d}u;
\end{aligned}$$

využili sme, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je $\operatorname{Ln}(n/z) = \ln n - \operatorname{Ln} z$ a $\operatorname{Ln}(z/n) = \operatorname{Ln} z - \ln n$, v dôsledku čoho pre hlavnú vetvu mocninovej funkcie dostávame aj $(z/n)^\alpha = n^{-\alpha}z^\alpha$.

Podobne ako v dôkaze vety 6.2.2 následne zisťujeme, že pre krivku γ na obrázku 6.3 a $n \to \infty$ je

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i}\int_\gamma(-u)^\alpha\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1}\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-1}(\ln n - \operatorname{Ln}(-u))\right)^\beta \mathrm{d}u + O\left(n^{-c\ln n}\right) = \\
&= \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i}\int_\gamma(-u)^\alpha\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1-\beta}(\ln n - \operatorname{Ln}(-u))^\beta\,\mathrm{d}u + O\left(n^{-c\ln n}\right) = \\
&= \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i}(\ln n)^\beta\int_\gamma(-u)^\alpha\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n-1-\beta}\left(1-\frac{\operatorname{Ln}(-u)}{\ln n}\right)^\beta \mathrm{d}u + O\left(n^{-c\ln n}\right), \qquad (6.13)
\end{aligned}$$

kde $c > 0$ je vhodná konštanta; využili sme pritom skutočnosť, že pre $n \to \infty$ a $u \in \gamma^*$ sa argumenty čísel $(1+u/n)^{-1}$ a $(\ln n - \operatorname{Ln}(-u))$ blížia k nule, v dôsledku čoho je

$$\operatorname{Ln}\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-1}(\ln n - \operatorname{Ln}(-u))\right) = \operatorname{Ln}\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-1}\right) + \operatorname{Ln}(\ln n - \operatorname{Ln}(-u)),$$

a teda aj

$$\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-1}(\ln n - \operatorname{Ln}(-u))\right)^{\beta} = \left(1+\frac{u}{n}\right)^{-\beta}(\ln n - \operatorname{Ln}(-u))^{\beta};$$

taktiež sme pre $x = \ln n$ využili rovnosť $(xz)^\beta = x^\beta z^\beta$ platnú pre všetky $x > 0$ a $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Tým istým postupom ako v dôkaze vety 6.2.2 ďalej možno ukázať, že sa nedopustíme veľkej chyby[4], ak faktor $(1+u/n)^{-n-1-\beta}$ v (6.13) nahradíme za e^{-u}. Pre $n \to \infty$ tak dostávame

$$a_n = \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i}\left((\ln n)^\beta \int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}\left(1-\frac{\operatorname{Ln}(-u)}{\ln n}\right)^\beta \mathrm{d}u + O\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n}\right)\right). \tag{6.14}$$

Zostáva nájsť odhad pre integrál

$$\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}\left(1-\frac{\operatorname{Ln}(-u)}{\ln n}\right)^\beta \mathrm{d}u.$$

Pre dostatočne veľké n a $u \in \gamma^*$ ale pre nejaké $r < 1$ musí byť

$$\left|\frac{\operatorname{Ln}(-u)}{\ln n}\right| < r,$$

v dôsledku čoho binomický rozvoj

$$\left(1-\frac{\operatorname{Ln}(-u)}{\ln n}\right)^\beta = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}(-1)^k\frac{(\operatorname{Ln}(-u))^k}{(\ln n)^k}$$

konverguje na γ^* rovnomerne, a teda

$$\begin{aligned}\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}\left(1-\frac{\operatorname{Ln}(-u)}{\ln n}\right)^\beta \mathrm{d}u &= \int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}(-1)^k\frac{(\operatorname{Ln}(-u))^k}{(\ln n)^k}\,\mathrm{d}u = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}\frac{(-1)^k}{(\ln n)^k}\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}(\operatorname{Ln}(-u))^k\,\mathrm{d}u. \qquad (6.15)\end{aligned}$$

Z Leibnizovho pravidla teraz pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a komplexnú premennú s máme

$$\begin{aligned}\binom{\beta}{k}\frac{(-1)^k}{(\ln n)^k}\int_\gamma (-u)^{-s}e^{-u}(\operatorname{Ln}(-u))^k\,\mathrm{d}u &= \binom{\beta}{k}\frac{1}{(\ln n)^k}\int_\gamma \frac{\partial^k}{\partial s^k}(-u)^{-s}e^{-u}\,\mathrm{d}u = \\ &= \binom{\beta}{k}\frac{1}{(\ln n)^k}\cdot\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\int_\gamma (-u)^{-s}e^{-u}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Preto

$$\begin{aligned}\binom{\beta}{k}\frac{(-1)^k}{(\ln n)^k}\int_\gamma (-u)^\alpha e^{-u}(\operatorname{Ln}(-u))^k\,\mathrm{d}u &= \binom{\beta}{k}\frac{1}{(\ln n)^k}\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\int_\gamma (-u)^{-s}e^{-u}\,\mathrm{d}u\right]_{s=-\alpha} = \\ &= \binom{\beta}{k}\frac{1}{(\ln n)^k}\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\int_{-G} (-u)^{-s}e^{-u}\,\mathrm{d}u\right]_{s=-\alpha} + O\left(n^{-\ln n}\right) = \\ &= \binom{\beta}{k}\frac{2\pi i}{(\ln n)^k}\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\frac{1}{\Gamma(s)}\right]_{s=-\alpha} + O\left(n^{-\ln n}\right),\end{aligned}$$

[4] Chyba teda bude menšieho rádu, než $(\ln n)^{-k}$ pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$.

kde prechod od integračnej krivky γ k Hankelovej krivke $-G$ možno odôvodniť podobne ako v dôkaze vety 6.2.2. Z (6.14) a (6.15) teda pre $n \to \infty$ vyplýva existencia asymptotického rozvoja

$$a_n \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i} (\ln n)^{\beta} \left(\frac{2\pi i}{\Gamma(-\alpha)} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\beta}{k} \frac{2\pi i}{(\ln n)^k} \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \frac{1}{\Gamma(s)} \right]_{s=-\alpha} \right);$$

to je to isté ako

$$a_n \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^{\beta} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\beta}{k} \frac{\Gamma(-\alpha)}{(\ln n)^k} \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \frac{1}{\Gamma(s)} \right]_{s=-\alpha} \right),$$

čo bolo treba dokázať. □

Zostáva asymptoticky odhadnúť koeficienty Maclaurinových radov funkcií

$$(1-z)^{\alpha} \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z} \right)^{\beta},$$

kde $\alpha \in \mathbb{N}$ a $\beta \in \mathbb{C}$.

Veta 6.2.5. *Pre všetky $\alpha \in \mathbb{N}$ a $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je*

$$[z^n](1-z)^{\alpha} \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z} \right)^{\beta} = n^{-\alpha-1} (\ln n)^{\beta-1} \beta \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{1}{\Gamma(s)} \right]_{s=-\alpha} \left(1 + O\left((\ln n)^{-1}\right)\right) \sim$$
$$\sim n^{-\alpha-1} (\ln n)^{\beta-1} \beta \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{1}{\Gamma(s)} \right]_{s=-\alpha}.$$

Pre tieto koeficienty navyše existuje asymptotický rozvoj

$$[z^n](1-z)^{\alpha} \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z} \right)^{\beta} \sim n^{-\alpha-1} (\ln n)^{\beta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(\alpha,\beta)}{(\ln n)^k} \right),$$

kde pre všetky $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je

$$\xi_k(\alpha,\beta) = \binom{\beta}{k} \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \frac{1}{\Gamma(s)} \right]_{s=-\alpha}.$$

Dôkaz. Pre $\alpha \in \mathbb{N}$ je bod $-\alpha$ jednoduchým pólom funkcie gama. Ak ale budeme, rovnako ako v rámci oddielu 5.4, pracovať s konvenciou $1/\Gamma(-\alpha) = 0$, dospejeme rovnako ako v dôkaze vety 6.2.4 k vyjadreniu

$$a_n \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{2\pi i} (\ln n)^{\beta} \left(\frac{2\pi i}{\Gamma(-\alpha)} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\beta}{k} \frac{2\pi i}{(\ln n)^k} \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \frac{1}{\Gamma(s)} \right]_{s=-\alpha} \right),$$

pre $n \to \infty$, čo je to isté ako

$$a_n \sim n^{-\alpha-1} (\ln n)^{\beta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\beta}{k} \frac{1}{(\ln n)^k} \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \frac{1}{\Gamma(s)} \right]_{s=-\alpha} \right).$$ □

V prípade, že $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, je obvykle oproti použitiu predchádzajúcej vety výhodnejšie aplikovať analýzu založenú na elementárnych metódach.

Poznámka 6.2.6. V prípade, že $\alpha \in \mathbb{C}$ a $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, uvažuje sa často v kontexte predchádzajúcich dvoch viet namiesto funkcie

$$(1-z)^{\alpha} \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z} \right)^{\beta}$$

funkcia

$$(1-z)^{\alpha} \left(\operatorname{Ln} \frac{1}{1-z} \right)^{\beta}.$$

Pre $n \to \infty$ totiž v takom prípade evidentne

$$\begin{aligned}
[z^n](1-z)^{\alpha} \left(\operatorname{Ln} \frac{1}{1-z} \right)^{\beta} &= [z^{n-\beta}](1-z)^{\alpha} \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z} \right)^{\beta} = \\
&= \left([z^n](1-z)^{\alpha} \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z} \right)^{\beta} \right) \left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right),
\end{aligned}$$

z čoho vyplýva, že asymptotické rozvoje dané vetami 6.2.4 a 6.2.5 zostanú nezmenené.

Dôsledok 6.2.7. *Nech $\varrho > 0$. Pre všetky $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ a $n \to \infty$ potom*

$$[z^n] \left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha} \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \varrho^{-n};$$

pre všetky $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{C}$ a $n \to \infty$ ďalej

$$[z^n] \left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha} \left(\frac{\varrho}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1 - \frac{z}{\varrho}} \right)^{\beta} \sim \frac{n^{-\alpha-1} (\ln n)^{\beta}}{\Gamma(-\alpha)} \varrho^{-n};$$

pre všetky $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $n \to \infty$ napokon

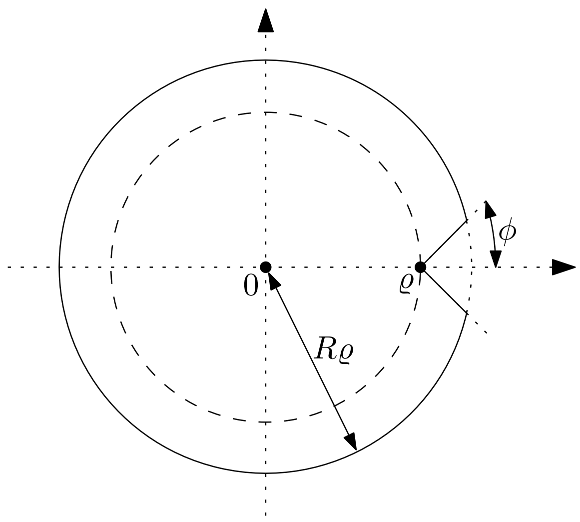
$$[z^n] \left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha} \left(\frac{\varrho}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1 - \frac{z}{\varrho}} \right)^{\beta} \sim n^{-\alpha-1} (\ln n)^{\beta-1} \beta \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{1}{\Gamma(s)} \right]_{s=-\alpha} \varrho^{-n}.$$

Dôkaz. Vyplýva z viet 6.2.2, 6.2.4 a 6.2.5 a zo skutočnosti, že pre všetky funkcie $f(z) \in \mathbf{H}_0$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ je $[z^n]f(z) = \varrho^{-n}[z^n]f(\varrho z)$. □

6.3 Vety o transfere

Budeme sa teraz zaoberať *vetami o transfere*, ktoré – spoločne s asymptotickými odhadmi pre koeficienty Maclaurinových radov funkcií štandardnej triedy odvodenými v predchádzajúcom oddiele – tvoria základ metódy analýzy singularít. Stále pritom zostávame pri základnom variante, kde skúmané funkcie $f(z) \in \mathbf{H}_0 \cap \mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$ majú jedinú dominantnú singularitu, nutne rovnú polomeru konvergencie Maclaurinovho radu. Dokázaním viet o transfere získame posledný nástroj potrebný na plnohodnotné použitie metódy analýzy singularít pre takéto vytvárajúce funkcie.

Pod *vetou o transfere* rozumieme, v kontexte analytickej kombinatoriky a v prípade jedinej dominantnej singularity, tvrdenie umožňujúce asymptoticky odhadnúť koeficienty Maclaurinovho radu funkcie $f(z)$ koeficientmi Maclaurinovho radu nejakej inej funkcie $g(z)$, ktorá patrí do štandardnej triedy. Možno tak urobiť za predpokladu, že funkciu $f(z)$ samotnú možno asymptoticky odhadnúť funkciou $g(z)$, a to na nejakej vhodnej časti okolia dominantnej singularity $\varrho > 0$ funkcie $g(z)$ pre $z \to \varrho$. Použitie takejto vety v procese analýzy singularít sme si už vysvetlili v oddiele 6.1: zanedbateľný člen singulárneho rozvoja analyzovanej funkcie sa – v prípade, že spĺňa predpoklady vety o transfere – priamo „preloží“ na zanedbateľný člen asymptotického rozvoja pre koeficienty analyzovanej funkcie.



Obr. 6.4: Δ-obor $\Delta(\varrho, R, \phi)$.

Postačujúcou podmienkou použiteľnosti viet o transfere je analytickosť uvažovanej funkcie $f(z)$ na rozrezanej komplexnej rovine $\mathbb{C} \setminus [\varrho, \infty)$. Tieto vety však možno sformulovať aj za omnoho slabšieho predpokladu na funkciu $f(z)$ – stačí jej analytickosť na tzv. Δ-obore, ktorý si teraz definujeme. Typický Δ-obor je znázornený na obrázku 6.4 – ide o mierne „zväčšené“ okolie $D(0, \varrho)$ neobsahujúce bod ϱ, ktoré možno vytvoriť odstránením vhodného výseku z okolia $D(0, R\varrho)$ pre nejaké $R > 1$.

Definícia 6.3.1. Nech ϱ, R, ϕ sú reálne čísla také, že $\varrho > 0$, $R > 1$ a $0 < \phi < \pi/2$. Pod Δ-*oborom* $\Delta(\varrho, R, \phi)$ potom rozumieme oblasť

$$\Delta(\varrho, R, \phi) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\varrho;\ \arg(z - \varrho) \in (\phi, 2\pi - \phi)\}.$$

Pod Δ-*oborom v bode* $\varrho > 0$ rozumieme ľubovoľný Δ-obor $\Delta(\varrho, R, \phi)$ pre nejaké $R > 1$ a $0 < \phi < \pi/2$.

Podobne ako v oddiele 6.2 budeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $\varrho = 1$. Môžeme si to dovoliť, pretože pre ľubovoľnú funkciu $f(z) \in \mathbf{H}_0$ s Maclaurinovým radom o polomere konvergencie $\varrho > 0$ má funkcia $f(\varrho z)$ polomer konvergencie rovný jednej, pričom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je

$$[z^n]f(z) = \varrho^{-n}[z^n]f(\varrho z). \tag{6.16}$$

Špeciálne teda pre dvojicu funkcií $f(z), g(z) \in \mathbf{H}_0 \cap \mathbb{R}_{\geq 0}[\![z]\!]$ platí $[z^n]f(z) = O\left([z^n]g(z)\right)$ práve vtedy, keď $[z^n]f(\varrho z) = O\left([z^n]g(\varrho z)\right)$ – a podobne pre o a $\sim$.

Pripomeňme si v zjednodušenej podobe hlavné výsledky oddielu 6.2, ktorými sú asymptotické odhady pre koeficienty Maclaurinových radov funkcií štandardnej triedy: pre všetky $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, všetky $\beta \in \mathbb{C}$ a $n \to \infty$ je

$$[z^n](1 - z)^\alpha \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1 - z}\right)^\beta \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^\beta$$

a pre všetky $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $n \to \infty$ je

$$[z^n](1 - z)^\alpha \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1 - z}\right)^\beta \sim n^{-\alpha-1} (\ln n)^{\beta-1} \beta \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{1}{\Gamma(s)}\right]_{s=-\alpha}.$$

Nie je preto náhoda, že práve funkcie typu $n^{-\alpha-1} (\ln n)^\beta$ budú vystupovať aj vo vetách o transfere.

Najdôležitejším tvrdením tohto oddielu je nasledujúca *veta o O-transfere*, v ktorej sa horný asymptotický odhad spomínaný vyššie formalizuje pomocou notácie O.

Veta 6.3.2 (O O-transfere)**.** *Nech* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.[5] *Nech* $f(z)$ *je funkcia analytická na nejakom* Δ*-obore* $\Delta(1,R,\phi)$ *v bode* 1 *pre* $R > 1$ *a* $\phi \in (0, \pi/2)$. *Ak potom pre* $z \in \Delta(1,R,\phi)$ *a* $z \to 1$ *je*

$$f(z) = O\left((1-z)^{\alpha}\left(\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^{\beta}\right), \tag{6.17}$$

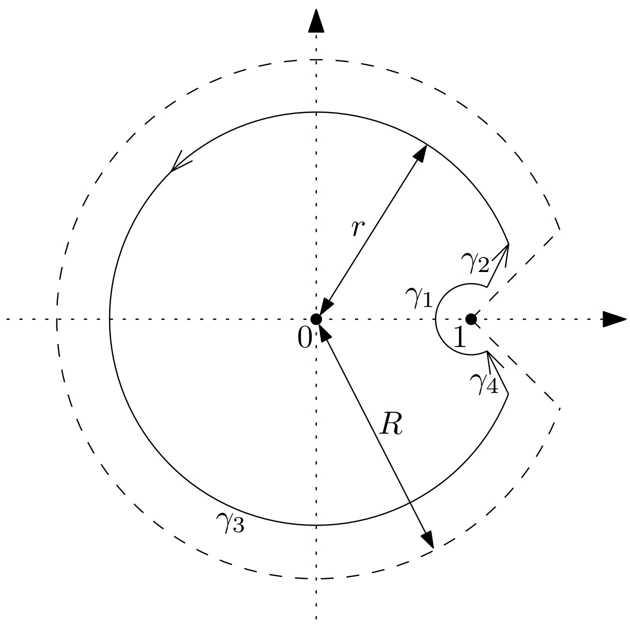
tak pre $n \to \infty$ *je*

$$[z^n]f(z) = O\left(n^{-\alpha-1}(\ln n)^{\beta}\right).$$

Dôkaz. Nech r, θ sú reálne čísla také, že $1 < r < R$ a $\phi < \theta < \pi/2$. Môžeme predpokladať, že n je dostatočne veľké nato, aby bolo $1/n < r - 1$. Nech ν je uhol $0 < \nu < \pi/2$ taký, že $\arg(re^{i\nu} - 1) = \theta$ a nech γ je krivka daná ako $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, kde

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &:= -\kappa_{[\theta, 2\pi-\theta]}(1, 1/n),\\
\gamma_2 &:= [1 + (1/n)e^{i\theta}, re^{i\nu}],\\
\gamma_3 &:= \kappa_{[\nu, 2\pi-\nu]}(0, r),\\
\gamma_4 &:= [re^{i(2\pi-\nu)}, 1 + (1/n)e^{i(2\pi-\theta)}].
\end{aligned}$$

Táto krivka γ je znázornená aj na obrázku 6.5.



Obr. 6.5: Krivka γ (plnou čiarou) v Δ-obore $\Delta(1,R,\phi)$ (čiarkovane). Polomer malého oblúku kružnice je $1/n$. Úsečky γ_2 resp. γ_4 zvierajú s kladnou reálnou osou uhol θ, úsečky hranice Δ-oboru s ňou zvierajú uhol ϕ.

Zjavne $0 \in \mathbf{I}(\gamma)$ a $\gamma^* \subseteq \Delta(1,R,\phi)$. Z Cauchyho integrálneho vzorca pre koeficienty Maclaurinovho radu tak dostávame

$$[z^n]f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Inými slovami: $[z^n]f(z) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, kde pre $k = 1, \dots, 4$ je

$$I_k := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Na dôkaz vety stačí vhodne zhora odhadnúť tieto štyri integrály.

[5] Predpoklad reálnosti čísel α, β tu nie je obmedzujúci, pretože pri asymptotických odhadoch sa berie do úvahy len absolútna hodnota funkcie.

Začnime integrálom pozdĺž malého oblúku γ_1. Dĺžka tohto oblúku je určite nanajvýš $2\pi/n$, pričom pre všetky $z \in \gamma_1^*$ je

$$|1-z| = \frac{1}{n}$$

a pre $n \to \infty$ je

$$\left|\frac{1}{z^{n+1}}\right| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n-1} \to e.$$

Z vety o odhade preto pre vhodné $C > 0$ a všetky dostatočne veľké n dostávame

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot C \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{|\beta|} \cdot (\ln n)^{\beta} \cdot (e+1)$$

a pre $n \to \infty$ tak

$$|I_1| = O\left(n^{-\alpha-1} (\ln n)^{\beta}\right). \tag{6.18}$$

Uvažujme teraz úsečku γ_2 (pričom rovnakú argumentáciu by sme mohli použiť aj pre úsečku γ_4). Predpoklad (6.17) znamená, že existujú čísla $\delta > 0$ a $C > 0$ také, že pre všetky $z \in \Delta(1, R, \phi) \cap \overline{D}(1, \delta)$ je

$$|f(z)| \leq C \left|(1-z)^{\alpha} \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z}\right)^{\beta}\right|. \tag{6.19}$$

Bez ujmy na všeobecnosti budeme predpokladať, že $\delta < \min\{1, r-1\}$. Číslo δ ďalej nezávisí od n, pričom môžeme predpokladať, že n je dostatočne veľké nato, aby platila nerovnosť $1/n < \delta$. Pre takéto dostatočne veľké n možno úsečku γ_2 rozdeliť na dve časti ako $\gamma_2 = \gamma_{2,1} + \gamma_{2,2}$, kde $\gamma_{2,1}^* \subseteq \overline{D}(1, \delta)$ a $\gamma_{2,2}^* \subseteq \Delta(1, R, \phi) \setminus D(1, \delta)$. Absolútna hodnota analytickej – a tým pádom aj nutne spojitej – funkcie $f(z)$ musí byť na kompaktnej množine $\gamma_{2,2}^*$ zhora ohraničená nejakou konštantou $M \geq 0$. Keďže na tejto úsečke je $|z| \geq 1 + \varepsilon$ pre nejaké $\varepsilon > 0$ nezávislé od n, z vety o odhade pre integrál

$$I_{2,2} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2,2}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

ihneď dostávame

$$|I_{2,2}| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2,2}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z\right| \leq \frac{M}{2\pi} (1+\varepsilon)^{-n-1} L(\gamma_{2,2}) \leq \frac{Mr}{2\pi} (1+\varepsilon)^{-n-1} = O\left(n^{-\alpha-1} (\ln n)^{\beta}\right). \tag{6.20}$$

Úsečka $\gamma_{2,1}$ je daná ako $\gamma_{2,1} = [1 + (1/n)e^{i\theta}, 1 + \delta e^{i\theta}]$ a možno ju parametrizovať ako $\gamma_{2,1} \colon [1, n\delta] \to \mathbb{C}$, kde pre všetky $t \in [1, n\delta]$ je $\gamma_{2,1}(t) = 1 + (t/n)e^{i\theta}$. Preto

$$I_{2,1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2,1}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_1^{n\delta} f\left(1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right) \left(1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right)^{-n-1} \frac{e^{i\theta}}{n} \, \mathrm{d}t.$$

Z vety o odhade teda

$$\begin{aligned}
|I_{2,1}| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{2,1}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z\right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_1^{n\delta} \left|f\left(1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right)\right| \cdot \left|1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right|^{-n-1} \cdot \frac{1}{n} \, \mathrm{d}t \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_1^{n\delta} \left|f\left(1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right)\right| \operatorname{Re}\left(1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right)^{-n-1} \frac{1}{n} \, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_1^{n\delta} \left|f\left(1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right)\right| \left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \frac{1}{n} \, \mathrm{d}t = \\
&= I_{2,1,1} + I_{2,1,2},
\end{aligned}$$

kde – za predpokladu, že n je dostatočne veľké nato, aby bolo $(\ln n)^2 < n\delta$ –

$$I_{2,1,1} := \frac{1}{2\pi} \int_1^{(\ln n)^2} \left| f\left(1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right)\right| \left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}t$$

a

$$I_{2,1,2} := \frac{1}{2\pi} \int_{(\ln n)^2}^{n\delta} \left| f\left(1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}\right)\right| \left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}t.$$

Odhadneme teraz tieto dva integrály.

Pre integrál $I_{2,1,1}$ vďaka (6.19) pre dostatočne veľké n dostávame

$$\begin{aligned} I_{2,1,1} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_1^{(\ln n)^2} C \left| \left(-\frac{t}{n} e^{i\theta}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}} \operatorname{Ln}\left(-\frac{n}{t} e^{-i\theta}\right)\right)^{\beta} \right| \left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}t \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_1^{(\ln n)^2} C \left| \left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha} (1+\delta)^{|\beta|} \left(\ln n - \ln t + i(\pi - \theta)\right)^{\beta} \right| \left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}t \leq \\ &\leq \frac{C'}{2\pi} n^{-\alpha-1} (\ln n)^{\beta} \int_1^{(\ln n)^2} t^{\alpha} \left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{6.21}$$

kde $C' > 0$ je vhodná konštanta. Podobne integrál $I_{2,1,2}$ môžeme odhadnúť ako

$$\begin{aligned} I_{2,1,2} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{(\ln n)^2}^{n\delta} C \left| \left(-\frac{t}{n} e^{i\theta}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{n} e^{i\theta}} \operatorname{Ln}\left(-\frac{n}{t} e^{-i\theta}\right)\right)^{\beta} \right| \left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}t \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{(\ln n)^2}^{n\delta} C'' n \left| \left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha} \right| \left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}t \leq \\ &\leq \frac{C''}{2\pi} n^{-\alpha} \int_{(\ln n)^2}^{n\delta} t^{\alpha} \left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{6.22}$$

kde $C'' > 0$ je vhodná konštanta. Pre $n \to \infty$ teraz asymptoticky odhadneme integrály na pravých stranách (6.21) a (6.22).

Za účelom asymptotického odhadu oboch týchto integrálov môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $\delta \leq 1/(4\cos\theta)$. Pre všetky $t \in [1, \delta n]$ totiž v takom prípade

$$0 \leq \frac{t\cos\theta}{n} \leq \frac{\delta n \cos\theta}{n} \leq \frac{1}{4},$$

pričom pre všetky $u \in [0, 1/4]$ je $1 + u \geq e^{u/2}$, a teda aj $\ln(1+u) \geq u/2$. To znamená, že pre všetky $t \in [1, \delta n]$ je

$$\ln\left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right) \geq \frac{t\cos\theta}{2n},$$

z čoho

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} &\leq (1+\delta)\left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n} \leq (1+\delta)\exp\left(-n\ln\left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)\right) \leq \\ &(1+\delta)\exp\left(-n\frac{t\cos\theta}{2n}\right) = (1+\delta)\exp\left(-\frac{t\cos\theta}{2}\right). \end{aligned} \tag{6.23}$$

Keďže na pravej strane (6.22) integrujeme cez $t \in [(\ln n)^2, \delta n]$, musí pre takéto t vďaka (6.23) byť

$$\left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \leq (1+\delta)\exp\left(-\frac{\cos\theta}{2}(\ln n)^2\right)$$

a pre $n \to \infty$ môžeme integrál z (6.22) odhadnúť ako

$$\begin{aligned}\int_{(\ln n)^2}^{n\delta} t^{\alpha}\left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}t &\leq \int_{(\ln n)^2}^{n\delta} n^{|\alpha|}(1+\delta)\exp\left(-\frac{\cos\theta}{2}(\ln n)^2\right) \mathrm{d}t = \\ &= \left(n\delta - (\ln n)^2\right) n^{|\alpha|}(1+\delta)\exp\left(-\frac{\cos\theta}{2}(\ln n)^2\right) = O\left(n^{-2}\right).\end{aligned}$$

Pre integrál $I_{2,1,2}$ a $n \to \infty$ teda dostávame

$$I_{2,1,2} \leq \frac{C''}{2\pi} n^{-\alpha} \int_{(\ln n)^2}^{n\delta} t^{\alpha}\left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}t = O\left(n^{-\alpha-2}\right).$$

Odhadnime ešte integrál na pravej strane (6.21). Tu vďaka (6.23) pre $n \to \infty$ dostávame

$$\begin{aligned}\int_1^{(\ln n)^2} t^{\alpha}\left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}t &\leq (1+\delta)\int_1^{(\ln n)^2} t^{|\alpha|} e^{-(t\cos\theta)/2}\,\mathrm{d}t = \\ &= (1+\delta)\int_{(\cos\theta)/2}^{(\ln n)^2(\cos\theta)/2} \left(\frac{2x}{\cos\theta}\right)^{|\alpha|} e^{-x}\frac{2}{\cos\theta}\,\mathrm{d}x = \\ &= (1+\delta)\left(\frac{2}{\cos\theta}\right)^{|\alpha|+1} \int_{(\cos\theta)/2}^{(\ln n)^2(\cos\theta)/2} x^{|\alpha|}e^{-x}\,\mathrm{d}x \leq \\ &\leq (1+\delta)\left(\frac{2}{\cos\theta}\right)^{|\alpha|+1} \int_0^{\infty} x^{|\alpha|}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \\ &= (1+\delta)\left(\frac{2}{\cos\theta}\right)^{|\alpha|+1} \Gamma\left(|\alpha|+1\right) = O(1),\end{aligned}$$

z čoho pre integrál $I_{2,1,1}$ vyplýva odhad

$$I_{2,1,1} \leq \frac{C'}{2\pi} n^{-\alpha-1}(\ln n)^{\beta} \int_1^{(\ln n)^2} t^{\alpha}\left(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}t = O\left(n^{-\alpha-1}(\ln n)^{\beta}\right).$$

Možeme teda uzavrieť, že

$$|I_2| = |I_{2,1}| + |I_{2,2}| \leq I_{2,1,1} + I_{2,1,2} + |I_{2,2}| = O\left(n^{-\alpha-1}(\ln n)^{\beta}\right) \tag{6.24}$$

a obdobným spôsobom možno dokázať aj odhad

$$|I_4| = O\left(n^{-\alpha-1}(\ln n)^{\beta}\right) \tag{6.25}$$

Zostáva odhadnúť integrál pozdĺž veľkého oblúku γ_3. Pre všetky $z \in \gamma_3^*$ ale

$$\left|\frac{1}{z^{n+1}}\right| = r^{-n-1},$$

pričom $r > 1$. Spojitá funkcia $f(z)$ musí navyše byť na kompaktnej množine γ_3^* v absolútnej hodnote ohraničená nejakou konštantou $M' \geq 0$ a dĺžku krivky γ_3 možno zhora odhadnúť konštantou $2\pi r$. Z vety o odhade preto pre $n \to \infty$ dostávame

$$|I_3| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{1}{2\pi} M' r^{-n-1} 2\pi r = O(r^{-n}) = O\left(n^{-\alpha-1}(\ln n)^{\beta}\right). \tag{6.26}$$

V tomto momente už len stačí sčítať dohromady jednotlivé odhady (6.18), (6.24), (6.25) a (6.26) – veta je dokázaná. □

Analogicky k vete o O-transfere možno vysloviť aj *vetu o o-transfere*, ktorej dôkaz je len drobnou variáciou dôkazu vety 6.3.2.

Veta 6.3.3 (O o-transfere)**.** *Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nech $f(z)$ je funkcia analytická na nejakom Δ-obore $\Delta(1, R, \phi)$ v bode 1 pre $R > 1$ a $\phi \in (0, \pi/2)$. Ak potom pre $z \in \Delta(1, R, \phi)$ a $z \to 1$ je*

$$f(z) = o\left((1-z)^{\alpha}\left(\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^{\beta}\right), \tag{6.27}$$

tak pre $n \to \infty$ je

$$[z^n]f(z) = o\left(n^{-\alpha-1}(\ln n)^{\beta}\right).$$

Dôkaz. Stačí jemne pozmeniť argumentáciu z dôkazu vety 6.3.2. Pri analýze integrálov pozdĺž kriviek $\gamma_{2,2}$ a γ_3 stačí len zmeniť O na o. Pri krivkách γ_1 a $\gamma_{2,1}$ sa namiesto odhadu (6.19), podľa ktorého je

$$|f(z)| \leq C\left|(1-z)^{\alpha}\left(\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^{\beta}\right|$$

pre *nejaké* $C > 0$ použije ten istý odhad pre *všetky* $C > 0$, ktorý je dôsledkom predpokladu (6.27). Pri krivke γ_1 potom rovnakým postupom ako v dôkaze vety 6.3.2 pre $n \to \infty$ dostaneme

$$|I_1| = o\left(n^{-\alpha-1}(\ln n)^{\beta}\right).$$

Pri krivke $\gamma_{2,1}$ získame

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{2,1}}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \leq I_{2,1,1} + I_{2,1,2},$$

kde

$$I_{2,1,1} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{(\ln n)^2} C\left|\left(-\frac{t}{n}e^{i\theta}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{n}e^{i\theta}}\operatorname{Ln}\left(-\frac{n}{t}e^{-i\theta}\right)\right)^{\beta}\right|\left(1+\frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}t$$

a

$$I_{2,1,2} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{(\ln n)^2}^{n\delta} C\left|\left(-\frac{t}{n}e^{i\theta}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{n}e^{i\theta}}\operatorname{Ln}\left(-\frac{n}{t}e^{-i\theta}\right)\right)^{\beta}\right|\left(1+\frac{t\cos\theta}{n}\right)^{-n-1}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}t$$

pre *všetky* $C > 0$. Zvyšok argumentácie je obdobný ako v dôkaze vety 6.3.2. □

Nasledujúca *veta o $\sim$-transfere* platí iba za o niečo silnejších predpokladov, než vyššie – na rozdiel od predchádzajúcich dvoch viet sa totiž v tejto vete nepripúšťa možnosť $\alpha \in \mathbb{N}$. To je dané skutočnosťou, že pre takéto α sa – ako sme videli v rámci oddielu 6.2 – koeficienty Maclaurinových radov funkcií

$$(1-z)^{\alpha}\left(\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^{\beta}$$

správajú trochu odlišne ako pre zvyšné $\alpha \in \mathbb{R}$.

Veta 6.3.4 (O $\sim$-transfere)**.** *Nech $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ a $\beta \in \mathbb{R}$. Nech $f(z)$ je funkcia analytická na nejakom Δ-obore $\Delta(1, R, \phi)$ v bode 1 pre $R > 1$ a $\phi \in (0, \pi/2)$. Ak potom pre $z \in \Delta(1, R, \phi)$ a $z \to 1$ je*

$$f(z) \sim (1-z)^{\alpha}\left(\frac{1}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^{\beta}, \tag{6.28}$$

tak pre $n \to \infty$ je

$$[z^n]f(z) \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}(\ln n)^{\beta}.$$

Dôkaz. Odhad (6.28) platí práve vtedy, keď

$$f(z) = (1-z)^\alpha \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z}\right)^\beta + g(z),$$

kde pre $z \in \Delta(1, R, \phi)$ a $z \to 1$ je

$$g(z) = o\left((1-z)^\alpha \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z}\right)^\beta\right).$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ teraz

$$[z^n]f(z) = [z^n]\left((1-z)^\alpha \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z}\right)^\beta\right) + [z^n]g(z). \tag{6.29}$$

Z vety o koeficientoch Maclaurinových radov funkcií štandardnej triedy ale pre $n \to \infty$ vyplýva

$$[z^n]\left((1-z)^\alpha \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z}\right)^\beta\right) \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^\beta,$$

čo je to isté ako

$$[z^n]\left((1-z)^\alpha \left(\frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z}\right)^\beta\right) = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^\beta + o\left(n^{-\alpha-1} (\ln n)^\beta\right).$$

Z vety 6.3.3 ďalej

$$[z^n]g(z) = o\left(n^{-\alpha-1} (\ln n)^\beta\right).$$

Dosadením do (6.29) teda dostávame

$$[z^n]f(z) = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^\beta + o\left(n^{-\alpha-1} (\ln n)^\beta\right),$$

čiže

$$[z^n]f(z) \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^\beta,$$

čo bolo treba dokázať. □

Pre úplnosť ešte sformulujme dôsledok viet 6.3.2, 6.3.3 a 6.3.4, ktorý je adaptáciou práve dokázaných viet o transfere na prípad funkcií s kladným reálnym polomerom konvergencie rôznym od 1.

Dôsledok 6.3.5. *Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\varrho > 0$. Nech $f(z)$ je analytická na nejakom Δ-obore $\Delta(\varrho, R, \phi)$ v bode ϱ pre $R > 1$ a $\phi \in (0, \pi/2)$. Potom:*

(i) *Ak pre $z \in \Delta(\varrho, R, \phi)$ a $z \to \varrho$ je*

$$f(z) = O\left(\left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)^\alpha \left(\frac{\varrho}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-\frac{z}{\varrho}}\right)^\beta\right),$$

tak pre $n \to \infty$ je

$$[z^n]f(z) = O\left(\varrho^{-n} n^{-\alpha-1} (\ln n)^\beta\right).$$

(*ii*) *Ak pre* $z \in \Delta(\varrho, R, \phi)$ *a* $z \to \varrho$ *je*

$$f(z) = o\left(\left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha}\left(\frac{\varrho}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-\frac{z}{\varrho}}\right)^{\beta}\right),$$

tak pre $n \to \infty$ *je*

$$[z^n]f(z) = o\left(\varrho^{-n}n^{-\alpha-1}(\ln n)^{\beta}\right).$$

(*iii*) *Ak* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *a pre* $z \in \Delta(\varrho, R, \phi)$ *a* $z \to \varrho$ *je*

$$f(z) \sim \left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)^{\alpha}\left(\frac{\varrho}{z}\operatorname{Ln}\frac{1}{1-\frac{z}{\varrho}}\right)^{\beta},$$

tak pre $n \to \infty$ *je*

$$[z^n]f(z) \sim \frac{\varrho^{-n}n^{-\alpha-1}(\ln n)^{\beta}}{\Gamma(-\alpha)}.$$

Dôkaz. Vyplýva z viet 6.3.2, 6.3.3 a 6.3.4, vzťahu (6.16) a skutočnosti, že funkcia $f(z)$ je analytická na $\Delta(\varrho, R, \phi)$ práve vtedy, keď $f(\varrho z)$ je analytická na $\Delta(1, R, \phi)$. $\square$

Literatúra

[1] Cameron, P. J.: *Notes on Counting: An Introduction to Enumerative Combinatorics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

[2] Flajolet, P.; Odlyzko, A.: Singularity Analysis of Generating Functions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, ročník 3, č. 2, 1990: s. 216–240.

[3] Flajolet, P.; Sedgewick, R.: *Analytic Combinatorics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[4] Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 2.* New York: John Wiley & Sons, 1977.

[5] Kostolányi, P.: Komplexná analýza pre informatikov. 2023.
URL `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~kostolanyi/ka/skripta.pdf`

[6] Kostolányi, P.: Neštruktúrované rozpravy o štruktúrach: kapitoly z matematiky pre informatikov 1. 2023.
URL `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~kostolanyi/nestruktury/skripta.pdf`

[7] Mariconda, C.; Tonolo, A.: *Discrete Calculus.* Cham: Springer, 2016.

[8] Matoušek, J.; Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Karolinum: Praha, tretie vydanie, 2007.

[9] Niven, I.: Formal Power Series. *The American Mathematical Monthly*, ročník 76, č. 8, 1969: s. 871–889.

[10] Stanley, R. P.: *Enumerative Combinatorics, Vol. 2.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[11] Stanley, R. P.: *Catalan Numbers.* Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

[12] Titchmarsh, E. C.: *The Theory of Functions.* Oxford: Oxford University Press, druhé vydanie, 1976.

[13] Wilf, H. S.: *generatingfunctionology.* New York: Academic Press, druhé vydanie, 1994.