Prvá sada domácich úloh

1. Charakterizujte všetky postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ prirodzených čísel také, že zodpovedajúcu *obyčajnú* vytvárajúcu funkciu $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{N}[[z]]$ možno interpretovať aj ako *celú* funkciu $A(z) \in \mathbb{N}(\!(z)\!)$ (t.j. $A(z)$ má nekonečný polomer konvergencie).

2. Porovnajte triedu postupností z predchádzajúcej úlohy s triedou všetkých postupností $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ prirodzených čísel takých, že zodpovedajúca *exponenciálna* vytvárajúca funkcia

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \in \mathbb{R}_{\geq 0}[[z]]$$

   je celá.

3. Dokážte alebo vyvráťte: reálna dominantná singularita obyčajnej vytvárajúcej funkcie analytickej v bode 0 – čiže funkcie $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{N}(\!(z)\!)$ – môže byť ľubovoľne veľká.

4. Nech Σ je (konečná) abeceda. Obyčajnou vytvárajúcou funkciou jazyka $L \subseteq \Sigma^*$ nazveme rad $R_L(z) = \sum_{w \in L} z^{|w|} \in \mathbb{N}[[z]]$; pre všetky $n \in \mathbb{N}$ udáva koeficient $[z^n]R_L(z)$ počet slov dĺžky n v jazyku L. Nájdite všetky jazyky L také, že:

   a) $R_L(z) \in \mathbb{N}(\!(z)\!)$,
   b) $R_L(z) \in \mathbb{N}(\!(z)\!)$ je celá.