

Druhá sada domácich úloh

1. S použitím metódy analýzy singularít nájdite asymptotický odhad pre koeficienty funkcie

$$f(z) = e^{1 - \sqrt[3]{1-3z}}.$$

2. Na úvodnej prednáške sme dali do súvisu s Catalanovými číslami počet všetkých zakorenených stromov o n vrchoch a s usporiadaním synov jednotlivých vrcholov. Odvoďte asymptotický odhad pre počet takýchto stromov s použitím symbolickej metódy a metódy analýzy singularít. Vysvetlite zdanlivo paradoxnú skutočnosť, že počet všetkých takýchto stromov o n vrchoch je menší, než počet všetkých binárnych stromov o n vrchoch.
3. Pre $n \rightarrow \infty$ asymptoticky vyčíslite počet všetkých unárno-binárnych stromov o n vrchoch takých, že synom každého unárneho vrcholu je buď binárny vrchol, alebo list.
4. Pre $n \rightarrow \infty$ asymptoticky vyčíslite počet všetkých binárnych vyhľadávacích stromov na množine kľúčov $\{1, \dots, n\}$.
5. Pre prirodzené $k \geq 1$ uvažujme Dyckov jazyk D_k pozostávajúci zo všetkých dobrých uzátvorení zátvoriek k typov. S použitím metódy analýzy singularít asymptoticky (pre $n \rightarrow \infty$) vyčíslite počet slov v jazyku D_k obsahujúcich presne n ľavých zátvoriek. Popíšte tiež, ako možno pomocou elementárnych metód prísť k presnému výsledku (so znalosťou faktu, že počet takýchto slov v D_1 je presne C_n).
6. Nájdite hodnotu, ku ktorej sa pre $n \rightarrow \infty$ limitne blíži pravdepodobnosť, že náhodne zvolená permutácia množiny $\{1, \dots, n\}$ neobsahuje žiaden cyklus dĺžky presne 4.