Cvičenie č. 4
Bezkontextové gramatiky (2. časť)

Peter Kostolányi

12. októbra 2022

1 Normálne tvary bezkontextových gramatík

Vetou o normálnom tvare bezkontextových gramatík možno nazvať prakticky ľubovoľné tvrdenie, podľa ktorého ku každej alebo „skoro každej" bezkontextovej gramatike G existuje ekvivalentná alebo „takmer ekvivalentná" gramatika G' s nejakou špeciálnou vlastnosťou.

Poznámka 1. Normálne tvary možno, samozrejme, študovať aj pre iné objekty ako gramatiky. Jediným predpokladom je, aby na danej triede objektov X bola definovaná relácia ekvivalencie $\sim$. Veta o normálnom tvare potom vždy pre nejakú triedu $Y \subseteq X$ hovorí, že pre každé $x \in X$ existuje $y \in Y$ také, že $y \sim x$.

V našom prípade je touto triedou X trieda všetkých bezkontextových gramatík, pričom pre dvojicu bezkontextových gramatík G, G' je $G \sim G'$ práve vtedy, keď $L(G) = L(G')$.

Normálne tvary bezkontextových gramatík je užitočné skúmať predovšetkým z nasledujúcich dvoch dôvodov.

- Predpoklad normálneho tvaru môže často uľahčiť dôkazy tvrdení o bezkontextových jazykoch. Ak totiž namiesto všeobecných bezkontextových gramatík uvažujeme iba gramatiky v normálnom tvare, môže sa podstatne zjednodušiť argumentácia. Dôležitá je pritom predovšetkým skutočnosť, že ekvivalentná gramatika v normálnom tvare vždy *existuje*; algoritmus na prevod do normálneho tvaru je tu menej podstatný, avšak zaručuje konštruktívnosť dôkazu.
- Viaceré užitočné algoritmy pracujúce s bezkontextovými gramatikami[1] predpokladajú ako svoj vstup gramatiku v nejakom normálnom tvare. Pri implementácii takýchto algoritmov sa preto môže zísť aj procedúra na prevod do požadovaného normálneho tvaru.

V nasledujúcom sa zameriame na praktickú stránku prevodu gramatík do jednotlivých normálnych tvarov. Matematické zápisy týchto konštrukcií a dôkazy ich správnosti odzneli na prednáške.

2 Redukovaný normálny tvar

Bezkontextová gramatika je *redukovaná* alebo *v redukovanom normálnom tvare*, ak neobsahuje žiadne pravidlo typu $\xi \to \xi$ a každý jej neterminál ξ je súčasne „terminujúci" (teda existuje aspoň jedno terminálne slovo odvoditeľné zo ξ) a dosiahnuteľný (v danej gramatike teda existuje vetná forma obsahujúca ξ – tá musí byť z definície odvoditeľná z počiatočného neterminálu).

Definícia 1. Bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ je v *redukovanom normálnom tvare*, ak sú splnené nasledujúce tri podmienky:

(*i*) Množina pravidiel P neobsahuje pre žiadne $\xi \in N$ pravidlo $\xi \to \xi$.

(*ii*) Pre každé $\xi \in N$ existuje terminálne slovo $w \in T^*$ také, že $\xi \Rightarrow^* w$.

(*iii*) Pre každé $\xi \in N$ existujú slová $u, v \in (N \cup T)^*$ také, že $\sigma \Rightarrow^* u\xi v$.

O *normálnom tvare* tu môžeme hovoriť vďaka nasledujúcej vete z prednášky.

Veta 1. *Nech G je bezkontextová gramatika taká, že $L(G) \neq \emptyset$. Potom existuje bezkontextová gramatika G' v redukovanom normálnom tvare taká, že $L(G') = L(G)$.*

[1] Príkladom môžu byť algoritmy, ktoré pre slovo x a gramatiku G rozhodujú, či $x \in L(G)$.

Predpoklad $L(G) \neq \emptyset$ je v predchádzajúcej vete naozaj nutný. Každá bezkontextová gramatika G totiž musí mať počiatočný neterminál σ. Pre redukovanú gramatiku G tak podľa podmienky (ii) definície 1 existuje terminálne slovo w také, že $\sigma \Rightarrow^* w$. Potom ale nutne $w \in L(G)$.

Každá z podmienok (i) až (iii) definície 1 sama o sebe určuje normálny tvar bezkontextových gramatík. V nasledujúcom najprv zosumarizujeme algoritmy na prevod gramatík do týchto „pomocných" normálnych tvarov a následne ukážeme, že použitie všetkých troch týchto algoritmov vo vhodnom poradí garantuje ako výstup gramatiku v redukovanom normálnom tvare.

2.1 Odstránenie pravidiel typu $\xi \to \xi$

Prevod bezkontextovej gramatiky do normálneho tvaru daného podmienkou (i) definície 1 spočíva jednoducho vo „vypustení" všetkých pravidiel typu $\xi \to \xi$ z množiny prepisovacích pravidiel P.

2.2 Odstránenie „neterminujúcich" neterminálov

Prevod bezkontextovej gramatiky do normálneho tvaru daného podmienkou (ii) definície 1 spočíva v nájdení množiny S všetkých „*terminujúcich*" neterminálov gramatiky a v následnom odstránení zvyšných – čiže „neterminujúcich" – neterminálov, ako aj všetkých pravidiel, v ktorých sa takéto neterminály vyskytujú. Množinu S možno pre bezkontextovú gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ formálne zapísať ako $S = \{\xi \in N \mid \exists w \in T^* \colon \xi \Rightarrow^* w\}$ a dá sa nájsť nasledujúcim algoritmom.

1. Nech $S_0 = \{\xi \in N \mid \exists u \in T^* \colon \xi \to u \in P\}$.
2. Pre $i = 1, 2, \ldots$ iteruj predpis $S_i = S_{i-1} \cup \{\xi \in N \mid \exists u \in (T \cup S_{i-1})^* \colon \xi \to u \in P\}$, až kým pre nejaké k nenastane $S_k = S_{k-1}$.
3. Polož $S = S_k$.

Množina S_0 teda pozostáva z práve tých neterminálov ξ, ktoré možno pomocou nejakého pravidla prepísať na rýdzo terminálne slovo. Pre $i = 1, \ldots, k$ následne množina S_i obsahuje všetky neterminály z množiny S_{i-1}, ako aj tie neterminály ξ, ktoré možno pomocou nejakého pravidla prepísať na slovo obsahujúce iba terminály a neterminály z S_{i-1}. Akonáhle týmto spôsobom nepribudnú žiadne nové neterminály, možno celú iteratívnu konštrukciu zastaviť.

Poznámka 2. Uvedený algoritmus sa na každom vstupe zastaví, pretože v kroku 2 sa do množiny S_i v každej iterácii okrem poslednej pridá oproti množine S_{i-1} aspoň jeden neterminál. Celkový počet neterminálov je ale konečný.

Skutočnosť, že množina S_k je naozaj hľadaná množina „terminujúcich" neterminálov, bola dokázaná na prednáške.

Poznámka 3. V kroku 2 horeuvedeného algoritmu by v skutočnosti bolo možné iterovať iba predpis $S_i = \{\xi \in N \mid \exists u \in (T \cup S_{i-1})^* \colon \xi \to u \in P\}$. Ľahko totiž vidieť, že táto množina musí obsahovať okrem iného aj všetky neterminály z S_{i-1}.

Pre gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ takú, že $L(G) \neq \emptyset$, je nájdená množina S vždy neprázdna. V takom prípade môžeme z gramatiky G odstrániť všetky neterminály z $N - S$, ako aj všetky pravidlá z P, ktorých ľavá alebo pravá strana obsahuje neterminál z $N - S$. Vo výsledku dostaneme gramatiku spĺňajúcu podmienku (ii) definície 1.

2.3 Odstránenie nedosiahnuteľných neterminálov

Prevod bezkontextovej gramatiky do normálneho tvaru daného podmienkou (iii) definície 1 spočíva v nájdení množiny H všetkých *dosiahnuteľných* neterminálov a v následnom odstránení zvyšných – čiže nedosiahnuteľných – neterminálov a prepisovacích pravidiel obsahujúcich nedosiahnuteľné neterminály. Množinu H možno pre bezkontextovú gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ formálne zapísať ako $H = \{\xi \in N \mid \exists u, v \in (N \cup T)^* \colon \sigma \Rightarrow^* u\xi v\}$ a dá sa nájsť nasledujúcim algoritmom.

1. Nech $H_0 = \{\sigma\}$.
2. Pre $i = 1, 2, \ldots$ iteruj $H_i = H_{i-1} \cup \{\xi \in N \mid \exists \eta \in H_{i-1}\ \exists u, v \in (N \cup T)^* \colon \eta \to u\xi v \in P\}$, až kým pre nejaké k nenastane $H_k = H_{k-1}$.
3. Polož $H = H_k$.

Množina H_0 teda obsahuje iba počiatočný neterminál, ktorý je ako jediný dosiahnuteľný na nula krokov. Pre $i = 1, \ldots, k$ následne množina H_i obsahuje všetky neterminály z H_{i-1}, ako aj neterminály, ktoré sa vyskytujú na pravej strane niektorého pravidla s ľavou stranou v H_{i-1}; ide tak o neterminály dosiahnuteľné na najviac i krokov. Akonáhle takto nepribudnú žiadne nové neterminály, možno iteratívnu konštrukciu ukončiť.

Poznámka 4. Zastavenie algoritmu na každom vstupe je zrejmé z rovnakých dôvodov, ako pri hľadaní „terminujúcich“ neterminálov. Správnosť algoritmu bola dokázaná na prednáške.

Poznámka 5. V kroku 2 je tentokrát zjednotenie s množinou H_{i-1} naozaj podstatné.

Množina H nájdená pre gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ je vždy neprázdna. Možno teda z gramatiky G odstrániť všetky neterminály z $N - H$ a podobne aj všetky pravidlá z P, ktorých ľavá alebo pravá strana obsahuje neterminál z $N - H$. Výsledkom tohto procesu je gramatika spĺňajúca podmienku (*ii*) definície 1.

2.4 Redukovaný normálny tvar: algoritmus

Ľubovoľnú bezkontextovú gramatiku možno previesť do redukovaného normálneho tvaru použitím nasledujúceho algoritmu.

1. Odstráň pravidlá typu $\xi \to \xi$.
2. Odstráň „neterminujúce“ neterminály (a pravidlá, ktoré ich obsahujú).
3. Odstráň nedosiahnuteľné neterminály (a pravidlá, ktoré ich obsahujú).

Správnosť uvedeného algoritmu je založená na nasledujúcich dvoch jednoduchých pozorovaniach.

a) Po odstránení „neterminujúcich“ a nedosiahnuteľných neterminálov algoritmami z predchádzajúcich pododdielov nemôže vzniknúť žiadne nové pravidlo typu $\xi \to \xi$.

b) Po odstránení nedosiahnuteľných neterminálov algoritmom z pododdielu 2.3 nemôže vzniknúť žiaden nový „neterminujúci“ neterminál.

Dôkaz obidvoch týchto tvrdení je priamočiary a prenechávame ho čitateľovi.

Poznámka 6. Poradie odstraňovania „neterminujúcich“ a nedosiahnuteľných neterminálov vo všeobecnosti nemožno vymeniť. Uvažujme napríklad gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ s $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a\}$ a $P = \{\sigma \to \alpha \mid a,\ \alpha \to \alpha\beta,\ \beta \to a\}$. Táto neobsahuje žiadne pravidlo typu $\xi \to \xi$ – odstraňovaním takýchto pravidiel sa teda zapodievať nemusíme.

Použitím horeuvedeného algoritmu dostávame redukovanú gramatiku $G' = (N', T', P', \sigma')$, kde $N' = \{\sigma\}$, $T' = T$, $P' = \{\sigma \to a\}$ a $\sigma' = \sigma$.

Skúsme teraz aplikovať opačný postup a uvažujme najprv dosiahnuteľnosť neterminálov. Dostávame $H_0 = \{\sigma\}$, $H_1 = \{\sigma, \alpha\}$ a $H_2 = \{\sigma, \alpha, \beta\} = H_3 = H$ – všetky neterminály sú teda dosiahnuteľné. Zamerajme sa teraz na „terminujúce“ neterminály. Dostávame $S_0 = \{\sigma, \beta\} = S_1 = S$. Na konci celého procesu teda prichádzame ku gramatike s množinou neterminálov $N' = \{\sigma, \beta\}$ a množinou pravidiel $P' = \{\sigma \to a,\ \beta \to a\}$. Tá celkom očividne *nie je* v redukovanom normálnom tvare. Po odstránení „neterminujúcich“ neterminálov sa totiž môžu niektoré pôvodne dosiahnuteľné neterminály stať nedosiahnuteľnými.

Odstraňovanie pravidiel typu $\xi \to \xi$ naopak možno robiť aj uprostred alebo na konci celého algoritmu, ako by čitateľ istotne ľahko dokázal.

2.5 Riešená úloha

Úloha 1. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to \alpha\alpha \mid \sigma \mid a\sigma \\ \alpha &\to \gamma b \mid aa \mid \varepsilon \\ \beta &\to b\beta \mid b \\ \gamma &\to a\gamma \mid a\gamma\gamma\}. \end{aligned}$$

Štandardnou konštrukciou preveďte gramatiku G do redukovaného normálneho tvaru.

Riešenie. Jediným pravidlom typu $\xi \to \xi$ je v gramatike G pravidlo $\sigma \to \sigma$. Po jeho odstránení dostávame gramatiku s prepisovacími pravidlami

$$\begin{aligned} \sigma &\to \alpha\alpha \mid a\sigma, \\ \alpha &\to \gamma b \mid aa \mid \varepsilon, \\ \beta &\to b\beta \mid b, \\ \gamma &\to a\gamma \mid a\gamma\gamma. \end{aligned}$$

Nájdeme teraz množinu „terminujúcich" neterminálov S:

1. $S_0 = \{\alpha, \beta\}$,
2. $S_1 = S_0 \cup \{\sigma, \alpha, \beta\} = \{\sigma, \alpha, \beta\}$,
3. $S_2 = S_1 \cup \{\sigma, \alpha, \beta\} = \{\sigma, \alpha, \beta\} = S_1$.

Teda $S = S_2 = \{\sigma, \alpha, \beta\}$. Po odstránení „neterminujúcich" neterminálov – v tomto prípade iba neterminálu γ – dostávame gramatiku s prepisovacími pravidlami

$$\begin{aligned} \sigma &\to \alpha\alpha \mid a\sigma, \\ \alpha &\to aa \mid \varepsilon, \\ \beta &\to b\beta \mid b. \end{aligned}$$

Nakoniec nájdeme množinu dosiahnuteľných neterminálov H:

1. $H_0 = \{\sigma\}$,
2. $H_1 = H_0 \cup \{\sigma, \alpha\} = \{\sigma, \alpha\}$,
3. $H_2 = H_1 \cup \{\sigma, \alpha\} = \{\sigma, \alpha\} = H_1$.

Teda $H = H_2 = \{\sigma, \alpha\}$. Po odstránení nedosiahnuteľných neterminálov – v tomto prípade iba neterminálu β – dostávame gramatiku $G' = (N', T', P', \sigma')$ s $N' = \{\sigma, \alpha\}$, $T' = \{a, b\}$, $\sigma' = \sigma$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to \alpha\alpha \mid a\sigma \\ \alpha &\to aa \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Gramatika G' je v redukovanom normálnom tvare. $\square$

3 Chomského normálny tvar

Chomského normálny tvar umožňuje bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že sa v každom kroku odvodenia bezkontextovej gramatiky prepíše niektorý neterminál na dva neterminály, na jeden terminál, alebo na prázdne slovo.

Definícia 2. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Gramatika G je v *Chomského normálnom tvare*, ak $P \subseteq N \times (N^2 \cup T \cup \{\varepsilon\})$.

O *normálnom tvare* môžeme hovoriť vďaka nasledujúcej vete, ktorá bola dokázaná na prednáške.

Veta 2. *Nech G je bezkontextová gramatika. Potom existuje bezkontextová gramatika G' v Chomského normálnom tvare taká, že $L(G') = L(G)$.*

Vstupom nasledujúceho algoritmu na prevod do Chomského normálneho tvaru je ľubovoľná bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$.

1. Pre každý terminál $c \in T$ zaveď nový[2] neterminál ξ_c a pravidlo $\xi_c \to c$.
2. Nahraď vo všetkých pravidlách $\alpha \to x \in P$ – teda v tých pravidlách, *ktoré sa vyskytovali aj v pôvodnej gramatike G* – všetky terminály $c \in T$ neterminálom ξ_c. Nech $G_1 = (N_1, T, P_1, \sigma)$ je výsledná gramatika.

Pravá strana každého pravidla gramatiky G_1 pozostáva z jedného terminálu, z prázdneho slova, alebo z neprázdneho slova zloženého iba z neterminálov. V nasledujúcich krokoch už iba zabezpečíme, aby v prípade neprázdneho slova zloženého z neterminálov bola jeho dĺžka rovná dvom.

3. Zaveď nový neterminál ξ_ε a pravidlo $\xi_\varepsilon \to \varepsilon$. Všetky pravidlá $\alpha \to \beta \in P_1$, kde $\alpha, \beta \in N_1$, nahraď pravidlom $\alpha \to \beta\xi_\varepsilon$. Nech $G_2 = (N_2, T, P_2, \sigma)$ je výsledná gramatika.

Gramatika G_2 obsahuje iba prepisovacie pravidlá, ktoré majú na pravej strane jeden terminál, prázdne slovo, alebo slovo dĺžky aspoň dva pozostávajúce iba z neterminálov. V záverečnom kroku teda stačí ošetriť „príliš dlhé“ slová na pravej strane.

4. Pre každé pravidlo $\pi = (\alpha \to \beta_1\beta_2 \dots \beta_k) \in P_2$ s $k > 2$ a $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_k \in N_2$:
   - 4.1 Zaveď nové neterminály $\psi_{\pi,1}, \dots, \psi_{\pi,k-2}$.
   - 4.2 Odober pôvodné pravidlo $\alpha \to \beta_1\beta_2 \dots \beta_k$.
   - 4.3 Pridaj nové pravidlá $\alpha \to \beta_1\psi_{\pi,1}, \psi_{\pi,1} \to \beta_2\psi_{\pi,2}, \dots, \psi_{\pi,k-2} \to \beta_{k-1}\beta_{k-2}$.

   Nech $G' = (N', T, P', \sigma)$ je výsledná gramatika.

Výsledná gramatika G' je evidentne vždy v Chomského normálnom tvare a na prednáške bolo dokázané, že $L(G') = L(G)$.

Poznámka 7. Uvedený algoritmus nie je optimálny: napríklad všetky pravidlá $\alpha \to c$, $c \in T$, pôvodnej gramatiky (ktoré Chomského normálny tvar neporušujú) sa nahradia trojicou pravidiel $\alpha \to \xi_c\xi_\varepsilon$, $\xi_c \to c$ a $\xi_\varepsilon \to \varepsilon$. Poznamenajme však, že toto neplatí pre pravidlá $\alpha \to \varepsilon$ pôvodnej gramatiky, ktoré sú vo výsledku nezmenené.

3.1 Riešená úloha

Úloha 2. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to a\alpha b\beta \mid \beta\beta \mid \alpha \\ \alpha &\to \alpha b\alpha \mid aa \\ \beta &\to b\beta\beta \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Štandardnou konštrukciou preveďte gramatiku G do Chomského normálneho tvaru.

[2] Práve zavedený neterminál ξ_c teda nepatrí do N ani do T.

Riešenie. Pre všetky $c \in T$ zaveďme nový neterminál ξ_c a pravidlo $\xi_c \to c$; následne nahraďme všetky terminály c na pravých stranách pôvodných pravidiel neterminálom ξ_c. Po tejto transformácii dostaneme gramatiku s pravidlami

$$
\begin{aligned}
\sigma &\to \xi_a\alpha\xi_b\beta \mid \beta\beta \mid \alpha,\\
\alpha &\to \alpha\xi_b\alpha \mid \xi_a\xi_a,\\
\beta &\to \xi_b\beta\beta \mid \varepsilon,\\
\xi_a &\to a,\\
\xi_b &\to b.
\end{aligned}
$$

Zaveďme ďalej nový neterminál ξ_ε s pravidlom $\xi_\varepsilon \to \varepsilon$ a predĺžme neterminálom ξ_ε všetky „príliš krátke“ pravé strany pravidiel. Získame tak gramatiku s pravidlami

$$
\begin{aligned}
\sigma &\to \xi_a\alpha\xi_b\beta \mid \beta\beta \mid \alpha\xi_\varepsilon,\\
\alpha &\to \alpha\xi_b\alpha \mid \xi_a\xi_a,\\
\beta &\to \xi_b\beta\beta \mid \varepsilon,\\
\xi_a &\to a,\\
\xi_b &\to b,\\
\xi_\varepsilon &\to \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Zaveďme ešte označenia pravidiel

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &:= (\sigma \to \xi_a\alpha\xi_b\beta),\\
\pi_2 &:= (\alpha \to \alpha\xi_b\alpha),\\
\pi_3 &:= (\beta \to \xi_b\beta\beta)
\end{aligned}
$$

a „rozbime“ príliš dlhé pravé strany pravidiel pomocou nových neterminálov, čím dostaneme bezkontextovú gramatiku $G' = (N', T, P', \sigma)$ s $N' = \{\sigma, \alpha, \beta, \xi_a, \xi_b, \xi_\varepsilon, \psi_{\pi_1,1}, \psi_{\pi_1,2}, \psi_{\pi_2,1}, \psi_{\pi_3,1}\}$ a

$$
\begin{aligned}
P' = \{\sigma &\to \xi_a\psi_{\pi_1,1} \mid \beta\beta \mid \alpha\xi_\varepsilon\\
\alpha &\to \alpha\psi_{\pi_2,1} \mid \xi_a\xi_a\\
\beta &\to \xi_b\psi_{\pi_3,1} \mid \varepsilon\\
\psi_{\pi_1,1} &\to \alpha\psi_{\pi_1,2}\\
\psi_{\pi_1,2} &\to \xi_b\beta\\
\psi_{\pi_2,1} &\to \xi_b\alpha\\
\psi_{\pi_3,1} &\to \beta\beta\\
\xi_a &\to a\\
\xi_b &\to b\\
\xi_\varepsilon &\to \varepsilon\}.
\end{aligned}
$$

□

4 „Bezepsilonový“ normálny tvar

Bezkontextová gramatika je v *„bezepsilonovom“ normálnom tvare*, ak neobsahuje vymazávajúce pravidlá typu $\xi \to \varepsilon$. V tomto prípade ide o normálny tvar len pre gramatiky generujúce neprázdne slová. Gramatika bez pravidiel typu $\xi \to \varepsilon$ totiž nikdy nemôže vygenerovať prázdne slovo ε, a teda nie každá bezkontextová gramatika sa dá do „bezepsilonového“ tvaru v pravom slova zmysle previesť. Ako však bolo dokázané na prednáške, ku každej bezkontextovej gramatike G existuje bezkontextová gramatika G' v „bezepsilonovom“ normálnom tvare taká, že $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$.

Definícia 3. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Hovoríme, že gramatika G je v *„bezepsilonovom“ normálnom tvare*, ak $P \subseteq N \times (N \cup T)^+$.

Veta 3. *Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Potom existuje bezkontextová gramatika $G' = (N', T', P', \sigma')$ v „bezepsilonovom" normálnom tvare taká, že $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$.*

Správnosť nasledujúceho algoritmu na prevod gramatiky do „bezepsilonového" normálneho tvaru bola dokázaná na prednáške. Jeho vstupom je bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ a výstupom je bezkontextová gramatika $G' = (N', T', P', \sigma')$ v „bezepsilonovom" normálnom tvare taká, že $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$.

1. Nájdi množinu $E = \{\xi \in N \mid \xi \Rightarrow^* \varepsilon\}$ vymazávajúcich neterminálov v gramatike G:
   1.1 Nech $E_0 = \{\xi \in N \mid \xi \to \varepsilon \in P\}$ (ide o neterminály „vymazávajúce na jeden krok").
   1.2 Pre $i = 1, 2, \ldots$ iteruj $E_i = E_{i-1} \cup \{\xi \in N \mid \exists u \in E_{i-1}^* : \xi \to u \in P\}$, až kým pre nejaké k nenastane $E_k = E_{k-1}$.
   1.3 Polož $E = E_k$.
2. Pre každé pôvodné pravidlo $\xi \to u \in P$ s $\xi \in N$ a $u \in (N \cup T)^+$ pridaj do množiny prepisovacích pravidiel všetky pravidlá $\xi \to v_0 v_1 \ldots v_j$ s $j \in \mathbb{N}$ a $v_0, \ldots, v_j \in (N \cup T)^*$ také, že pre nejaké $\alpha_1, \ldots, \alpha_j \in E$ je $u = v_0 \alpha_1 v_1 \alpha_2 \ldots v_{j-1} \alpha_j v_j$. (Čiže pridáme všetky pravidlá, ktoré vzniknú z pravidla $\xi \to u$ vypustením niektorých výskytov vymazávajúcich neterminálov v slove u.)
3. Odober z množiny prepisovacích pravidiel všetky pravidlá $\xi \to \varepsilon$, kde $\xi \in N$. Vráť výslednú gramatiku $G' = (N', T', P', \sigma')$ ako výstup.

V kroku 2 by, samozrejme, bolo možné pridávať iba také pravidlá $\xi \to v_0 v_1 \ldots v_j$, pre ktoré $v_0 v_1 \ldots v_j \neq \varepsilon$. V opačnom prípade sa totiž pravidlo hneď v nasledujúcom kroku z gramatiky odstráni.

4.1 Riešená úloha

Úloha 3. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{&\sigma \to a\sigma \mid b\alpha \mid bb \\ &\alpha \to \beta \mid aa \\ &\beta \to b\beta\beta a\alpha\sigma \mid \varepsilon \\ &\gamma \to \alpha\alpha \mid a\gamma \mid a\}. \end{aligned}$$

Štandardnou konštrukciou preveďte gramatiku G do „bezepsilonového" normálneho tvaru.

Riešenie. Nájdeme najprv množinu vymazávajúcich neterminálov E:

1. $E_0 = \{\beta\}$,
2. $E_1 = E_0 \cup \{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta\}$,
3. $E_2 = E_1 \cup \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$,
4. $E_3 = E_2 \cup \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\alpha, \beta, \gamma\} = E_2$.

Teda $E = E_3 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Z pravidiel gramatiky G následne získame nasledujúce nové pravidlá:

$$\begin{aligned}
\sigma \to a\sigma \quad &\rightsquigarrow \quad \sigma \to a\sigma, \\
\sigma \to b\alpha \quad &\rightsquigarrow \quad \sigma \to b\alpha \mid b, \\
\sigma \to bb \quad &\rightsquigarrow \quad \sigma \to bb, \\
\alpha \to \beta \quad &\rightsquigarrow \quad \alpha \to \beta \mid \varepsilon, \\
\alpha \to aa \quad &\rightsquigarrow \quad \alpha \to aa, \\
\beta \to b\beta\beta a\alpha\sigma \quad &\rightsquigarrow \quad \beta \to b\beta\beta a\alpha\sigma \mid b\beta\beta a\sigma \mid b\beta a\alpha\sigma \mid b\beta a\sigma \mid ba\alpha\sigma \mid ba\sigma, \\
\beta \to \varepsilon \quad &\rightsquigarrow \quad \beta \to \varepsilon, \\
\gamma \to \alpha\alpha \quad &\rightsquigarrow \quad \gamma \to \alpha\alpha \mid \alpha \mid \varepsilon, \\
\gamma \to a\gamma \quad &\rightsquigarrow \quad \gamma \to a\gamma \mid a, \\
\gamma \to a \quad &\rightsquigarrow \quad \gamma \to a.
\end{aligned}$$

Po odstránení duplikátov a pravidiel s prázdnym slovom na pravej strane tak dostávame výslednú gramatiku $G' = (N, T, P', \sigma)$ s

$$\begin{aligned} P' = \{ \sigma &\to a\sigma \mid b\alpha \mid b \mid bb \\ \alpha &\to \beta \mid aa \\ \beta &\to b\beta\beta a\alpha\sigma \mid b\beta\beta a\sigma \mid b\beta a\alpha\sigma \mid b\beta a\sigma \mid ba\alpha\sigma \mid ba\sigma \\ \gamma &\to \alpha\alpha \mid \alpha \mid a\gamma \mid a \}. \end{aligned}$$

□

Poznámka 8. Už sme spomenuli, že „bezepsilonový“ normálny tvar nie je normálnym tvarom v pravom slova zmysle: „bezepsilonové“ gramatiky nedokážu vygenerovať prázdne slovo a veta o normálnom tvare tak zaručuje iba ekvivalenciu „až na ε“. Tento drobný nedostatok sa občas zvykne riešiť alternatívnou definíciou „bezepsilonového“ normálneho tvaru, pri ktorej sa toleruje prepisovacie pravidlo $\sigma \to \varepsilon$ v prípade, že sa počiatočný neterminál σ nevyskytuje na pravej strane žiadneho pravidla. Množina prepisovacích pravidiel P teda musí byť v tvare $P \subseteq \{\sigma \to \varepsilon\} \cup N \times ((N - \{\sigma\}) \cup T)^+$. Na prevod do tohto variantu „bezepsilonového“ normálneho tvaru stačí použiť horeuvedený algoritmus, pridať nový počiatočný neterminál σ', pravidlo $\sigma' \to \sigma$ a ak $\sigma \in E$, tak aj pravidlo $\sigma' \to \varepsilon$.

5 Formálna definícia pojmu odvodenia

Odvodenie v bezkontextovej gramatike je pomerne intuitívny pojem, ktorého definícii sa v literatúre nevenuje veľká pozornosť. Zvyčajne sa narába iba s predstavou o „odvodení $\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$“, pričom sa toleruje, že takýto zápis v skutočnosti reprezentuje výrok a nie „entitu odvodenia“. V literatúre sa miestami objavujú pokusy o zmiernenie tejto nepresnosti podaním formálnej definície pojmu odvodenia, ktorá má zápisom ako ten vyššie priradiť určitý význam. Tieto definície sú však často chybné a nesúhlasia napríklad s teóriou okolo stromov odvodenia, kde je čitateľ znova prenechaný napospas intuícii.

Hovoriť o „odvodení $\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$“ je účelné z hľadiska prehľadnosti a intuitívnosti zápisu a budeme tak robiť aj my. Na správne pochopenie konceptu stromov odvodenia je však nutné mať adekvátnu predstavu o tom, čo sa takýmto zápisom v skutočnosti myslí. Potrebujeme teda definíciu pojmu odvodenia, ktorá bude „v pozadí“ za každým zápisom typu $\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$ a ktorá zároveň bude v súlade s neskoršie zavedenými pojmami.

Uvedomme si najprv, že odvodenie *nemôžeme* definovať iba ako postupnosť slov $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ takých, že $w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$, ba ani ako striedavú postupnosť takýchto slov a pravidiel používaných pri ich odvodzovaní. V bezkontextovej gramatike $G = (N, T, P, \sigma)$ s $N = \{\sigma, \alpha\}$, $T = \{a\}$ a $P = \{\sigma \to \alpha\alpha,\ \alpha \to \alpha\alpha \mid a\}$ totiž napríklad existujú dve *fundamentálne odlišné* odvodenia vetnej formy $\alpha\alpha\alpha$, ktoré obidve môžeme zapísať ako

$$\sigma \Rightarrow \alpha\alpha \Rightarrow \alpha\alpha\alpha.$$

Pri oboch týchto odvodeniach najprv na počiatočný neterminál aplikujeme pravidlo $\sigma \to \alpha\alpha$ a následne pokračujeme použitím pravidla $\alpha \to \alpha\alpha$. Rozdiel medzi nimi spočíva v tom, na ktorý z výskytov neterminálu α aplikujeme pravidlo $\alpha \to \alpha\alpha$. Ak teda vo vetných formách podčiarkneme výskyty neterminálov prepisovaných v nasledujúcom kroku, môžeme tieto dve odvodenia zapísať nasledovne:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &\Rightarrow \underline{\alpha}\alpha \Rightarrow \alpha\alpha\alpha, \\ \underline{\sigma} &\Rightarrow \alpha\underline{\alpha} \Rightarrow \alpha\alpha\alpha. \end{aligned}$$

Ako vhodný prístup k definícii pojmu odvodenia sa javí práve zahrnutie „podčiarknutých neterminálov“ použitých vyššie. Zo zápisu $u\underline{\alpha}v \Rightarrow uxv$ je totiž zrejmý výskyt prepisovaného neterminálu a aj použité prepisovacie pravidlo je ním určené jednoznačne.

Pre naše neskoršie účely je postačujúce pamätať si, že pod odvodením rozumieme *postupnosť vetných foriem s vyznačenými výskytmi prepisovaných neterminálov.* Nasledujúcu formálnu definíciu uvádzame viac-menej len pre úplnosť a s cieľom presvedčiť nedôverčivého čitateľa o možnosti pojem odvodenia plne sformalizovať.

Definícia 4. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Nech $\underline{N} = \{\underline{\alpha} \mid \alpha \in N\}$ je abeceda „podčiarknutých neterminálov“; predpokladajme, že je táto abeceda disjunktná s abecedou $N \cup T$. Nech $h\colon (N \cup \underline{N} \cup T)^* \to (N \cup T)^*$ je homomorfizmus taký, že pre všetky $\alpha \in N$ je $h(\underline{\alpha}) = h(\alpha) = \alpha$ a pre všetky $c \in T$ je $h(c) = c$. *Odvodenie* v gramatike G je konečná postupnosť slov $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ taká, že:

(*i*) Pre $i = 0, \ldots, n-1$ je $w_i = u_i \underline{\alpha_i} v_i$, kde $u_i, v_i \in (N \cup T)^*$ a $\alpha_i \in N$; ďalej $w_n \in (N \cup T)^*$.

(*ii*) Pre $i = 0, \ldots, n-1$ je $h(w_{i+1}) = u_i x_i v_i$ pre nejaké $x_i \in (N \cup T)^*$ také, že $\alpha_i \to x_i \in P$.

Odvodenie slova w v gramatike G je odvodenie $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ také, že $h(w_0) = \sigma$ a $w_n = w$.

6 Stromy odvodenia, jednoznačnosť a viacznačnosť

Uvažujme opäť bezkontextovú gramatiku G z predchádzajúceho oddielu. Slovo aa sa v nej dá odvodiť dvoma spôsobmi:

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\alpha}\alpha \Rightarrow a\underline{\alpha} \Rightarrow aa,$$
$$\underline{\sigma} \Rightarrow \alpha\underline{\alpha} \Rightarrow \underline{\alpha}a \Rightarrow aa.$$

Tieto odvodenia sa líšia iba poradím prepísania jednotlivých výskytov neterminálu α; „štruktúra“ odvodenia je v oboch prípadoch rovnaká. Podobná situácia nastane vždy, keď sa v odvodení vyskytne vetná forma s viac ako jedným neskôr prepísaným neterminálom – poradie ich prepisovania možno zvoliť ľubovoľne, čo znamená viacero formálne rôznych odvodení.

Aj z tohto dôvodu je často namieste považovať odvodenia s rovnakou „štruktúrou“, líšiace sa iba poradím prepisovania neterminálov, za ekvivalentné. Formalizáciou tejto myšlienky je koncept *stromu odvodenia*, čo je stromová štruktúra jedinečná pre každé odvodenie. Stromu odvodenia môže naopak zodpovedať aj viacero odvodení, ktoré sa však líšia iba poradím prepisovania neterminálov a možno ich tak považovať za ekvivalentné.

Prv než uvedieme jeho formálnu definíciu, ilustrujeme pojem stromu odvodenia na príklade.

Príklad 1. Uvažujme gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ s $N = \{\sigma\}$, $T = \{a, b\}$ a $P = \{\sigma \to \sigma\sigma \mid a \mid b \mid \varepsilon\}$ a odvodenia

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\sigma}\sigma \Rightarrow \underline{\sigma}\sigma\sigma \Rightarrow a\underline{\sigma}\sigma \Rightarrow ab\underline{\sigma} \Rightarrow aba$$
$$\underline{\sigma} \Rightarrow \sigma\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\sigma}\sigma\sigma \Rightarrow \underline{\sigma}\sigma\sigma\sigma \Rightarrow a\underline{\sigma}\sigma\sigma \Rightarrow a\underline{\sigma}\sigma \Rightarrow ab\underline{\sigma} \Rightarrow aba.$$

Zodpovedajúce stromy odvodenia sú na obrázku 1.

(a) Strom prvého odvodenia. **(b)** Strom druhého odvodenia.

Obr. 1: Stromy odvodení v gramatike G.

Stromy odvodenia zodpovedajúce daným dvom odvodeniam slova aba sú rôzne, čo znamená, že tieto dve odvodenia nepovažujeme za ekvivalentné. Naopak, napríklad odvodenie

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \sigma\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\sigma}a \Rightarrow \sigma\underline{\sigma}a \Rightarrow \underline{\sigma}ba \Rightarrow aba$$

má rovnaký strom odvodenia ako prvé odvodenie. Tieto dve odvodenia teda v určitom zmysle možno považovať za ekvivalentné.

Formálna definícia stromu odvodenia zvyčajne pozostáva z dvoch častí. V prvej sa definujú všetky korektné stromy odvodení v danej gramatike. V druhej časti sa potom definuje, kedy strom odvodenia prislúcha k nejakému odvodeniu. V nasledujúcom pod *stromom* rozumieme zakorenený strom s ohodnotenými uzlami a s pevným usporiadaním potomkov.

Definícia 5. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. *Strom odvodenia* v gramatike G je strom, pre ktorý sú splnené nasledujúce podmienky.

(*i*) Každý vnútorný uzol je ohodnotený nejakým neterminálom $\xi \in N$.

(*ii*) Každý list je ohodnotený buď nejakým symbolom $d \in N \cup T$, alebo prázdnym slovom ε. Listy ohodnotené prázdnym slovom nemajú súrodencov.

(*iii*) Ak sú ohodnotenia všetkých synov uzla ohodnoteného neterminálom $\xi \in N$ postupne dané ako $d_1, \ldots, d_n \in N \cup T \cup \{\varepsilon\}$ (v tomto poradí), tak P obsahuje pravidlo $\xi \to d_1 \ldots d_n$.

Zreťazenie ohodnotení všetkých listov (v poradí zľava doprava) určuje vetnú formu vygenerovanú daným odvodením z neterminálu, ktorým je ohodnotený koreň.

Definícia 6. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika a $\xi \Rightarrow^n w$ je odvodenie v G,[3] kde $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in N$ a $w \in (N \cup T)^*$. *Strom odvodenia* $\xi \Rightarrow^n w$ je strom odvodenia v gramatike G definovaný induktívne vzhľadom na n:

1. Pre $n = 0$ nutne $w = \xi$; strom odvodenia $\xi \Rightarrow^0 \xi$ je potom strom pozostávajúci z jediného uzla ohodnoteného ξ.

2. Strom odvodenia $\xi \Rightarrow^n u\underline{\alpha}v \Rightarrow uxv = w$ vznikne zo stromu odvodenia $\xi \Rightarrow^n u\alpha v$ pridaním synov jeho $(|u| + 1)$-ému „neepsilonovému" listu tak, aby zreťazenie ich ohodnotení bolo x.

Stromom odvodenia slova $w \in L(G)$ v gramatike G ďalej nazveme strom ľubovoľného z odvodení $\sigma \Rightarrow^* w$ slova w v tejto gramatike.

Indukciou by sme ľahko dokázali, že zreťazením ohodnotení listov stromu odvodenia $\xi \Rightarrow^n w$ vždy dostaneme slovo w.

Ľavé krajné odvodenie je také odvodenie $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$, kde vo všetkých vetných formách $w_0, \ldots, w_{n-1}$ je podčiarknutý prvý výskyt neterminálu (zľava) a *pravé krajné odvodenie* je také odvodenie, kde sú podčiarknuté posledné výskyty neterminálov. Inými slovami: v ľavom krajnom odvodení sa v každom kroku odvodenia prepisuje prvý neterminál zľava a v pravom krajnom odvodení sa v každom kroku prepisuje prvý neterminál sprava. Krok ľavého krajného odvodenia sa niekedy zvykne označovať symbolom $\Rightarrow_{lm}$ a krok pravého krajného odvodenia symbolom $\Rightarrow_{rm}$.

Ľahko vidieť, že existuje vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi stromami odvodenia a ľavými (resp. pravými) krajnými odvodeniami.

Definícia 7. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. *Gramatika G* sa nazýva *jednoznačná*, ak pre každé slovo $w \in L(G)$ existuje práve jedno ľavé krajné odvodenie v gramatike G. Gramatika, ktorá nie je jednoznačná, sa nazýva *viacznačná*.

Definícia 8. Nech $L \in \mathscr{L}_{CF}$ je bezkontextový jazyk. Jazyk L sa nazýva *jednoznačný*, ak existuje jednoznačná bezkontextová gramatika G taká, že $L(G) = L$. Jazyk, ktorý nie je jednoznačný, sa nazýva *vnútorne viacznačný*.

Čitateľ si už istotne uvedomil, že jednoznačnosť gramatiky je ekvivalentná existencii práve jedného *pravého krajného* odvodenia pre každé slovo $w \in L(G)$, čo je ďalej ekvivalentné tomu, že pre každé slovo $w \in L(G)$ existuje práve jeden strom jeho odvodenia v gramatike G.

[3] Pod nepresným zápisom $\xi \Rightarrow^n w$ sa tu ukrýva odvodenie v zmysle definície 4.