Cvičenie č. 8
Zásobníkové automaty

Peter Kostolányi

9. novembra 2022

1 Zásobníkové automaty a ich akceptačné módy

Pod *zásobníkovým automatom* – bez ďalšieho prívlastku – sa obyčajne rozumie *nedeterministický* zásobníkový automat. Deterministický variant zásobníkových automatov sa zvykne preberať v rámci pokračovania tohto predmetu v letnom semestri.

Definícia 1. *Zásobníkový automat* je sedmica $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde K je konečná množina stavov, Σ je vstupná abeceda, Γ je abeceda zásobníkových symbolov, $\delta\colon K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2_{\mathrm{kon}}^{K \times \Gamma^*}$ je prechodová funkcia, $q_0 \in K$ je počiatočný stav, $Z_0 \in \Gamma$ je počiatočný zásobníkový symbol a $F \subseteq K$ je množina koncových (alebo akceptačných) stavov.

Ako $2_{\mathrm{kon}}^{K \times \Gamma^*}$ označujeme množinu všetkých *konečných* podmnožín množiny $K \times \Gamma^*$. Obmedzenie sa na konečné podmnožiny je nutné v záujme zachovania konečnosti opisu zásobníkových automatov. Čitateľ sa tiež ľahko presvedčí o tom, že tolerovanie nekonečných podmnožín by malo za následok neúmerný nárast výpočtovej sily zásobníkových automatov, ktoré by takto boli schopné jednoduchým spôsobom akceptovať ľubovoľný jazyk.

Definícia 2. Nech $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je zásobníkový automat. *Konfigurácia* zásobníkového automatu A je trojica (q, w, γ), kde $q \in K$ je stav, $w \in \Sigma^*$ je slovo nad abecedou vstupných symbolov (reprezentujúce nedočítanú časť vstupného slova) a $\gamma \in \Gamma^*$ je slovo nad abecedou zásobníkových symbolov (reprezentujúce obsah zásobníka s dnom naľavo a vrchom napravo).

Poznámka 1. V literatúre sa obsah zásobníka občas zapisuje aj opačne – t. j. s dnom napravo a vrchom naľavo.

Definícia 3. Nech $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je zásobníkový automat. *Krok výpočtu* automatu A je binárna relácia $\vdash_A$ na množine konfigurácií automatu A taká, že pre všetky $p, q \in K$, $u, v \in \Sigma^*$ a $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*$ je $(p, u, \gamma_1) \vdash_A (q, v, \gamma_2)$ práve vtedy, keď existujú $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\gamma, \beta \in \Gamma^*$ a $Z \in \Gamma$ také, že $u = zv$, $\gamma_1 = \gamma Z$, $\gamma_2 = \gamma\beta$ a $(q, \beta) \in \delta(p, z, Z)$.

V prípade, že je uvažovaný automat A zrejmý z kontextu, často pre krok jeho výpočtu píšeme namiesto $\vdash_A$ len $\vdash$.

Definícia 4. *Jazyk* akceptovaný zásobníkovým automatom $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ *stavom* je daný ako

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F\ \exists \gamma \in \Gamma^* : (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma)\}.$$

Definícia 5. *Jazyk* akceptovaný zásobníkovým automatom $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ *prázdnym zásobníkom* je daný ako

$$N(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in K : (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Všimnime si, že definícia jazyka $N(A)$ nezávisí od množiny koncových stavov F. Pri automatoch konštruovaných na akceptáciu prázdnym zásobníkom tak často kladieme $F = \emptyset$.

1.1 Riešená úloha

Úloha 1. Skonštruujte zásobníkový automat akceptujúci prázdnym zásobníkom jazyk

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}.$$

Správnosť svojej konštrukcie zdôvodnite.

Riešenie. Zostrojíme automat, ktorý si „prvú polovicu" slova uloží počas jej čítania na zásobník a túto informáciu použije pri čítaní „druhej polovice" slova na overenie, či skutočne ide o reverz „prvej polovice". Stred slova nebude automat detegovať, ale pri čítaní „prvej polovice" slova sa bude môcť v každom kroku nedeterministicky rozhodnúť začať čítať jeho „druhú polovicu". Správnosť tohto rozhodnutia sa overí na konci výpočtu: v prípade, že je dočítané celé slovo a v druhej časti výpočtu sa naozaj prečítal reverz slova prečítaného v jeho prvej časti, muselo rozhodnutie o začatí čítania „druhej polovice" slova naozaj nastať v správnom momente. Drobným detailom, ktorý sme tu zamlčali, je ošetrenie prípadného symbolu uprostred palindrómu nepárnej dĺžky.

Formálna konštrukcia: $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$, $F = \emptyset$ a prechodová funkcia δ je definovaná nasledovne (pre všetky zvyšné trojice vstupov je jej výstupom prázdna množina):

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, Za), (q_1, Z)\} \quad \forall Z \in \Gamma,\\
\delta(q_0, b, Z) &= \{(q_0, Zb), (q_1, Z)\} \quad \forall Z \in \Gamma,\\
\delta(q_0, \varepsilon, Z) &= \{(q_1, Z)\} \quad \forall Z \in \Gamma,\\
\delta(q_1, a, a) &= \{(q_1, \varepsilon)\},\\
\delta(q_1, b, b) &= \{(q_1, \varepsilon)\},\\
\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_1, \varepsilon)\}.
\end{aligned}$$

Indukciou – ide tu v podstate o rovnakú metódu invariantov ako pre konečné automaty – by sme ľahko dokázali, že pre slová $u \in \Sigma^*$ a $\gamma \in \Gamma^*$ platí $(q_0, u, Z_0) \vdash^* (q_0, \varepsilon, Z_0\gamma)$ práve vtedy, keď $u = \gamma$. Podobne by sme ľahko dokázali, že pre slová $v \in \Sigma^*$ a $\gamma \in \Gamma^*$ platí $(q_0, v, Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0\gamma)$ práve vtedy, keď existujú slová $x, y \in \Sigma^*$ a $z \in \{a, b, \varepsilon\}$ také, že $v = xyzy^R$ a $\gamma = x$. Nakoniec by sme mohli usúdiť, že pre slovo $w \in \Sigma^*$ platí $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$ práve vtedy, keď $w = yzy^R$ pre nejaké $y \in \Sigma^*$ a $z \in \{a, b, \varepsilon\}$, t. j. ak $w = w^R$. Dôsledkom tejto skutočnosti spoločne s nedosiahnuteľnosťou konfigurácie $(q_0, \varepsilon, \varepsilon)$ je, že $N(A) = L$. □

2 Ekvivalencia módov akceptácie zásobníkových automatov

Na prednáške bolo dokázané, že akceptácia stavom a akceptácia prázdnym zásobníkom sú pre zásobníkové automaty z hľadiska opisnej sily ekvivalentné. Ku každému zásobníkovému automatu A teda možno skonštruovať zásobníkový automat A' taký, že $N(A') = L(A)$, ako aj zásobníkový automat A'' taký, že $L(A'') = N(A)$.

Tvrdenie 1. *Ku každému zásobníkovému automatu $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ existuje zásobníkový automat A' taký, že $N(A') = L(A)$.*

Pripomeňme si konštrukciu takéhoto automatu A', ktorá je založená na simulácii automatu A s *novým* symbolom Z_0' pridaným na dno zásobníka tak, aby sa tento zo zásobníka počas samotnej simulácie automatu A nikdy nevybral. Automat A' vďaka tomu nebude prázdnym zásobníkom akceptovať žiadne slová, ktoré by automat A stavom neakceptoval. Ak sa simulovaný automat A pri takejto simulácii dostane do akceptačného stavu, musí mať automat A' možnosť prípadné dočítané slovo akceptovať. To sa dosiahne prechodom do *nového* stavu $q_\downarrow$, v ktorom bude môcť automat A' vyprázdniť svoj zásobník – vrátane symbolu Z_0' na jeho dne – bez toho, aby zo vstupu prečítal čokoľvek ďalšie. Na začiatku každého výpočtu automatu A' sa spustí simulácia automatu A tak, že sa z *nového* počiatočného stavu q_0' prejde do počiatočného stavu q_0 pôvodného automatu A, pričom na zásobník sa nad nový počiatočný zásobníkový symbol Z_0' pridá pôvodný počiatočný zásobníkový symbol Z_0.

Formálna konštrukcia automatu $A' = (K', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0', Z_0', F')$ môže byť napríklad nasledujúca: $K' = K \cup \{q_0', q_\downarrow\}$ pre $q_0', q_\downarrow \not\in K$, $\Sigma' = \Sigma$, $\Gamma' = \Gamma \cup \{Z_0'\}$ pre $Z_0' \not\in \Gamma$, $F' = \emptyset$ a

$$\begin{aligned}
\delta'(q_0', \varepsilon, Z_0') &= \{(q_0, Z_0'Z_0)\}, && \\
\delta'(q, z, Z) &= \delta(q, z, Z) && \forall q \in K - F\ \forall z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\ \forall Z \in \Gamma, \\
\delta'(q, c, Z) &= \delta(q, c, Z) && \forall q \in F\ \forall c \in \Sigma\ \forall Z \in \Gamma, \\
\delta'(q, \varepsilon, Z) &= \delta(q, \varepsilon, Z) \cup \{(q_\downarrow, \varepsilon)\} && \forall q \in F\ \forall Z \in \Gamma, \\
\delta'(q, \varepsilon, Z_0') &= \{(q_\downarrow, \varepsilon)\} && \forall q \in F, \\
\delta'(q_\downarrow, \varepsilon, Z) &= \{(q_\downarrow, \varepsilon)\} && \forall Z \in \Gamma',
\end{aligned}$$

pričom pre zvyšné trojice $(q, z, Z) \in K' \times (\Sigma' \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma'$ je výstupom funkcie δ' prázdna množina.

Tvrdenie 2. *Ku každému zásobníkovému automatu $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ existuje zásobníkový automat A'' taký, že $L(A'') = N(A)$.*

Konštrukcia takéhoto automatu A'' je opäť založená na pridaní *nového* symbolu Z_0'' na dno zásobníka a simulácii automatu A. V prípade, že sa počas tejto simulácie na vrchu zásobníka objaví symbol Z_0'', pôjde o známku toho, že automat A svoj zásobník vyprázdnil a dočítaná časť vstupu teda patrí do jazyka $N(A)$. Automat A'' v takom prípade bude môcť na ε prejsť do *nového* stavu q_{fin}, ktorý bude jeho jediným akceptačným stavom.

Formálne teda môžeme vziať napríklad $A'' = (K'', \Sigma'', \Gamma'', \delta'', q_0'', Z_0'', F'')$, kde $K'' = K \cup \{q_0'', q_{\text{fin}}\}$ pre $q_0'', q_{\text{fin}} \not\in K$, $\Sigma'' = \Sigma$, $\Gamma'' = \Gamma \cup \{Z_0''\}$ pre $Z_0'' \not\in \Gamma$, $F'' = \{q_{\text{fin}}\}$ a

$$\begin{aligned}
\delta''(q_0'', \varepsilon, Z_0'') &= \{(q_0, Z_0''Z_0)\}, && \\
\delta''(q, z, Z) &= \delta(q, z, Z) && \forall q \in K\ \forall z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\ \forall Z \in \Gamma, \\
\delta''(q, \varepsilon, Z_0'') &= \{(q_{\text{fin}}, \varepsilon)\} && \forall q \in K,
\end{aligned}$$

pričom pre zvyšné trojice $(q, z, Z) \in K'' \times (\Sigma'' \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma''$ je výstupom funkcie δ'' prázdna množina.

3 Konštrukcia zásobníkového automatu k bezkontextovej gramatike

Na prednáške bola dokázaná ekvivalencia zásobníkových automatov a bezkontextových gramatík. Trieda všetkých jazykov akceptovaných zásobníkovými automatmi je teda rovná triede $\mathscr{L}_{CF}$ všetkých bezkontextových jazykov.

V nasledujúcom si zopakujeme štandardnú konštrukciu zásobníkového automatu ekvivalentného danej bezkontextovej gramatike.

Tvrdenie 3. *Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Potom existuje zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ taký, že $N(A) = L(G)$.*

Automat A ekvivalentný gramatike G na zásobníku simuluje ľavé krajné odvodenie gramatiky G, pričom obsah zásobníka čítaný „zhora nadol" – teda reverz obsahu zásobníka pri zvyčajnom zápise v konfiguráciách – reprezentuje vždy určitý sufix vetnej formy.

Na začiatku výpočtu je na zásobníku iba počiatočný neterminál σ. Ak sa niekedy v priebehu výpočtu ocitne na vrchu zásobníka neterminál, prepíše sa tento pomocou niektorého z pravidiel a zo vstupu sa pritom neprečíta nič – to zodpovedá simulácii jedného kroku odvodenia gramatiky G. Ak je naopak na vrchu zásobníka terminál, automat nemôže priamo simulovať krok odvodenia gramatiky G. Daný terminálny symbol sa už však počas odvodenia meniť nebude, a preto ho môže automat konfrontovať so svojím vstupom. Ak je symbol na vstupe rovnaký, automat ho prečíta a zmaže vrch zásobníka. V opačnom prípade sa automat zasekne. Vyprázdnenie zásobníka zodpovedá vygenerovaniu terminálneho slova gramatikou G. V prípade, že toto slovo zodpovedá kompletnému vstupu, automat tento vstup akceptuje prázdnym zásobníkom. Na konštrukciu takéhoto automatu zjavne stačí jediný stav.

Formálne teda môžeme konštrukciu automatu $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ ekvivalentného gramatike $G = (N, T, P, \sigma)$ zapísať nasledovne: $K = \{q_0\}$, $\Sigma = T$, $\Gamma = N \cup T$, $Z_0 = \sigma$, $F = \emptyset$ a

$$\begin{aligned} \delta(q_0, \varepsilon, \xi) &= \{(q_0, x^R) \mid \xi \to x \in P\} && \forall \xi \in N, \\ \delta(q_0, c, c) &= \{(q_0, \varepsilon)\} && \forall c \in T, \end{aligned}$$

pričom pre všetky ostatné trojice $(q, z, Z) \in K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$ je $\delta(q, z, Z) = \emptyset$.

3.1 Riešená úloha

Úloha 2. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to a\alpha\beta \mid \alpha\beta \mid \varepsilon \\ \alpha &\to \alpha b\beta \mid aa \\ \beta &\to b\beta\gamma \mid ab \\ \gamma &\to a\gamma \mid aab \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Štandardnou konštrukciou zostrojte zásobníkový automat A taký, že $N(A) = L(G)$.

Riešenie. Automat ekvivalentný gramatike G bude daný ako $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde $K = \{q_0\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $Z_0 = \sigma$, $F = \emptyset$, a kde prechodová funkcia δ je daná nasledovne:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, \varepsilon, \sigma) &= \{(q_0, \beta\alpha a), (q_0, \beta\alpha), (q_0, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_0, \varepsilon, \alpha) &= \{(q_0, \beta b\alpha), (q_0, aa)\}, \\ \delta(q_0, \varepsilon, \beta) &= \{(q_0, \gamma\beta b), (q_0, ba)\}, \\ \delta(q_0, \varepsilon, \gamma) &= \{(q_0, \gamma a), (q_0, baa), (q_0, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_0, a, a) &= \{(q_0, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_0, b, b) &= \{(q_0, \varepsilon)\}; \end{aligned}$$

pre všetky ostatné $(q, z, Z) \in K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$ je $\delta(q, z, Z) = \emptyset$. □

4 Konštrukcia bezkontextovej gramatiky k zásobníkovému automatu

Vyššie sme načali problematiku ekvivalencie zásobníkových automatov s bezkontextovými gramatikami a rozobrali sme konštrukciu zásobníkového automatu ekvivalentného danej bezkontextovej gramatike. V nasledujúcom sa zameriame na opačnú konštrukciu, pomocou ktorej možno k danému zásobníkovému automatu A zostrojiť bezkontextovú gramatiku G takú, že $L(G) = N(A)$.

Tvrdenie 4. *Nech $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je zásobníkový automat. Potom existuje bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ taká, že $L(G) = N(A)$.*

Gramatika G, ekvivalentná automatu A, obsahuje pre všetky dvojice stavov $p, q \in K$ a všetky zásobníkové symboly $Z \in \Gamma$ neterminál $[p, Z, q]$. Množinu pravidiel gramatiky G skonštruujeme tak, aby pre slovo $w \in T^*$ bolo $[p, Z, q] \Rightarrow^* w$ práve vtedy, keď $(p, w, Z) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$. Tento zápis vyjadruje, že z neterminálu $[p, Z, q]$ sa dajú vygenerovať práve všetky terminálne slová w, pre ktoré existuje výpočet automatu A na slove w s nasledujúcimi vlastnosťami:

- *(i)* výpočet sa začína v konfigurácii so stavom p a so symbolom Z na vrchu zásobníka,
- *(ii)* končí sa v konfigurácii so stavom q a
- *(iii)* na konci tohto výpočtu sa výška zásobníka automatu A *po prvý raz* dostane o úroveň nižšie v porovnaní s jeho začiatkom.

Keďže automat A akceptuje prázdnym zásobníkom, mala by gramatika G generovať práve všetky slová odvoditeľné z neterminálov $[q_0, Z_0, q]$ pre $q \in K$. Pre každé $q \in K$ teda v množine P bude pravidlo $\sigma \to [q_0, Z_0, q]$. Zostáva definovať pravidlá zabezpečujúce „správanie" neterminálov $[p, Z, q]$ opísané v predchádzajúcom odstavci. Ak pre nejaké $p, q \in K$, $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $Z \in \Gamma$ je $(q, \varepsilon) \in \delta(p, z, Z)$, malo by byť aj $[p, Z, q] \Rightarrow^* z$. Preto bude množina P obsahovať pravidlo $[p, Z, q] \to z$. Ak ďalej pre nejaké $p, r \in K$, $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ a $Z, Z_1, \ldots, Z_k \in \Gamma$ je $(r, Z_1 \ldots Z_k) \in \delta(p, z, Z)$, dôjde k zníženiu výšky zásobníka pod pôvodnú úroveň až potom, čo postupne príde k zníženiu pod úroveň novo pridaného Z_k, neskôr pod úroveň novo pridaného Z_{k-1}, atď. – až napokon zásobník klesne pod úroveň novo pridaného Z_1. Stavy, v ktorých k týmto zníženiam úrovne zásobníka dôjde, môžu byť vo všeobecnosti ľubovoľné. Pre všetky stavy $q, q_1, \ldots, q_{k-1} \in K$ tak bude množina P obsahovať pravidlo $[p, Z, q] \to z[r, Z_k, q_1][q_1, Z_{k-1}, q_2] \ldots [q_{k-1}, Z_1, q]$.

Gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ ekvivalentná automatu $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je teda daná nasledovne: $N = \{[p, Z, q] \mid p, q \in K;\ Z \in \Gamma\} \cup \{\sigma\}$, $T = \Sigma$ a

(*i*) Pre každé $q \in K$ obsahuje P pravidlo $\sigma \to [q_0, Z_0, q]$.

(*ii*) Pre všetky $p, q \in K$, $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $Z \in \Gamma$ s $(q, \varepsilon) \in \delta(p, z, Z)$ obsahuje P pravidlo $[p, Z, q] \to z$.

(*iii*) Pre všetky $p, r \in K$, $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ a $Z, Z_1, \ldots, Z_k \in \Gamma$ s $(r, Z_1 \ldots Z_k) \in \delta(p, z, Z)$ obsahuje P pre všetky $q, q_1, \ldots, q_{k-1} \in K$ pravidlo $[p, Z, q] \to z[r, Z_k, q_1] \ldots [q_{k-1}, Z_1, q]$.

(*iv*) Množina P neobsahuje žiadne iné pravidlá.

4.1 Riešená úloha

Úloha 3. Nech $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je zásobníkový automat, kde $K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, c\}$, $F = \emptyset$ a

$$\delta(q_0, a, Z_0) \ni (q_1, \varepsilon) \tag{1}$$
$$\delta(q_0, \varepsilon, c) \ni (q_0, Z_0) \tag{2}$$
$$\delta(q_1, b, Z_0) \ni (q_1, Z_0cc). \tag{3}$$

Nech automat A neobsahuje žiadne ďalšie prechody.[1] Štandardnou konštrukciou zostrojte bezkontextovú gramatiku G takú, že $L(G) = N(A)$.

Riešenie. Gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ bude daná nasledovne:

$$N = \{\sigma, [q_0, Z_0, q_0], [q_0, c, q_0], [q_0, Z_0, q_1], [q_0, c, q_1], [q_1, Z_0, q_0], [q_1, c, q_0], [q_1, Z_0, q_1], [q_1, c, q_1]\},$$

$T = \{a, b\}$ a množina P obsahuje nasledujúce pravidlá:

$$\sigma \to [q_0, Z_0, q_0] \mid [q_0, Z_0, q_1],$$
$$[q_0, Z_0, q_1] \to a, \tag{4}$$
$$[q_0, c, q_0] \to [q_0, Z_0, q_0], \tag{5}$$
$$[q_0, c, q_1] \to [q_0, Z_0, q_1], \tag{6}$$
$$\begin{aligned}[q_1, Z_0, q_0] \to\ & b[q_1, c, q_0][q_0, c, q_0][q_0, Z_0, q_0] \mid b[q_1, c, q_0][q_0, c, q_1][q_1, Z_0, q_0] \mid \\ & \mid b[q_1, c, q_1][q_1, c, q_0][q_0, Z_0, q_0] \mid b[q_1, c, q_1][q_1, c, q_1][q_1, Z_0, q_0],\end{aligned} \tag{7}$$
$$\begin{aligned}[q_1, Z_0, q_1] \to\ & b[q_1, c, q_0][q_0, c, q_0][q_0, Z_0, q_1] \mid b[q_1, c, q_0][q_0, c, q_1][q_1, Z_0, q_1] \mid \\ & \mid b[q_1, c, q_1][q_1, c, q_0][q_0, Z_0, q_1] \mid b[q_1, c, q_1][q_1, c, q_1][q_1, Z_0, q_1].\end{aligned} \tag{8}$$

Pravidlo (4) pritom zodpovedá prechodu (1), pravidlá (5, 6) prechodu (2) a pravidlá (7, 8) zodpovedajú prechodu (3). □

[1] V tejto úlohe nejde o zmysluplný automat, ale o čo najmenej bolestnú demonštráciu štandardnej konštrukcie.