Myhillova-Nerodova veta

Peter Kostolányi

25. februára 2025

Označenia a definície

Nech $\equiv \subseteq S \times S$ je relácia ekvivalencie na množine S.

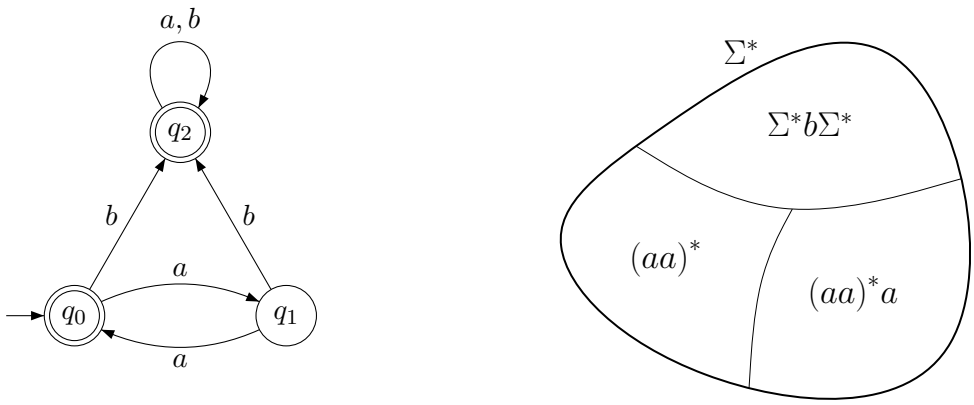
- Triedu ekvivalencie relácie $\equiv$ obsahujúcu prvok $x \in S$ označujeme $[x]_\equiv$.
- *Množinu všetkých tried ekvivalencie* relácie $\equiv$ označujeme $S/{\equiv}$. To znamená, že
$$S/{\equiv} = \{[x]_\equiv \mid x \in S\}.$$
- Hovoríme, že relácia $\equiv$ je *konečného indexu*, ak má konečne veľa tried ekvivalencie – čiže ak je množina $S/{\equiv}$ konečná (množina S pritom môže byť aj nekonečná). V takom prípade nazývame *indexom* relácie $\equiv$ počet jej tried ekvivalencie, čiže počet prvkov množiny $S/{\equiv}$.
- Relácia $\equiv$ *nasycuje* množinu $T \subseteq S$, ak je T zjednotením niekoľkých tried ekvivalencie relácie $\equiv$ – čiže ak
$$T = \bigcup_{x \in T} [x]_\equiv.$$
To je ekvivalentné požiadavke, aby každá trieda ekvivalencie relácie $\equiv$ obsahovala buď výlučne prvky T, alebo výlučne prvky $S - T$ – a tiež platnosti inklúzií $[x]_\equiv \subseteq T$ pre všetky $x \in T$.

1 Deterministické konečné automaty a pravé kongruencie

Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je *deterministický* konečný automat (s úplnou prechodovou funkciou). Automat A prirodzeným spôsobom určuje reláciu $\equiv_A$ na Σ^* takú, že pre dvojicu slov $u, v \in \Sigma^*$ je $u \equiv_A v$ práve vtedy, keď automat A dočíta slová u a v v rovnakom stave – čiže

$$\forall u, v \in \Sigma^* : u \equiv_A v \iff (\exists q \in K \colon (q_0, u) \vdash_A^* (q, \varepsilon) \ \wedge \ (q_0, v) \vdash_A^* (q, \varepsilon)).$$

Je triviálnou úlohou overiť, že takto definovaná relácia $\equiv_A$ je *reflexívna* (automat A slová w a w vždy dočíta v rovnakom stave), *symetrická* (ak A dočíta slová u, v v rovnakom stave, tak dočíta v rovnakom stave aj slová v, u) a *tranzitívna* (ak A dočíta v rovnakom stave slová x, y a y, z, tak dočíta v rovnakom stave aj slová x, z). Relácia $\equiv_A$ je teda *reláciou ekvivalencie na* Σ^*.



(a) Deterministický konečný automat A. **(b)** Rozklad Σ^* určený reláciou $\equiv_A$.

Obr. 1: Deterministický konečný automat A nad $\Sigma = \{a, b\}$ a k nemu prislúchajúca relácia ekvivalencie $\equiv_A$.

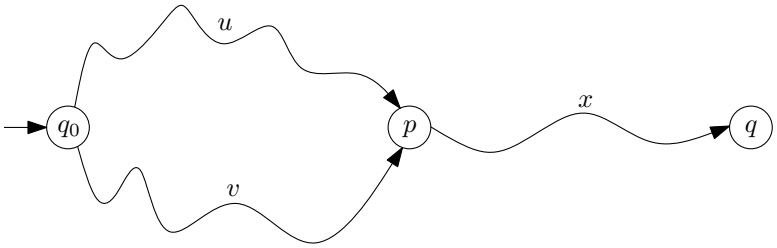
Okamžite si možno všimnúť tri podstatné vlastnosti tejto relácie ekvivalencie $\equiv_A$, ktorej *triedy zodpovedajú* jednotlivým *dosiahnuteľným stavom* automatu A:

1. Nech $u, v \in \Sigma^*$ sú slová také, že $u \equiv_A v$. Potom buď $u, v \in L(A)$, alebo $u, v \notin L(A)$. Slová u a v totiž automat A dočíta v rovnakom stave – a ten buď je, alebo nie je akceptačný. Každá trieda ekvivalencie relácie $\equiv_A$ tak obsahuje výlučne slová z $L(A)$, alebo výlučne slová z komplementu $L(A)$. Jazyk $L(A)$ je preto zjednotením niekoľkých tried ekvivalencie relácie $\equiv_A$ – a *relácia* $\equiv_A$ *nasycuje* $L(A)$. Napríklad pre automat A na obrázku 1 je $L(A) = \Sigma^* b \Sigma^* \cup (aa)^*$.

2. Keďže má automat A konečne veľa stavov, má relácia $\equiv_A$ konečne veľa tried ekvivalencie. Relácia $\equiv_A$ je teda *konečného indexu.*

3. Ak automat A dočíta slová u, v v rovnakom stave, dočíta v rovnakom stave aj všetky dvojice slov ux, vx, kde $x \in \Sigma^*$ – situácia je schematicky znázornená na obrázku 2. Pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ teda
$$u \equiv_A v \Rightarrow \forall x \in \Sigma^* : ux \equiv_A vx.$$
Hovoríme, že $\equiv_A$ je *sprava invariantná* relácia ekvivalencie – alebo *pravá kongruencia.*

Definícia 1. Nech Σ je abeceda a $\equiv \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ je relácia ekvivalencie. Hovoríme, že $\equiv$ je *sprava invariantná* relácia ekvivalencie – alebo *pravá kongruencia* – ak pre všetky $u, v, x \in \Sigma^*$ je $ux \equiv vx$ kedykoľvek $u \equiv v$.



Obr. 2: Ak deterministický konečný automat A dočíta slová u a v v rovnakom stave, dočíta v rovnakom stave aj slová ux a vx pre ľubovoľné slovo x.

Priamym dôsledkom vyššie učinených pozorovaní je nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 1. *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je regulárny jazyk. Potom existuje pravá kongruencia $\equiv \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ konečného indexu nasycujúca jazyk L.*

Uvažujme teraz naopak ľubovoľný jazyk $L \subseteq \Sigma^*$, ktorý je zjednotením niekoľkých tried ekvivalencie nejakej pravej kongruencie konečného indexu $\equiv$. Pravá kongruencia $\equiv$ potom – spolu s informáciou o tom, ktoré spomedzi jej tried ekvivalencie obsahujú slová z L – určuje nasledujúci deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ akceptujúci L:

- Za množinu stavov K vezmime množinu tried ekvivalencie relácie $\equiv$ – čiže $K = \Sigma^*/\equiv$. Táto množina je konečná, pretože $\equiv$ je konečného indexu.

- Pre všetky $u \in \Sigma^*$ a každé $c \in \Sigma$ položme $\delta([u]_\equiv, c) = [uc]_\equiv$. Aby sme dokázali korektnosť tejto definície, potrebujeme ukázať, že výstup prechodovej funkcie je *nezávislý na voľbe reprezentanta* triedy $[u]_\equiv$. Ak ale pre $u, v \in \Sigma^*$ je $[u]_\equiv = [v]_\equiv$, nutne $u \equiv v$; keďže je $\equiv$ pravá kongruencia, musí byť aj $uc \equiv vc$, z čoho $[uc]_\equiv = [vc]_\equiv$.

- Za počiatočný stav vezmime triedu ekvivalencie obsahujúcu prázdne slovo: $q_0 = [\varepsilon]_\equiv$.

- Za množinu akceptačných stavov vezmime množinu tých tried ekvivalencie relácie $\equiv$, ktoré obsahujú slová z L; čiže $F = \{[w]_\equiv \mid w \in L\}$. Korektnosť uvedeného zápisu je dôsledkom skutočnosti, že relácia $\equiv$ nasycuje jazyk L – v každej triede ekvivalencie sú teda buď výlučne slová z L, alebo výlučne slová z L^C.

Tvrdenie $L(A) = L$ by sme ľahko dokázali s využitím pozorovania, že pre všetky $w \in \Sigma^*$ je $([\varepsilon]_\equiv, w) \vdash_A^* ([w]_\equiv, \varepsilon)$. Dôsledkom je nasledujúca obrátená implikácia k tvrdeniu 1.

Tvrdenie 2. *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk nasýtený nejakou pravou kongruenciou konečného indexu na Σ^*. Potom je jazyk L regulárny.*

Ľahko možno overiť, že deterministický konečný automat zostrojený pomocou uvedenej konštrukcie k relácii ekvivalencie na obrázku 1b a k jazyku $L = \Sigma^* b \Sigma^* \cup (aa)^*$ je až na izomorfizmus (teda premenovanie stavov) zhodný s konečným automatom na obrázku 1a. Čitateľa tak snáď netreba presviedčať o skutočnosti, že *deterministické konečné automaty* bez nedosiahnuteľných stavov *a pravé kongruencie konečného indexu sú iba „odlišnými pohľadmi na ten istý objekt“*. Toto prepojenie je pre teóriu okolo Myhillovej-Nerodovej vety kľúčové.

2 Pravá syntaktická ekvivalencia

K *ľubovoľnému* (nie nutne regulárnemu) jazyku $L \subseteq \Sigma^*$ teraz kanonicky definujeme pravú kongruenciu na Σ^* – tzv. *pravú syntaktickú ekvivalenciu* $\equiv_L$ – nasycujúcu L. Táto relácia $\equiv_L$ je konečného indexu práve vtedy, keď je jazyk L regulárny – a počet jej tried ekvivalencie je v takom prípade rovný *najmenšiemu možnému* počtu stavov deterministického konečného automatu akceptujúceho L.

Definícia 2. Nech Σ je abeceda a $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk. *Pravá syntaktická ekvivalencia* indukovaná jazykom L je binárna relácia $\equiv_L$ na Σ^* taká, že pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ je

$$u \equiv_L v \iff (\forall z \in \Sigma^* \colon uz \in L \iff vz \in L).$$

Tvrdenie 3. *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk. Pravá syntaktická ekvivalencia $\equiv_L$ je pravá kongruencia na Σ^* nasycujúca L.*

Dôkaz. Dôkaz, že $\equiv_L$ je relácia ekvivalencie, je triviálny a prenechaný čitateľovi. Ak $u \equiv_L v$, z definície relácie $\equiv_L$ pre $z = \varepsilon$ dostávame $u \in L$ práve vtedy, keď $v \in L$; relácia $\equiv_L$ teda nasycuje L. Dokážeme, že $\equiv_L$ je pravá kongruencia. Nech $u, v \in \Sigma^*$ sú slová také, že $u \equiv_L v$ a $x \in \Sigma^*$. Z definície $\equiv_L$ vyplýva, že pre všetky $z \in \Sigma^*$ je $uz \in L \iff vz \in L$. Špeciálne je táto vlastnosť splnená pre všetky z také, že $z = xy$ pre nejaké $y \in \Sigma^*$. Pre všetky $y \in \Sigma^*$ teda $uxy \in L \iff vxy \in L$, z čoho podľa definície relácie $\equiv_L$ vyplýva $ux \equiv_L vx$. □

Význam pravej syntaktickej ekvivalencie spočíva predovšetkým v skutočnosti, že ide – ako dokážeme v tvrdení 4 – o *najhrubšiu pravú kongruenciu na Σ^* nasycujúcu L*. To znamená, že *ľubovoľná* pravá kongruencia $\equiv$ na Σ^* nasycujúca L vznikne z relácie $\equiv_L$ „rozbitím“ jej tried ekvivalencie ($\equiv$ je teda *zjemnením* relácie $\equiv_L$).

Tvrdenie 4. *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk a $\equiv$ je pravá kongruencia na Σ^* nasycujúca L. Nech $u, v \in \Sigma^*$ sú slová také, že $u \equiv v$. Potom $u \equiv_L v$.*

Dôkaz. Keďže je $\equiv$ pravá kongruencia, pre všetky $x \in \Sigma^*$ musí byť $ux \equiv vx$ – a keďže $\equiv$ nasycuje L, nutne buď $ux, vx \in L$, alebo $ux, vx \notin L$. Pre všetky $x \in \Sigma^*$ je teda $ux \in L \iff vx \in L$, z čoho $u \equiv_L v$. □

Ako sme dokázali vyššie, jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je regulárny práve vtedy, keď na Σ^* existuje pravá kongruencia *konečného indexu* nasycujúca L. Je zrejmé, že ak nie je konečného indexu *najhrubšia* pravá kongruencia nasycujúca L, tak nemôže byť konečného indexu ani žiadna iná takáto relácia. Dostávame tak nasledujúci dôsledok.

Dôsledok 1. *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk. Jazyk L je regulárny práve vtedy, keď je relácia $\equiv_L$ konečného indexu.*

V prípade, že je jazyk L regulárny, má relácia $\equiv_L$ *najmenší počet tried ekvivalencie* spomedzi všetkých pravých kongruencií konečného indexu nasycujúcich L – všetky takéto relácie sú totiž zjemnením relácie $\equiv_L$. Ľahko tiež vidieť, že $\equiv_L$ je *jediná* relácia na Σ^* s touto vlastnosťou; jediným zjemnením relácie $\equiv_L$ s rovnakým počtom tried je totiž sama relácia $\equiv_L$.

Ak sa v zmysle predchádzajúceho oddielu na toto tvrdenie pozrieme z perspektívy konečných automatov, zistíme, že relácia $\equiv_L$ zodpovedá deterministickému konečnému automatu akceptujúcemu jazyk L s najmenším možným počtom stavov. Tento automat je navyše – až na izomorfizmus, t. j. premenovanie stavov – určený jednoznačne a nazývame ho *minimálnym automatom* pre jazyk L.

Dôsledok 2. *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je regulárny jazyk. Potom existuje až na izomorfizmus jediný deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že $L(A) = L$ a súčasne pre každý deterministický konečný automat $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$ s $L(A') = L$ je $|K'| \geq |K|$. Automat A sa nazýva* minimálny automat *pre jazyk L a platí $\equiv_A = \equiv_L$.*

Ako hlavné posolstvo tohto a predchádzajúceho oddielu ešte raz zdôraznime skutočnosť, že *existuje korešpondencia medzi deterministickými konečnými automatmi nad abecedou* Σ bez nedosiahnuteľných stavov *a pravými kongruenciami konečného indexu na* Σ^*. Špeciálny prípad takejto pravej kongruencie – *pravá syntaktická ekvivalencia $\equiv_L$ indukovaná jazykom L* – navyše *zodpovedá* špeciálnemu deterministickému konečnému automatu – *minimálnemu automatu pre jazyk L.*

3 Myhillova-Nerodova veta

Tvrdenie známe ako *Myhillova-Nerodova veta* – aj keď pri tomto jeho znení by bolo presnejšie hovoriť iba o „Nerodovej vete“ – sme už v podstate dokázali v predchádzajúcich dvoch oddieloch.

Veta 1 (A. Nerode)**.** *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(*i*) *Jazyk L je regulárny.*

(*ii*) *Existuje pravá kongruencia konečného indexu na Σ^* nasycujúca L.*

(*iii*) *Pravá syntaktická ekvivalencia $\equiv_L$ je konečného indexu.*

Dôkaz. Vyplýva z tvrdenia 1, tvrdenia 2 a dôsledku 1. □

4 Riešené úlohy

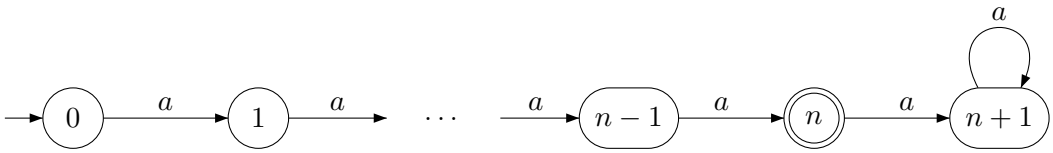
Zamerajme sa teraz na možnosti použitia teórie z predchádzajúcich oddielov. Začnime úlohami na zostrojenie *minimálneho automatu* rozoznávajúceho daný regulárny jazyk.

Vo všeobecnosti možno povedať, že deterministický konečný automat A rozoznávajúci regulárny jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je minimálny práve vtedy, keď sú všetky jeho stavy dosiahnuteľné a zároveň $\equiv_A = \equiv_L$; inklúzia $\equiv_A \subseteq \equiv_L$ je pritom splnená kedykoľvek $L(A) = L$. Na dôkaz minimálnosti automatu A bez nedosiahnuteľných stavov rozoznávajúceho L tak stačí dokázať inklúziu $\equiv_A \supseteq \equiv_L$. Tá je ekvivalentná nasledujúcemu tvrdeniu: ak automat A dočíta slová $u, v \in \Sigma^*$ v rôznych stavoch, nemôže platiť $u \equiv_L v$ – čiže existuje slovo $z \in \Sigma^*$ také, že *práve jedno* zo slov uz, vz patrí do L.

Úloha 1. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ uvažujme jednoprvkový jazyk $L_n = \{a^n\}$ nad unárnou abecedou $\Sigma = \{a\}$. Dokážte, že minimálny deterministický konečný automat rozoznávajúci jazyk L_n má presne $n + 2$ stavov.

Riešenie. Nech $n \in \mathbb{N}$ je dané. Označme $K_n = \{0, \ldots, n + 1\}$ a uvažujme deterministický konečný automat $A_n = (K_n, \Sigma, \delta, 0, \{n\})$ na obrázku 3. To znamená, že pre $q = 0, \ldots, n$ je $\delta(q, a) = q + 1$ a $\delta(n + 1, a) = n + 1$.

Je zrejmé, že $L(A_n) = L_n$ a že automat A_n neobsahuje žiadne nedosiahnuteľné stavy; zostáva dokázať minimálnosť automatu A_n. Za týmto účelom uvažujme slová $u, v \in \Sigma^*$ také, že pre nejaké $i, j \in K_n$ s $i < j$ je $(0, u) \vdash^* (i, \varepsilon)$ a $(0, v) \vdash^* (j, \varepsilon)$. Pre $k = n - i$ potom evidentne $(0, ua^k) \vdash^* (n, \varepsilon)$, kým $(0, va^k) \vdash^* (n + 1, \varepsilon)$. Preto $ua^k \in L_n$ a $va^k \notin L_n$, v dôsledku čoho nemôže platiť $u \equiv_{L_n} v$. Nutne teda $\equiv_{A_n} = \equiv_{L_n}$ a automat A_n je minimálny. □



Obr. 3: Deterministický konečný automat A_n.

Pri hľadaní minimálneho automatu pre regulárny jazyk L možno postupovať aj tak, že najprv zdola odhadneme počet tried pravej syntaktickej ekvivalencie $\equiv_L$. Ak pritom dokážeme, že táto relácia má aspoň n tried ekvivalencie a podarí sa nám nájsť n-stavový deterministický konečný automat A rozoznávajúci L, musí byť automat A nutne minimálny. Túto metódu použijeme pri riešení nasledujúcej úlohy.

Úloha 2. Pre všetky prirodzené čísla $n \geq 2$ uvažujme jazyk $L_n = \{a^k \mid k \in \mathbb{N};\ k \equiv 0 \pmod{n}\}$. Dokážte, že minimálny deterministický konečný automat akceptujúci L_n má presne n stavov.

Riešenie. Nech $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ a $i \neq j$. Pre $z = a^{n-i}$ potom $a^i z \in L_n$, kým $a^j z \notin L_n$. Slová a^i a a^j teda nemôžu byť v rovnakej triede pravej syntaktickej ekvivalencie $\equiv_{L_n}$, ktorá tak musí mať aspoň n tried. V dôsledku toho musí mať aj minimálny deterministický konečný automat rozoznávajúci L_n aspoň n stavov. Keďže je navyše jazyk L_n očividne rozoznávaný n-stavovým deterministickým konečným automatom, musí mať minimálny automat pre jazyk L_n presne n stavov. $\square$

V každej z predchádzajúcich dvoch úloh sme okrem iného dokázali aj dôležitú skutočnosť, že neexistuje žiadne $N \in \mathbb{N}$ také, že všetky regulárne jazyky možno akceptovať deterministickým konečným automatom s najviac N stavmi.

Na nasledujúcej úlohe si ukážeme ešte jeden spôsob hľadania minimálneho automatu pre jazyk L, pri ktorom najprv identifikujeme samotnú pravú syntaktickú ekvivalenciu $\equiv_L$ a následne k tejto pravej kongruencii zostrojíme deterministický konečný automat štandardnou konštrukciou predchádzajúcou tvrdeniu 2; výsledný automat rozoznávajúci L bude nutne minimálny.

Úloha 3. Nech $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \equiv 7 \pmod{11} \ \wedge\ \#_b(w) \equiv 19 \pmod{23}\}$. Nájdite minimálny deterministický konečný automat pre jazyk L.

Riešenie. Nech $\Sigma = \{a, b\}$; definujme na Σ^* binárnu reláciu $\equiv$ nasledovne:

$$\forall u, v \in \Sigma^* \colon u \equiv v \iff (\#_a(u) \equiv \#_a(v) \pmod{11} \ \wedge\ \#_b(u) \equiv \#_b(v) \pmod{23}).$$

Ľahko možno overiť, že $\equiv$ je pravou kongruenciou na Σ^* s $11 \cdot 23 = 253$ triedami ekvivalencie (relácia $\equiv$ je teda konečného indexu). Navyše $L = [a^7 b^{19}]_\equiv$, a teda $\equiv$ nasycuje L. Dôkaz uvedených tvrdení prenechávame čitateľovi (ktorému je silno odporúčané chopiť sa tejto príležitosti).

Relácia $\equiv$ je zjemnením $\equiv_L$ – pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ teda $u \equiv_L v$ kedykoľvek $u \equiv v$. Na dôkaz rovnosti $\equiv\, = \,\equiv_L$ teda stačí ukázať, že ak pre nejaké $u, v \in \Sigma^*$ platí $u \equiv_L v$, tak nutne aj $u \equiv v$.

Nepriamo. Nech $u \not\equiv v$, čiže $\#_a(u) \not\equiv \#_a(v) \pmod{11}$ alebo $\#_b(u) \not\equiv \#_b(v) \pmod{23}$. Ak teraz vezmeme slovo $z \in \Sigma^*$ také, že $\#_a(uz) \equiv 7 \pmod{11}$ a $\#_b(uz) \equiv 19 \pmod{23}$, tak tieto dve vlastnosti nemôžu byť súčasne splnené pre slovo vz. Dostávame teda $uz \in L$ a $vz \notin L$, z čoho $u \not\equiv_L v$.

Skutočne teda $\equiv\, = \,\equiv_L$. Na základe korešpondencie medzi pravými kongruenciami konečného indexu a deterministickými konečnými automatmi tak môžeme uzavrieť, že minimálny automat pre L je daný ako $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{23}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $q_0 = [0, 0]$, $F = \{[7, 19]\}$ a funkcia δ je pre každé $[i, j] \in K$ daná ako $\delta([i, j], a) = [i + 1, j]$ a $\delta([i, j], b) = [i, j + 1]$. $\square$

Myhillovu-Nerodovu vetu možno využiť aj ako efektívny nástroj na dokazovanie negatívnych výsledkov o regulárnosti jazykov, ako ukážeme na nasledujúcej úlohe.

Úloha 4. Dokážte, že jazyk $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nie je regulárny.

Riešenie. Dokážeme, že pravá syntaktická ekvivalencia $\equiv_L$ indukovaná jazykom L nie je konečného indexu, z čoho podľa Myhillovej-Nerodovej vety vyplynie $L \notin \mathscr{R}$.

Stačí ukázať, že pre žiadne dve prirodzené čísla $n < m$ nemôže byť $a^{n^2} \equiv_L a^{m^2}$. Predpokladajme opak a vezmime $z = a^{2n+1}$. Potom $a^{n^2}z = a^{n^2+2n+1} = a^{(n+1)^2} \in L$, ale $a^{m^2}z = a^{m^2+2n+1} \notin L$, keďže $(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1 > m^2 + 2n + 1 > m^2$. To je spor s definíciou relácie $\equiv_L$. □

Charakterizáciu regulárnych jazykov nad abecedou Σ ako jazykov nasýtených pravými kongruenciami konečného indexu na Σ^* možno využiť aj na relatívne elegantné dôkazy viacerých uzáverových vlastností triedy $\mathscr{R}$ – čo si ukážeme na nasledujúcich dvoch úlohách.

Úloha 5. Pomocou Myhillovej-Nerodovej vety dokážte uzavretosť triedy $\mathscr{R}$ na booleovské operácie (zjednotenie, prienik a komplement).

Riešenie. Nech L je regulárny jazyk nad abecedou Σ. Podľa Myhillovej-Nerodovej vety potom na Σ^* existuje pravá kongruencia $\equiv$ konečného indexu nasycujúca L. Relácia $\equiv$ ale nasycuje aj jazyk L^C – inak by niektorá jej trieda ekvivalencie musela súčasne obsahovať slovo z L^C a slovo z $(L^C)^C = L$ a relácia by nenasycovala ani jazyk L. Podľa Myhillovej-Nerodovej vety tak musí byť jazyk L^C regulárny.

Nech teraz L_1, L_2 sú regulárne jazyky nad abecedou Σ, pričom L_1 je nasýtený pravou kongruenciou konečného indexu $\equiv_1$ a L_2 je nasýtený pravou kongruenciou konečného indexu $\equiv_2$. Nie je ťažké dokázať, že relácia $\equiv\, = \,\equiv_1 \cap \equiv_2$ musí byť tiež pravá kongruencia konečného indexu. Pre všetky $w \in \Sigma^*$ ďalej

$$[w]_\equiv = [w]_{\equiv_1} \cap [w]_{\equiv_2},$$

pričom $[w]_{\equiv_1} \subseteq L_1$ kedykoľvek $w \in L_1$ a tiež $[w]_{\equiv_2} \subseteq L_2$ kedykoľvek $w \in L_2$. V dôsledku toho $[w]_\equiv \subseteq L_1 \cap L_2$ kedykoľvek $w \in L_1 \cap L_2$ a $[w]_\equiv \subseteq L_1 \cup L_2$ kedykoľvek $w \in L_1 \cup L_2$. Pravá kongruencia konečného indexu $\equiv$ tak nasycuje ako jazyk $L_1 \cap L_2$, tak aj jazyk $L_1 \cup L_2$ – a obidva tieto jazyky sú preto podľa Myhillovej-Nerodovej vety regulárne. □

Úloha 6. Pomocou Myhillovej-Nerodovej vety dokážte, že je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na pravý kvocient podľa *ľubovoľného* jazyka – ak je teda Σ abeceda, $L, L' \subseteq \Sigma^*$ a jazyk L je regulárny, musí byť regulárny aj jazyk

$$L/L' = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in L' \colon wx \in L\}.$$

Riešenie. Nech L je regulárny jazyk nad abecedou Σ a $\equiv$ je pravá kongruencia konečného indexu na Σ^* nasycujúca L. Ukážeme, že rovnaká kongruencia nasycuje aj všetky jazyky L/L', kde $L' \subseteq \Sigma^*$. Za účelom sporu predpokladajme, že existuje jazyk $L' \subseteq \Sigma^*$ taký, že L/L' nie je nasýtený kongruenciou $\equiv$. Potom existujú slová $u, v \in \Sigma^*$ také, že $u \equiv v$, $u \in L/L'$ a $v \notin L/L'$. Keďže $u \in L/L'$, existuje $x \in L'$ také, že $ux \in L$. Relácia $\equiv$ je pravá kongruencia, takže z $u \equiv v$ dostávame $ux \equiv vx$. Keďže teda $ux \in L$ a relácia $\equiv$ nasycuje L, musí byť aj $vx \in L$. To ale znamená, že $v \in L/L'$, čo je spor s naším predpokladom $v \notin L/L'$. Jazyk L/L' je teda nasýtený pravou kongruenciou konečného indexu $\equiv$, a teda musí byť regulárny podľa Myhillovej-Nerodovej vety. □