Myhillova-Nerodova veta

Peter Kostolányi

28. februára 2017

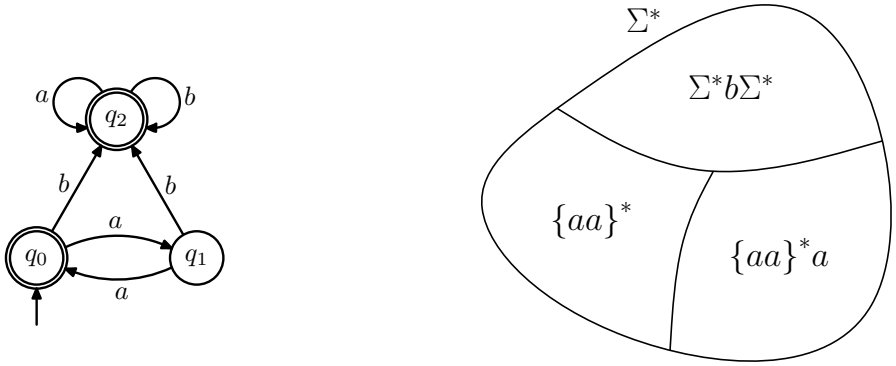
Deterministické konečné automaty a relácie ekvivalencie na Σ^*

Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je *deterministický* konečný automat (s úplnou prechodovou funkciou). Automat A prirodzeným spôsobom definuje reláciu R_A na Σ^* takú, že pre dvojicu slov $u, v \in \Sigma^*$ platí uR_Av práve vtedy, keď automat A dočíta slová u a v v rovnakom stave. Formálne:

$$\forall u, v \in \Sigma^* : uR_Av \iff (\exists q \in K : (q_0, u) \vdash_A^* (q, \varepsilon) \ \wedge \ (q_0, v) \vdash_A^* (q, \varepsilon)).$$

Je triviálnou úlohou overiť, že takto definovaná relácia R_A je *reflexívna* (automat A slová w a w vždy dočíta v rovnakom stave), *symetrická* (ak A dočíta slová u, v v rovnakom stave, tak dočíta v rovnakom stave aj slová v, u) a *tranzitívna* (ak A dočíta v rovnakom stave slová x, y a y, z, tak dočíta v rovnakom stave aj slová x, z). Relácia R_A je teda *reláciou ekvivalencie na* Σ^*.

Príklad deterministického konečného automatu A nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ a jemu zodpovedajúcej relácie R_A (určujúcej rozklad Σ^* na tri triedy ekvivalencie) je na obrázku 1.



(a) Deterministický konečný automat A. **(b)** Triedy ekvivalencie relácie R_A.

Obr. 1: Deterministický konečný automat A a jemu zodpovedajúca relácia ekvivalencie R_A na Σ^*.

Okamžite si možno všimnúť tri podstatné vlastnosti relácie ekvivalencie R_A:

1. Nech $u, v \in \Sigma^*$ sú slová také, že uR_Av. Potom platí buď $u, v \in L(A)$, alebo $u, v \notin L(A)$. Slová u a v totiž automat A dočíta v rovnakom stave, ktorý je buď akceptačný, alebo neakceptačný. V každej triede ekvivalencie relácie R_A tak sú buď výlučne slová z $L(A)$, alebo výlučne slová z komplementu $L(A)$. Jazyk $L(A)$ je preto *zjednotením niekoľkých tried ekvivalencie relácie* R_A. Napríklad pre automat A na obrázku 1 platí $L(A) = \Sigma^* b \Sigma^* \cup \{aa\}^*$.

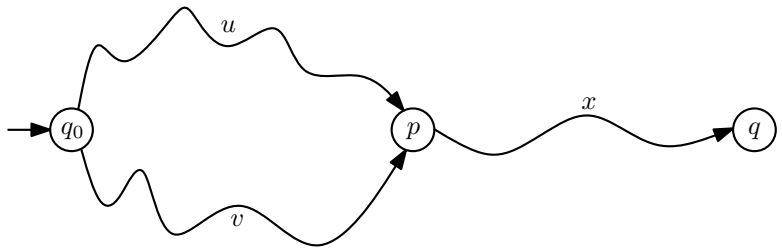
2. Keďže má automat A konečne veľa stavov, relácia R_A má konečne veľa tried ekvivalencie. Hovoríme, že relácia R_A je *konečného indexu* a počet jej tried ekvivalencie nazývame *indexom* relácie R_A.

3. Ak automat A dočíta slová u, v v rovnakom stave, dočíta v rovnakom stave aj slová ux, vx, kde x je ľubovoľné – táto situácia je schematicky znázornená na obrázku 2. Inými slovami, relácia R_A je *sprava invariantná*, čiže pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ platí

$$uR_Av \Rightarrow \forall x \in \Sigma^* : uxR_Avx.$$

Priamym dôsledkom uvedených troch pozorovaní je nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 1. *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je regulárny jazyk. Potom na Σ^* existuje sprava invariantná relácia ekvivalencie R konečného indexu taká, že L je zjednotením niekoľkých jej tried ekvivalencie.*



Obr. 2: Ak deterministický konečný automat A dočíta slová u a v v rovnakom stave, dočíta v rovnakom stave aj slová ux a vx pre ľubovoľné slovo x.

Uvažujme teraz ľubovoľný jazyk $L \subseteq \Sigma^*$, ktorý je zjednotením niekoľkých tried ekvivalencie nejakej sprava invariantnej relácie ekvivalencie konečného indexu R. Ukážeme, že relácia R spoločne s informáciou, ktoré triedy ekvivalencie zodpovedajú slovám z L, jednoznačne určuje deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ akceptujúci L.

Označme symbolom $[w]_R$ triedu ekvivalencie relácie R obsahujúcu slovo w. Automat A potom skonštruujeme nasledovne:

- Za množinu stavov K vezmime množinu tried ekvivalencie relácie R, čo možno formálne zapísať ako $K = \{[w]_R \mid w \in \Sigma^*\}$. Táto množina je konečná, pretože relácia R je konečného indexu.
- Pre každú triedu ekvivalencie $[u]_R$ (kde $u \in \Sigma^*$) a každé $c \in \Sigma$ položme $\delta([u]_R, c) = [uc]_R$. Takto daná prechodová funkcia je korektná iba v prípade, že jej výstup *nezávisí na voľbe reprezentanta* triedy $[u]_R$. Treba teda ukázať, že ak platí $[u]_R = [v]_R$ (čiže ak uRv), tak nutne platí aj $[uc]_R = [vc]_R$. Keďže je ale relácia R sprava invariantná, uRv implikuje $ucRvc$, a teda aj $[uc]_R = [vc]_R$.
- Za počiatočný stav vezmime triedu ekvivalencie obsahujúcu prázdne slovo: $q_0 = [\varepsilon]_R$.
- Za množinu akceptačných stavov vezmime množinu tých tried ekvivalencie relácie R, ktoré obsahujú slová z L; čiže $F = \{[w]_R \mid w \in L\}$. Korektnosť uvedeného zápisu je dôsledkom skutočnosti, že L je zjednotením niekoľkých tried ekvivalencie relácie R – v každej triede ekvivalencie sú teda výlučne slová z L alebo výlučne slová z L^C.

Tvrdenie $L(A) = L$ dokazovať nebudeme, ale jeho platnosť by mala byť očividná. Dôsledkom je obrátená implikácia z tvrdenia 1:

Tvrdenie 2. *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je zjednotením niekoľkých tried ekvivalencie nejakej sprava invariantnej relácie ekvivalencie konečného indexu na Σ^*. Potom je jazyk L regulárny.*

Ľahko možno overiť, že deterministický konečný automat zostrojený pomocou uvedenej konštrukcie k relácii ekvivalencie na obrázku 1b a k jazyku $L = \Sigma^* b \Sigma^* \cup \{aa\}^*$ je až na izomorfizmus (teda premenovanie stavov) zhodný s konečným automatom na obrázku 1a. Čitateľa tak snáď netreba presviedčať o skutočnosti, že *deterministické konečné automaty a sprava invariantné relácie ekvivalencie konečného indexu sú iba „odlišnými pohľadmi na ten istý objekt“*. Toto spojenie je pre teóriu okolo Myhillovej-Nerodovej vety kľúčové.

Pravá syntaktická ekvivalencia

V nasledujúcom ukážeme, že k ľubovoľnému (nie nutne regulárnemu) jazyku $L \subseteq \Sigma^*$ možno definovať kanonickú sprava invariantnú reláciu ekvivalencie na Σ^* – tzv. *pravú syntaktickú ekvivalenciu* – takú, že L je zjednotením časti jej tried. Táto relácia je navyše konečného indexu práve vtedy, keď je jazyk L regulárny; počet jej tried ekvivalencie je v takom prípade rovný *najmenšiemu možnému* počtu stavov deterministického konečného automatu akceptujúceho L.

Definícia 1. Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk. *Pravá syntaktická ekvivalencia* indukovaná jazykom L je relácia R_L taká, že pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ platí

$$uR_Lv \iff (\forall z \in \Sigma^* : uz \in L \iff vz \in L).$$

Tvrdenie 3. *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk. Pravá syntaktická ekvivalencia R_L je sprava invariantná relácia ekvivalencie na Σ^* a jazyk L je zjednotením častí jej tried.*

Dôkaz. Dôkaz, že R_L je relácia ekvivalencie, je triviálny a prenechaný čitateľovi. Ak uR_Lv a ak zvolíme $z = \varepsilon$, dostávame $u \in L$ práve vtedy, keď $v \in L$; inými slovami, L je zjednotením častí tried ekvivalencie relácie R_L. Dokážeme, že relácia R_L je sprava invariantná. Nech $u, v \in \Sigma^*$ sú slová také, že uR_Lv a $x \in \Sigma^*$ je ľubovoľné. Z definície R_L vyplýva, že pre všetky $z \in \Sigma^*$ platí $uz \in L \iff vz \in L$. Špeciálne táto ekvivalencia platí pre všetky z také, že $z = xy$ pre nejaké $y \in \Sigma^*$. Inými slovami, pre všetky $y \in \Sigma^*$ platí $uxy \in L \iff vxy \in L$, z čoho podľa definície relácie R_L vyplýva uxR_Lvx. Relácia R_L teda je sprava invariantná. □

Význam pravej syntaktickej ekvivalencie spočíva predovšetkým v skutočnosti, že ide, ako dokážeme v tvrdení 4, o *najhrubšiu sprava invariantnú reláciu ekvivalencie na Σ^* takú, že L je zjednotením častí jej tried.* To znamená, že ak je jazyk L zjednotením častí tried ekvivalencie nejakej sprava invariantnej relácie ekvivalencie R, tak R vznikne z relácie R_L „rozbitím“ jej tried ekvivalencie (teda R je *zjemnením* relácie R_L).

Tvrdenie 4. *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk a R je sprava invariantná relácia ekvivalencie na Σ^* taká, že L je zjednotením častí jej tried. Nech $u, v \in \Sigma^*$ sú slová také, že uRv. Potom uR_Lv.*

Dôkaz. Z pravej invariancie relácie R vyplýva, že pre všetky $x \in \Sigma^*$ platí $uxRvx$. Keďže je ale jazyk L zjednotením častí tried relácie R, v takom prípade platí buď $ux, vx \in L$, alebo $ux, vx \notin L$. Inými slovami, pre všetky $x \in \Sigma^*$ je $ux \in L \iff vx \in L$, a teda uR_Lv. □

Ako sme dokázali vyššie, jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je regulárny práve vtedy, keď na Σ^* existuje sprava invariantná relácia ekvivalencie *konečného indexu* taká, že L je zjednotením niekoľkých jej tried. Je zrejmé, že ak nie je konečného indexu najhrubšia takáto relácia, tak nemôže byť konečného indexu ani žiadna iná. Preto dostávame nasledujúci dôsledok.

Dôsledok 1. *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk. Jazyk L je regulárny práve vtedy, keď je relácia R_L konečného indexu.*

V prípade, že je jazyk L regulárny, má relácia R_L *najmenší počet tried ekvivalencie* spomedzi všetkých sprava invariantných relácií ekvivalencie konečného indexu R takých, že L je zjednotením niekoľkých tried relácie R – všetky takéto relácie sú totiž zjemnením relácie R_L. Ľahko tiež vidieť, že R_L je *jediná* relácia na Σ^* s touto vlastnosťou; jediným zjemnením relácie R_L s rovnakým počtom tried je totiž sama relácia R_L.

Ak sa (v zmysle predchádzajúceho oddielu) na toto tvrdenie pozrieme z perspektívy konečných automatov, zistíme, že relácia R_L zodpovedá deterministickému konečnému automatu s najmenším počtom stavov, ktorý akceptuje jazyk L. Tento automat je navyše (až na izomorfizmus, t.j. premenovanie stavov) určený jednoznačne a nazývame ho *minimálnym automatom* pre jazyk L.

Dôsledok 2. *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je regulárny jazyk. Potom existuje (až na izomorfizmus) jednoznačne určený deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že $L(A) = L$ a súčasne pre každý deterministický konečný automat $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$ s $L(A') = L$ platí $|K'| \geq |K|$. Automat A sa nazýva* minimálny automat *pre jazyk L a platí $R_A = R_L$.*

Ako hlavné posolstvo tohto a predchádzajúceho oddielu ešte raz zdôraznime skutočnosť, že *existuje prirodzená korešpondencia medzi deterministickými konečnými automatmi nad abecedou Σ a sprava invariantnými reláciami ekvivalencie konečného indexu na Σ^*. Navyše, špeciálny prípad takejto relácie – pravá syntaktická ekvivalencia indukovaná jazykom L – zodpovedá špeciálnemu deterministickému konečnému automatu – minimálnemu automatu pre jazyk L.*

Myhillova-Nerodova veta

Tvrdenie známe ako *Myhillova-Nerodova veta* (aj keď pri tomto jej znení by možno bolo presnejšie iba „Nerodova veta“) sme už v podstate dokázali v predchádzajúcich dvoch oddieloch.

Veta 1 (Myhill, Nerode)**.** *Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(*i*) *L je regulárny.*

(*ii*) *Existuje sprava invariantná relácia ekvivalencie konečného indexu na Σ^* taká, že L je zjednotením niekoľkých jej tried.*

(*iii*) *Pravá syntaktická ekvivalencia R_L je konečného indexu.*

Dôkaz. Vyplýva priamo z tvrdenia 1, tvrdenia 2 a dôsledku 1. □

Použitie Myhillovej-Nerodovej vety

V rámci tohto oddielu ukážeme dva typické príklady použitia Myhillovej-Nerodovej vety. Prvým z nich je konštrukcia minimálneho automatu k danému regulárnemu jazyku. Postup, ktorý využijeme pri riešení nasledujúcej ukážkovej úlohy pozostáva z nájdenia pravej syntaktickej ekvivalencie R_L pre jazyk L a z dôkazu, že skutočne ide o pravú syntaktickú ekvivalenciu.

Úloha 1. Nech $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \equiv 7 \pmod{11} \ \wedge \ \#_b(w) \equiv 19 \pmod{23}\}$. Nájdite minimálny (deterministický konečný) automat pre jazyk L.

Riešenie. Definujme na $\Sigma^* = \{a,b\}^*$ reláciu R nasledovne:

$$\forall u, v \in \Sigma^* : uRv \iff \#_a(u) \equiv \#_a(v) \pmod{11} \ \wedge \ \#_b(u) \equiv \#_b(v) \pmod{23}.$$

Ľahko možno overiť, že R je sprava invariantnou reláciou ekvivalencie na Σ^* s $11 \cdot 23 = 253$ triedami ekvivalencie (R je teda konečného indexu). Navyše $L = [a^7 b^{19}]_R$, a teda L je zjednotením niekoľkých tried ekvivalencie relácie R (presnejšie jednej). Poriadny dôkaz uvedených tvrdení prenechávame čitateľovi (ktorému je silno odporúčané chopiť sa tejto príležitosti).

Relácia R je zjemnením R_L – ak teda pre nejaké $u, v \in \Sigma^*$ platí uRv, tak aj uR_Lv. Na dôkaz $R = R_L$ teda stačí ukázať, že ak pre nejaké $u, v \in \Sigma^*$ platí uR_Lv, tak nutne aj uRv.

Nepriamo. Nech neplatí uRv, čiže $\#_a(u) \not\equiv \#_a(v) \pmod{11}$ alebo $\#_b(u) \not\equiv \#_b(v) \pmod{23}$. Ak teraz vezmeme slovo $z \in \Sigma^*$ také, že $\#_a(uz) \equiv 7 \pmod{11}$ a $\#_b(uz) \equiv 19 \pmod{23}$, tak táto vlastnosť nemôže platiť pre slovo vz. Teda $uz \in L$, kým $vz \notin L$. Preto neplatí ani uR_Lv.

Dokázali sme teda, že skutočne $R = R_L$. Na základe prirodzenej korešpondencie medzi sprava invariantnými reláciami ekvivalencie konečného indexu a deterministickými konečnými automatmi potom môžeme uzavrieť, že minimálny automat pre jazyk L je daný ako $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{23}$, $\Sigma = \{a,b\}$, $q_0 = [0,0]$, $F = \{[7,19]\}$ a prechodová funkcia δ je pre každé $[i,j] \in K$ daná predpismi $\delta([i,j],a) = [i+1,j]$ a $\delta([i,j],b) = [i,j+1]$. □

Myhillovu-Nerodovu vetu možno využiť aj ako efektívny nástroj na vyvracanie regularity jazykov, ako ukážeme na nasledujúcej úlohe.

Úloha 2. Dokážte, že jazyk $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nie je regulárny.

Riešenie. Dokážeme, že pravá syntaktická ekvivalencia R_L indukovaná jazykom L nie je konečného indexu, z čoho podľa Myhillovej-Nerodovej vety vyplýva, že L nie je regulárny.

Zrejme stačí ukázať, že (pre ľubovoľné $n, m \in \mathbb{N}$) slovo a^{n^2} nemôže byť v relácii R_L so slovom a^{m^2} takým, že $m > n$. Za účelom sporu predpokladajme opak a vezmime $z = a^{2n+1}$. Potom $a^{n^2}z = a^{n^2+2n+1} = a^{(n+1)^2} \in L$, ale $a^{m^2}z = a^{m^2+2n+1} \notin L$, keďže $(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1 > m^2 + 2n + 1$. To je spor s definíciou relácie R_L. □

Je jedným z kľúčových výsledkov teórie automatov, že neexistuje žiadne $N \in \mathbb{N}$ také, že všetky regulárne jazyky možno akceptovať deterministickým konečným automatom s najviac N stavmi. Cieľom nasledujúcej úlohy je dokázať toto tvrdenie.

Úloha 3. Dokážte, že ku každému $n \in \mathbb{N}$ existuje regulárny jazyk $L_n \in \mathscr{R}$ taký, že ľubovoľný deterministický konečný automat akceptujúci L_n musí mať aspoň n stavov.

Riešenie. Tvrdenie očividne stačí dokázať pre $n \geq 2$. K ľubovoľnému takému n vezmime jazyk

$$L_n = \{a^k \mid k \in \mathbb{N};\ k \equiv 0 \pmod{n}\}.$$

Dokážeme, že ľubovoľný deterministický konečný automat akceptujúci L_n musí mať aspoň n stavov.

Uvažujme pravú syntaktickú ekvivalenciu R_{L_n}. Nech $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ a $i \neq j$. Ak vezmeme $z = a^{n-i}$, tak potom zjavne $a^i z \in L_n$, kým $a^j z \notin L_n$. Slová a^i a a^j teda nemôžu byť v rovnakej triede pravej syntaktickej ekvivalencie R_{L_n}, ktorá tak musí mať aspoň n tried. Dôsledkom je, že deterministický konečný automat akceptujúci L_n musí mať aspoň n stavov. □