Syntaktická analýza zdola nahor (1. časť)

Peter Kostolányi

2. mája 2017

Syntaktickú analýzu (angl. tiež *parsing*) možno zhruba charakterizovať ako proces, ktorého hlavným cieľom je pre danú (zvyčajne bezkontextovú) gramatiku G a slovo w zistiť, či $w \in L(G)$ – v prípade kladnej odpovede je žiadúcim výstupom syntaktickej analýzy aj nejaký strom odvodenia slova w v gramatike G; v prípade $w \notin L(G)$ zas nejaká informácia o príčine tejto skutočnosti. Algoritmy realizujúce túto úlohu nachádzajú uplatnenie pri tvorbe kompilátorov.

V nasledujúcom sa zameriame výlučne na rozhodovanie príslušnosti slova w do jazyka $L(G)$; všetky popísané algoritmy ale bude možné ľahko upraviť tak, aby súčasťou výstupu bol aj strom odvodenia resp. informácia o príčine jeho neexistencie.

Algoritmus CYK realizuje opísanú úlohu pre všeobecné bezkontextové gramatiky. Počas jeho vykonávania je ale nutné udržiavať v pamäti tabuľku o veľkosti kvadratickej od dĺžky slova w, ktorá môže byť v praxi veľmi veľká. Podobne môže predstavovať problém aj kubická časová zložitosť algoritmu CYK. Pre praktické účely je preto nutné (alebo v súčasnosti aspoň maximálne výhodné) mať k dispozícii algoritmus, ktorý syntaktickú analýzu realizuje s menšími pamäťovými a časovými nárokmi. Metódy syntaktickej analýzy zdola nahor, založené na schéme „posuň a redukuj“, sú v praxi najrozšírenejšími príkladmi takýchto efektívnych algoritmov. Tieto na rozdiel od algoritmu CYK nerealizujú syntaktickú analýzu pre všeobecné bezkontextové gramatiky, ale iba pre gramatiky s určitými vlastnosťami. Pre praktické účely sú však väčšinou aj takéto mierne obmedzené algoritmy plne postačujúce.

Syntaktická analýza zdola nahor

Algoritmy syntaktickej analýzy zdola nahor pracujú na báze *spätnej* simulácie odvodenia daného slova w v danej gramatike G. Slovo w teda najprv (nejakým zatiaľ bližšie nešpecifikovaným spôsobom) upravia na slovo w' také, že $w' \Rightarrow w$, slovo w' ďalej upravia na slovo w'' také, že $w'' \Rightarrow w'$ a tak ďalej. V prípade, že algoritmus takýmto spôsobom zredukuje slovo w na počiatočný neterminál σ, platí $\sigma \Rightarrow^* w$, a teda $w \in L(G)$. Algoritmy syntaktickej analýzy zdola nahor teda postupujú od listov stromu odvodenia (ktorých zreťazenie je w) k jeho koreňu (počiatočnému neterminálu σ), čo odôvodňuje ich pomenovanie.

Väčšina algoritmov syntaktickej analýzy zdola nahor číta slovo w postupne *zľava doprava*, pričom sa konštruuje *pravé krajné* odvodenie slova w.

Označenie 1. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Symbolom $\Rightarrow_{rm}$ označujeme reláciu *kroku pravého krajného odvodenia* v gramatike G. Pre $u, v \in (N \cup T)^*$ teda platí $u \Rightarrow_{rm} v$ práve vtedy, keď pre nejaké $u_1, x \in (N \cup T)^*$, $u_2 \in T^*$ a $\xi \in N$ platí $u = u_1 \xi u_2$, $v = u_1 x u_2$ a $\xi \to x \in P$.

Definícia 1. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. *Pravá vetná forma* v gramatike G je slovo $w \in (N \cup T)^*$ také, že $\sigma \Rightarrow^*_{rm} w$.

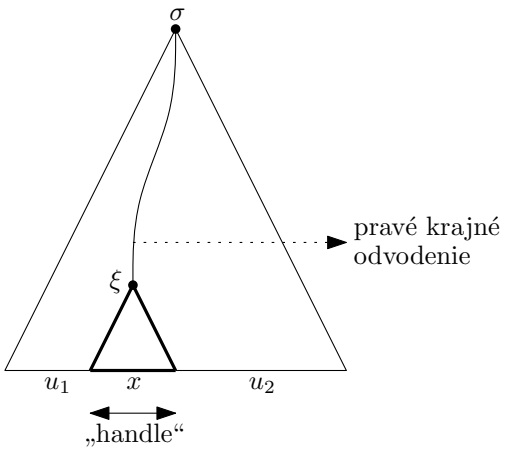
Definícia 2. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika a $w \in (N \cup T)^*$ je pravá vetná forma v gramatike G. Podslovo x pravej vetnej formy w sa nazýva „*handle*“[1], ak pre nejaké $u_1 \in (N \cup T)^*$, $u_2 \in T^*$ a $\xi \in N$ platí

$$\sigma \Rightarrow^*_{rm} u_1 \xi u_2 \Rightarrow_{rm} u_1 x u_2,$$

pričom $w = u_1 x u_2$.

„Handle“ je teda podslovo x pravej vetnej formy w, ktorého zredukovaním podľa nejakého pravidla $\xi \to x$ vznikne predchádzajúca vetná forma v niektorom pravom krajnom odvodení vetnej formy w v gramatike G. Pojem „handle“ je ilustrovaný aj na obrázku 1, ktorý vysvetľuje voľbu tohto termínu – obrázok totiž nápadne pripomína rukoväť používanú na nosenie balíkov.

[1] Priamočiary slovenský preklad „rukoväť“ sa nezaužíval.



Obr. 1: Podslovo x je „handle“ v pravej vetnej forme u_1xu_2. Keďže odvodenie na obrázku je pravé krajné, podslovo u_2 musí obsahovať výlučne terminálne symboly. Samotný termín „handle“ je odvodený od tvaru tohto obrázku, ktorý pripomína rukoväť používanú na nosenie balíkov.

Algoritmy syntaktickej analýzy zdola nahor, ktoré sú založené na schéme „posuň a redukuj“ opísanej nižšie, zakaždým nájdu „handle“ v danom slove (presnejšie: nájdu „kandidátku na handle“, keďže ani nie je isté, či je dané slovo vetnou formou v G), ktorú zredukujú podľa niektorého pravidla, čím vznikne „kandidátka na predchádzajúcu vetnú formu“.

Ak je gramatika viacznačná – teda ak v nej existuje viac ako jedno pravé krajné odvodenie niektorého slova – môže jedna vetná forma w obsahovať aj viacero rôznych „handle“. V takom prípade ale ťažko očakávať, že by sa dala robiť syntaktická analýza zdola nahor deterministicky (a bez nutnosti úplného prehľadávania). Deterministické algoritmy teda budú narábať vždy len s určitými triedami *jednoznačných* gramatík. V jednoznačnej gramatike obsahuje každá pravá vetná forma nanajvýš jednu „handle“ (presnejšie: vetná forma σ neobsahuje žiadnu „handle“ a ostatné pravé vetné formy obsahujú práve jednu „handle“).

Všeobecná schéma algoritmu „posuň a redukuj“

Väčšina v praxi používaných algoritmov syntaktickej analýzy zdola nahor pracuje na báze schémy „posuň a redukuj“ (angl. *„shift-reduce“*), ktorú teraz popíšeme. Všeobecný variant schémy „posuň a redukuj“ je nedeterministický, nekladie žiadne obmedzenia na bezkontextovú gramatiku na vstupe a možno ho implementovať na zásobníkovom automate. Neskôr ukážeme, že pre isté triedy *špeciálnych* bezkontextových gramatík možno túto schému determinizovať a získať tak algoritmus v pravom slova zmysle.

Vstup: Bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ a slovo $w \in T^*$.

Schéma algoritmu:

- Nedeterministicky vykonaj jednu z nasledujúcich dvoch operácií:
  a) Zmaž z vrchu zásobníka nejaké slovo x a nahraď ho neterminálom ξ takým, že $\xi \to x \in P$. (*Redukuj* podľa $\xi \to x$.)
  b) Prečítaj jeden symbol zo vstupu a pridaj ho na zásobník. (*Posuň.*)
- Opakuj tento proces, až kým:
  a) Na vstupe nezostáva žiaden neprečítaný symbol a na zásobníku je počiatočná vetná forma σ. V takom prípade *akceptuj* ($w \in L(G)$).
  b) Nemožno vykonať ani operáciu „posuň“, ani operáciu „redukuj“.

Aspoň jedna vetva výpočtu takéhoto zásobníkového automatu na vstupe w akceptuje práve vtedy, keď $w \in L(G)$. Uvedenú schému tak možno chápať aj ako alternatívny dôkaz, že ku každej bezkontextovej gramatike existuje ekvivalentný zásobníkový automat. Každá akceptačná vetva navyše „nájde“ nejaké *pravé krajné* odvodenie slova w. Ľahko totiž vidno, že ak napríklad

$$\sigma \Rightarrow_{rm} \alpha\beta \Rightarrow_{rm} \alpha b \Rightarrow_{rm} ab$$

je pravé krajné odvodenie, môže schéma algoritmu „posuň a redukuj“ pracovať nasledovne („dno“ zásobníka označujeme symbolom $\vdash$, ktorého podobnosť s označením relácie kroku výpočtu v automate je čisto náhodná).

Zásobník	**Zvyšok vstupu**	**Operácia**
$\vdash$	ab	Posuň
$\vdash a$	b	Redukuj podľa $\alpha \to a$
$\vdash \alpha$	b	Posuň
$\vdash \alpha b$	ε	Redukuj podľa $\beta \to b$
$\vdash \alpha\beta$	ε	Redukuj podľa $\sigma \to \alpha\beta$
$\vdash \sigma$	ε	Akceptuj

Napríklad odvodenie

$$\sigma \Rightarrow \alpha\beta \Rightarrow a\beta \Rightarrow ab$$

ale schémou „posuň a redukuj“ nájsť nemožno, pretože po redukcii podľa $\beta \to b$ musí byť na zásobníku vetná forma $a\beta$. Schéma „posuň a redukuj“ už teda iba môže zredukovať kompletnú vetnú formu $a\beta$, symbol β, prípadne ε (pokiaľ v gramatike existujú pravidlá s danými pravými stranami). Nemá ale ako zredukovať symbol a, keďže mu v tom „prekáža“ symbol β. Z tohto príkladu by teda malo byť zrejmé, že nedeterministická schéma algoritmu „posuň a redukuj“ skutočne „hľadá“ výlučne pravé krajné odvodenia.

Poznámka 1. V každom kroku schémy „posuň a redukuj“ zodpovedá zreťazenie obsahu zásobníka a neprečítanej časti vstupu aktuálnej „kandidátke na vetnú formu“ gramatiky G, pričom prefix na zásobníku intuitívne zodpovedá jej časti, ktorá ešte v hľadanom (a odzadu konštruovanom) pravom krajnom odvodení nebola „sterminálnená“. Ak je navyše gramatika jednoznačná, môže byť v akceptačnej vetve na zásobníku prefix siahajúci najviac po koniec (jedinej) „handle“. Pre viacznačné gramatiky je zas v každej akceptačnej vetve vždy na zásobníku prefix siahajúci najviac po koniec *niektorej* „handle“. Takéto prefixy pravých vetných foriem sa zvyknú nazývať *životaschopné prefixy* (angl. *viable prefixes*).[2] S týmto pojmom budeme pracovať v druhej časti týchto poznámok, v súvislosti s LR gramatikami.

V praxi je nedeterministická schéma „posuň a redukuj“ užitočná len málo, keďže jej determinizácia preskúmaním všetkých nedeterministických vetiev je neefektívna. Preto sa skúmali predovšetkým *triedy gramatík, pre ktoré možno schému „posuň a redukuj“ realizovať deterministicky* – v každom kroku musí byť zrejmé, či posunúť alebo redukovať a ak redukovať, musí byť zrejmé, podľa ktorého pravidla. Musí teda existovať kritérium, pomocou ktorého možno deterministicky rozoznať situáciu, keď je možné, že na vrchu zásobníka je „handle“. V takom prípade musí byť táto „handle“ x daná jednoznačne a nesmie byť možné, že na zásobníku vznikne „handle“ až po posunutí symbolu zo vstupu. Navyše musí existovať práve jeden neterminál ξ taký, že $\xi \to x \in P$ – inak by vznikla nejednoznačnosť ohľadom pravidla, podľa ktorého redukovať.

V nasledujúcom sa budeme zaoberať *konkrétnymi triedami* takýchto gramatík. Najprv preskúmame tzv. *jednoducho precedenčné gramatiky*, pre ktoré je možné rozhodnúť medzi operáciou „posuň“ a operáciou „redukuj“ podľa dvojíc po sebe idúcich symbolov v slove. Na ďalšom cvičení sa potom budeme zaoberať o niečo zložitejšou triedou gramatík, tzv. LR gramatikami, ktoré sú momentálne štandardom používaným v praxi.

[2] Definície životaschopných prefixov sa pre viacznačné gramatiky môžu líšiť; podstatná je ale iba ich definícia pre jednoznačné gramatiky.

Jednoducho precedenčné gramatiky

Jednoducho precedenčné gramatiky sú bezkontextové gramatiky, ktorých symboly spĺňajú isté podmienky umožňujúce v schéme „posuň a redukuj“ na základe dvojice po sebe idúcich symbolov rozhodnúť, či posunúť alebo redukovať. V prípade redukovania je navyše možné deterministicky určiť „kandidátku na handle“, ktorú treba zredukovať, ako aj neterminál, ktorým je potrebné toto redukované podslovo na zásobníku nahradiť.

Poznámka 2. Determinizácia schémy „posuň a redukuj“ bude pre jednoducho precedenčné gramatiky možná iba za predpokladu, že jej vstup pozostáva zo slova w nasledovaného špeciálnym symbolom $\dashv$ označujúcim koniec vstupného slova. Tento drobný technický detail je ale zaujímavý iba z teoretického hľadiska – v praxi nie je s pridaním symbolu $\dashv$ očividne žiaden problém.

V druhej časti týchto poznámok budeme pracovať s tzv. LR(0) gramatikami, pre ktoré tento predpoklad nie je nutný.

Pri definícii jednoducho precedenčných gramatík budeme využívať tri špeciálne binárne relácie na množine $N \cup T$, ktoré budeme označovať symbolmi $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$. Uveďme najprv (jemne nepresný) intuitívny význam týchto relácií pre gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$:

- $\doteq$: Pre $a, b \in N \cup T$ platí $a \doteq b$, ak „je možné“, že v gramatike G existuje pravá vetná forma $w = xyz$ s „handle“ y takou, že $y = y_1 a b y_2$ pre nejaké slová y_1, y_2. Stručnejšie povedané, $a \doteq b$, ak „je možné“, že sa symboly a a b môžu vyskytovať za sebou v „handle“.

- $\lessdot$: Pre $a, b \in N \cup T$ platí $a \lessdot b$, ak „je možné“, že v gramatike G existuje pravá vetná forma $w = xyz$ s „handle“ y taká, že $x = x'a$ a $y = by'$ pre nejaké slová x', y'. Stručnejšie povedané, $a \lessdot b$, ak „je možné“, že sa symbol a môže vyskytovať ako posledný symbol pred „handle“ začínajúcou symbolom b.

- $\gtrdot$: Pre $a, b \in N \cup T$ platí $a \gtrdot b$, ak „je možné“, že v gramatike G existuje pravá vetná forma $w = xyz$ s „handle“ y taká, že $y = y'a$ a $z = bz'$ pre nejaké slová y', z'. Stručnejšie povedané, $a \gtrdot b$, ak „je možné“, že sa symbol a môže vyskytovať ako posledný symbol v „handle“, ktorá je vo vetnej forme nasledovaná symbolom b.

Poznámka 3. „Nepresnosť“ tejto charakterizácie relácií $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$ spočíva predovšetkým vo vágnosti slovného spojenia „je možné“, bez ktorého by išlo len o implikácie sprava doľava a nie o ekvivalencie.

Ak pre dvojicu symbolov a, b platí niektoré z tvrdení, tak sú tieto symboly v zodpovedajúcej relácii. Relácie $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$ však formálne definujeme so zreteľom na ich efektívnu „zostrojiteľnosť“, a preto dvojica symbolov bude môcť byť v niektorej z relácií aj bez toho, aby pre ňu platilo zodpovedajúce tvrdenie. Ak napríklad gramatika G nie je redukovaná a obsahuje pravidlo $\xi \to ab$ také, že symboly a a b sa nemôžu vyskytovať v žiadnej vetnej forme gramatiky G, stále bude platiť $a \doteq b$, hoci sa tieto dva symboly očividne nemôžu vyskytovať za sebou v žiadnej „handle“ (pretože „handle“ je definovaná iba pre pravé vetné formy).

Pristúpme teraz k naozajstnej formálnej definícii relácií $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$. Za týmto účelom najprv zavedieme pomocné relácie FIRST a LAST.

Definícia 3. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Potom:

a) FIRST je binárna relácia na $N \cup T$ taká, že pre všetky $a, b \in N \cup T$ platí $(a, b) \in \text{FIRST}$ práve vtedy, keď $a \in N$ a súčasne existuje $x \in (N \cup T)^*$ také, že $a \to bx \in P$.

b) LAST je binárna relácia na $N \cup T$ taká, že pre všetky $a, b \in N \cup T$ platí $(a, b) \in \text{LAST}$ práve vtedy, keď $a \in N$ a súčasne existuje $x \in (N \cup T)^*$ také, že $a \to xb \in P$.

Poznámka 4. Symbolmi FIRST^+, LAST^+, FIRST^* a LAST^* označujeme tranzitívne resp. reflexívne a tranzitívne uzávery relácií FIRST a LAST. Pre „bezepsilonovú“ gramatiku je teda dvojica (a, b) v relácii FIRST^+ práve vtedy, keď zo symbolu a možno na nenulový počet krokov odvodiť slovo začínajúce na b. V relácii FIRST^* sú navyše aj všetky dvojice (a, a) pre $a \in N \cup T$.

Definícia 4. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Potom:

a) $\doteq$ je binárna relácia na $N \cup T$ taká, že pre všetky $a, b \in N \cup T$ platí $a \doteq b$ práve vtedy, keď existuje neterminál $\xi \in N$ a slová $u, v \in (N \cup T)^*$ tak, že $\xi \to uabv \in P$.

b) $\lessdot$ je binárna relácia na $N \cup T$ taká, že pre všetky $a, b \in N \cup T$ platí $a \lessdot b$ práve vtedy, keď existujú $\xi, \eta \in N$ a $u, v \in (N \cup T)^*$ tak, že $\xi \to ua\eta v \in P$ a $(\eta, b) \in \mathrm{FIRST}^+$.

c) $\gtrdot$ je binárna relácia na $N \cup T$ taká, že pre všetky $a, b \in N \cup T$ platí $a \gtrdot b$ práve vtedy, keď $b \in T$ a existujú $\xi, \eta \in N$, $c \in N \cup T$ a $u, v \in (N \cup T)^*$ tak, že $\xi \to u\eta cv \in P$, $(\eta, a) \in \mathrm{LAST}^+$ a $(c, b) \in \mathrm{FIRST}^*$.

Neskôr v týchto poznámkach ukážeme, že takto definované relácie $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$ možno skutočne pre každú bezkontextovú gramatiku efektívne vypočítať.

Poznámka 5. V nasledujúcom overíme, že skutočne platia implikácie z intuitívneho vysvetlenia významu relácií $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$ z úvodu tohto oddielu:

$\doteq$: Nech sa a a b môžu vyskytovať za sebou v „handle“. Z definície „handle“ vyplýva, že symboly a a b sa musia vyskytovať za sebou aj na pravej strane niektorého pravidla, a teda $a \doteq b$.

$\lessdot$: Nech sa a môže vyskytovať ako posledný symbol pred „handle“ začínajúcou symbolom b. Takáto pravá vetná forma je teda tvaru $x'aby'z$, kde $y = by'$ je „handle“. Pravé krajné odvodenie vetnej formy $x'aby'z$ je potom tvaru

$$\sigma \Rightarrow_{rm}^* x'a\beta z \Rightarrow_{rm} x'aby'z.$$

Symbol a vo vetnej forme $x'a\beta z$ musel vzniknúť použitím nejakého pravidla $\alpha \to ua\eta v \in P$ takého, že $(\eta, \beta) \in \mathrm{FIRST}^*$.[3] Keďže navyše $(\beta, b) \in \mathrm{FIRST}$ (lebo z uvedeného odvodenia vyplýva $\beta \to by' \in P$), platí $(\eta, b) \in \mathrm{FIRST}^+$, a teda aj $a \lessdot b$.

$\gtrdot$: Nech sa a môže vyskytovať ako posledný symbol v „handle“, ktorá je vo vetnej forme nasledovaná symbolom b. Takáto pravá vetná forma je tvaru $xy'abz'$, kde $y = y'a$ je „handle“. Pravé krajné odvodenie vetnej formy $xy'abz'$ je potom tvaru

$$\sigma \Rightarrow_{rm}^* x\alpha bz' \Rightarrow_{rm} xy'abz'.$$

Symbol b je nutne terminál. Ak by totiž bol b neterminál, musel by sa v pravom krajnom odvodení prepísať skôr, než neterminál α. Nech ψ je prvý spoločný predok symbolov α a b v danom pravom krajnom odvodení. Potom musí existovať pravidlo $\psi \to u\eta cv \in P$, kde $(\eta, \alpha) \in \mathrm{LAST}^*$ a $(c, b) \in \mathrm{FIRST}^*$. Keďže navyše $(\alpha, a) \in \mathrm{LAST}$ (lebo nutne $\alpha \to y'a \in P$), platí $(\eta, a) \in \mathrm{LAST}^+$, a teda $a \gtrdot b$.

V prípade, že sú každé dva symboly z $N \cup T$ v najviac jednej z relácií $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$, možno tieto relácie za určitých ďalších predpokladov využiť na determinizáciu algoritmu „posuň a redukuj“. To je odzrkadlené v nasledujúcej definícii jednoducho precedenčnej gramatiky.

Definícia 5. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Gramatika G je *jednoducho precedenčná*, ak platí:

(i) Gramatika G je „bezepsilonová“, t.j. $P \subseteq N \times (N \cup T)^+$.

(ii) Gramatika G je spätne deterministická, t.j. pre každé $x \in (N \cup T)^*$ existuje najviac jeden neterminál $\xi \in N$ taký, že $\xi \to x \in P$.

(iii) Každá dvojica symbolov $(a, b) \in (N \cup T)^2$ je v najviac jednej z relácií $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$.

[3] V opačnom prípade by musel vzniknúť na nenulový počet krokov z neterminálu ψ takého, že $\alpha \to u\psi\eta v \in P$. V pravom krajnom odvodení ale nemožno prepísať neterminál ψ skôr, než sa „sterminálni“ η, čo znamená, že v takomto prípade nemožno odvodiť vetnú formu $x'a\beta z$.

Poznámka 6. Môže sa stať, že v jednoducho precedenčnej gramatike $G = (N, T, P, \sigma)$ nejaké dva symboly $a, b \in N \cup T$ nie sú *v ani jednej* z relácií $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$. To znamená, že symboly a, b sa nemôžu vyskytovať vedľa seba v žiadnej pravej vetnej forme gramatiky G. V opačnom prípade by totiž nejaká vetná forma obsahujúca podslovo ab musela byť „zredukovateľná“ na počiatočný neterminál σ a v takom prípade možno ľahko nahliadnuť, že symboly a, b musia byť v aspoň jednej z relácií $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$.

Pre jednoducho precedenčné gramatiky je možné v schéme „posuň a redukuj“ v každom kroku deterministicky rozhodnúť, či vykonať operáciu „posuň“ alebo operáciu „redukuj“. Nech a je symbol na vrchu zásobníka – čiže posledný symbol prefixu spracúvaného na zásobníku – a b je prvý symbol zvyšku slova. Ak $a \doteq b$ alebo $a \lessdot b$, na danej pozícii v slove nemôže končiť „handle“ a jedinou možnosťou je teda posunúť symbol zo vstupu. Ak $a \gtrdot b$, jedinou možnosťou je redukovať podľa nejakého pravidla, ktorého pravá strana končí symbolom a, keďže na danej pozícii nemôže žiadna „handle“ pokračovať ani začínať. Začiatok redukovaného podslova v takom prípade možno nájsť podľa relácií medzi symbolmi postupne odoberanými zo zásobníka. Neterminál, na ktorý sa toto podslovo zredukuje, je jednoznačne určený vďaka spätnému determinizmu gramatiky G. V prípade, že na zásobníku nie je žiaden symbol (okrem špeciálneho symbolu $\vdash$ pre jeho „dno“), je jedinou možnosťou posunúť symbol zo vstupu. Podobne v prípade, že na vstupe nie je žiaden neprečítaný symbol (okrem špeciálneho symbolu $\dashv$ pre koniec vstupného slova, ktorý je podľa predpokladu z poznámky 2 súčasťou vstupu), je jedinou možnosťou redukovať (pokiaľ existuje vhodné pravidlo).

Algoritmus „posuň a redukuj“ pre jednoducho precedenčné gramatiky teda možno popísať nasledovne (zrejmé detaily súvisiace s inicializáciou vynechávame):

Vstup: Jednoducho precedenčná gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ a slovo $w \dashv$, kde $w \in T^*$.

Algoritmus:

- Ak je na vrchu zásobníka symbol $\vdash$, *posuň* symbol zo vstupu.
- V opačnom prípade, ak je na vrchu zásobníka symbol a a prvý neprečítaný symbol na vstupe je b, pričom $a \doteq b$, *posuň* symbol zo vstupu.
- V opačnom prípade, ak je na vrchu zásobníka symbol a a prvý neprečítaný symbol na vstupe je b, pričom $a \lessdot b$, *posuň* symbol zo vstupu.
- V opačnom prípade, ak je na vrchu zásobníka symbol a a prvý neprečítaný symbol na vstupe je b, pričom $a \gtrdot b$, *redukuj*. *Redukuj* aj v prípade, že na vstupe je $\dashv$ a na zásobníku je aspoň jeden symbol (okrem $\vdash$). Začiatok redukovaného podslova pritom hľadaj nasledovne:
  a) Odober symbol c z vrchu zásobníka.
  b) Nech d je nový vrch zásobníka. V takomto prípade nemôže platiť $d \gtrdot c$ (prečo?).
  c) Ak $d \doteq c$, opakuj celý proces od bodu a).
  d) Ak $d \lessdot c$ alebo $d = \vdash$, slovo doposiaľ zmazané zo zásobníka je hľadané redukované podslovo y.

  Vďaka spätnému determinizmu potom existuje *najviac jeden* neterminál ξ taký, že $\xi \to y \in P$. Ak existuje, pridaj symbol ξ na zásobník.
- Opakuj tento proces, až kým:
  a) Na vstupe nie je žiaden neprečítaný symbol (okrem $\dashv$) a na zásobníku je nad jeho „dnom“ $\vdash$ počiatočná vetná forma σ. V takom prípade *akceptuj* ($w \in L(G)$).
  b) Nemožno vykonať ani operáciu „posuň“ ani operáciu „redukuj“. V takom prípade *zamietni* ($w \notin L(G)$).

Príklad použitia uvedeného algoritmu nájde čitateľ v závere týchto poznámok.

Výpočet relácií $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$ pre danú gramatiku

V nasledujúcom ukážeme, ako pre danú bezkontextovú gramatiku G algoritmicky vypočítať relácie $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$. Takto vypočítané relácie možno využiť na overenie, či je daná gramatika G jednoducho precedenčná a ak je, aj pri vykonávaní algoritmu „posuň a redukuj“. Pre jednu gramatiku G je očividne postačujúce vypočítať relácie $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$ iba raz (nezávisia totiž od vstupu).

Relácie FIRST a LAST možno očividne vypočítať priamo z ich definície. Ich tranzitívny resp. reflexívny a tranzitívny uzáver potom možno vypočítať štandardným spôsobom. Napríklad pre výpočet FIRST^+ to znamená postupne „generovať“ relácie

$$\mathrm{FIRST}, \bigcup_{i=1}^{2} \mathrm{FIRST}^i, \bigcup_{i=1}^{3} \mathrm{FIRST}^i, \ldots,$$

až kým sa nebudú niektoré dve z týchto relácií rovnať (alebo použiť nejakú menej „drevorubačskú“ metódu; napríklad možno využiť násobenie matíc). Pre reflexívny a tranzitívny uzáver treba ešte reláciu zjednotiť s identickou reláciou.

Reláciu $\doteq$ možno taktiež vypočítať priamo z definície – sú v nej všetky dvojice symbolov, ktoré sa vyskytujú za sebou na pravej strane niektorého pravidla.

Nasledujúce tvrdenia, v ktorých $\circ$ označuje štandardnú kompozíciu relácií, sú priamym dôsledkom definícií relácií $\lessdot$ a $\gtrdot$, a preto ich dokazovať nebudeme; čitateľa však nabádame, aby si túto skutočnosť dôkladne ujasnil.

Tvrdenie 1. *Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Potom sa relácia $\lessdot$ rovná relácii*

$$\doteq \circ \mathrm{FIRST}^+.$$

Tvrdenie 2. *Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Potom sa relácia $\gtrdot$ rovná relácii*

$$\left(\left(\mathrm{LAST}^+\right)^{-1} \circ \doteq \circ \mathrm{FIRST}^*\right) \cap (N \cup T) \times T.$$

Poznámka 7. Vypočítať inverznú reláciu k relácii LAST^+ je triviálnou záležitosťou – stačí iba „otočiť“ všetky dvojice.

Príklad

V nasledujúcom demonštrujeme metódy z predchádzajúcich oddielov na príklade bezkontextovej gramatiky G, pre ktorú:

a) Vypočítame relácie $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$.

b) Overíme, že G je jednoducho precedenčná.

c) Odsimulujeme algoritmus „posuň a redukuj“ na konkrétnom vstupe w.

Príklad 1. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b, c, d\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{&\sigma \to a\alpha \mid \beta d \\ &\alpha \to c \mid ca \\ &\beta \to \beta b \mid ba\}. \end{aligned}$$

Vypočítajme najprv relácie FIRST a LAST. Zrejme platí:

$$\begin{aligned} \mathrm{FIRST} &= \{(\sigma, a), (\sigma, \beta), (\alpha, c), (\beta, \beta), (\beta, b)\}, \\ \mathrm{LAST} &= \{(\sigma, d), (\sigma, \alpha), (\alpha, a), (\alpha, c), (\beta, a), (\beta, b)\}. \end{aligned}$$

Tranzitívne uzávery relácií FIRST a LAST vypočítame nasledovne:

$$\begin{aligned}\mathrm{FIRST}^1 &= \{(\sigma,a),(\sigma,\beta),(\alpha,c),(\beta,\beta),(\beta,b)\},\\ \mathrm{FIRST}^1 \cup \mathrm{FIRST}^2 &= \{(\sigma,a),(\sigma,b),(\sigma,\beta),(\alpha,c),(\beta,\beta),(\beta,b)\},\\ \mathrm{FIRST}^1 \cup \mathrm{FIRST}^2 \cup \mathrm{FIRST}^3 &= \mathrm{FIRST}^1 \cup \mathrm{FIRST}^2 = \mathrm{FIRST}^+.\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\mathrm{LAST}^1 &= \{(\sigma,d),(\sigma,\alpha),(\alpha,a),(\alpha,c),(\beta,a),(\beta,b)\},\\ \mathrm{LAST}^1 \cup \mathrm{LAST}^2 &= \{(\sigma,a),(\sigma,c),(\sigma,d),(\sigma,\alpha),(\alpha,a),(\alpha,c),(\beta,a),(\beta,b)\},\\ \mathrm{LAST}^1 \cup \mathrm{LAST}^2 \cup \mathrm{LAST}^3 &= \mathrm{LAST}^1 \cup \mathrm{LAST}^2 = \mathrm{LAST}^+.\end{aligned}$$

Pre reflexívny a tranzitívny uzáver FIRST^* platí $\mathrm{FIRST}^* = I \cup \mathrm{FIRST}^+$, kde I označuje identickú reláciu. Preto

$$\mathrm{FIRST}^* = \{(\sigma,\sigma),(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(\sigma,a),(\sigma,b),(\sigma,\beta),(\alpha,c),(\beta,b)\}.$$

Zjavne tiež platí

$$\left(\mathrm{LAST}^+\right)^{-1} = \{(a,\sigma),(c,\sigma),(d,\sigma),(\alpha,\sigma),(a,\alpha),(c,\alpha),(a,\beta),(b,\beta)\}.$$

Takto vypočítané pomocné relácie teraz môžeme využiť na výpočet samotných relácií $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$. Reláciu $\doteq$ ešte možno vypočítať priamo z jej definície:

$$\doteq \text{ sa rovná } \{(a,\alpha),(\beta,d),(c,a),(\beta,b),(b,a)\}.$$

Pre reláciu $\lessdot$ platí

$$\lessdot \text{ sa rovná } \doteq \circ \mathrm{FIRST}^+ \text{ sa rovná } \{(a,c)\}.$$

Nakoniec, pre reláciu $\gtrdot$ platí

$$\gtrdot \text{ sa rovná } \left(\left(\mathrm{LAST}^+\right)^{-1} \circ \doteq \circ \mathrm{FIRST}^*\right) \cap (N \cup T) \times T \text{ sa rovná } \{(a,b),(a,d),(b,b),(b,d)\}.$$

V nasledujúcom overíme, že gramatika G je jednoducho precedenčná. Postupne teda ukážeme, že G spĺňa podmienky (i) až (iii) z definície 5.

- (i) Gramatika G je „bezepsilonová“, pretože v P nie je žiadne pravidlo typu $\xi \to \varepsilon$.
- (ii) Gramatika G je spätne deterministická, pretože pre všetky $x \in (N \cup T)^*$ existuje najviac jeden neterminál $\xi \in N$ taký, že $\xi \to x \in P$.
- (iii) Relácie $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$, ktoré sme vypočítali vyššie, možno zapísať v podobe tabuľky nasledovne.

	σ	α	β	a	b	c	d
σ							
α							
β					$\doteq$		$\doteq$
a		$\doteq$			$\gtrdot$	$\lessdot$	$\gtrdot$
b				$\doteq$	$\gtrdot$		$\gtrdot$
c				$\doteq$			
d							

Ľahko vidieť, že každá dvojica symbolov z $N \cup T$ je v najviac jednej z relácií $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$.

Gramatika G teda skutočne *je* jednoducho precedenčná. Odsimulujeme teraz algoritmus „posuň a redukuj“ pre gramatiku G na vstupe $w = babbd$.

Zásobník	**Zvyšok vstupu**	**Operácia**
$\vdash$	$babbd \dashv$	Posuň ($\vdash$ na zásobníku)
$\vdash b$	$abbd \dashv$	Posuň ($b \doteq a$)
$\vdash ba$	$bbd \dashv$	Redukuj ($a \gtrdot b$) podľa $\beta \to ba$
$\vdash \beta$	$bbd \dashv$	Posuň ($\beta \doteq b$)
$\vdash \beta b$	$bd \dashv$	Redukuj ($b \gtrdot b$) podľa $\beta \to \beta b$
$\vdash \beta$	$bd \dashv$	Posuň ($\beta \doteq b$)
$\vdash \beta b$	$d \dashv$	Redukuj ($b \gtrdot d$) podľa $\beta \to \beta b$
$\vdash \beta$	$d \dashv$	Posuň ($\beta \doteq d$)
$\vdash \beta d$	$\dashv$	Redukuj ($\dashv$ na vstupe) podľa $\sigma \to \beta d$
$\vdash \sigma$	$\dashv$	Akceptuj (σ na zásobníku, dočítaný vstup)

Pri redukcii nájde algoritmus redukovanú vetnú formu podľa relácií medzi symbolmi na zásobníku. Napríklad pri prvej redukcii je na zásobníku slovo ba a platí $b \doteq a$. Algoritmus „posuň a redukuj“ teda vyprázdni celý zásobník bez toho, aby „narazil“ na reláciu $\lessdot$. Preto treba redukovať celý obsah zásobníka ba. Zodpovedajúca ľavá strana pravidla β je jednoznačne určená vďaka spätnému determinizmu.

Príklad 2. Uvažujme teraz jemne pozmenenú gramatiku $G' = (N', T', P', \sigma')$, kde $N' = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T' = \{a, b, c, d\}$, $\sigma' = \sigma$ a

$$\begin{aligned} P' = \{&\sigma \to a\alpha \mid \beta b \\ &\alpha \to c \mid ca \\ &\beta \to \beta b \mid ba\}. \end{aligned}$$

O tejto gramatike možno okamžite konštatovať, že nie je jednoducho precedenčná, pretože obsahuje súčasne pravidlá $\sigma \to \beta b$ a $\beta \to \beta b$. Gramatika G' teda nie je spätne deterministická.

Jednoducho precedenčná nie je ani gramatika $G'' = (N'', T'', P'', \sigma'')$, kde $N'' = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T'' = \{a, b, c, d\}$, $\sigma'' = \sigma$ a

$$\begin{aligned} P'' = \{&\sigma \to a\alpha \mid \varepsilon \\ &\alpha \to c \mid ca \\ &\beta \to \beta b \mid ba\}. \end{aligned}$$

Obsahuje totiž pravidlo $\sigma \to \varepsilon$, a teda nie je „bezepsilonová“.

Poznámka 8. Symboly $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$ môžu evokovať určité vlastnosti niektorých relácií z matematiky, ako napríklad $=$, $<$ a $>$. Treba preto dôrazne upozorniť na fakt, že relácie $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$ nemajú „takmer žiadnu z pekných vlastností“ týchto známych relácií. Relácia $\doteq$ napríklad nemusí byť symetrická, ako ukazuje príklad vyššie. Podobne môže platiť $a \lessdot b$ bez toho, aby platilo $b \gtrdot a$. A dvojica symbolov (a, b) tiež môže byť vo všetkých troch reláciách $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$ súčasne.

Poznámka 9. Symboly $\vdash$ a $\dashv$ nepatria ani do množiny neterminálov, ani do množiny terminálov jednoduchej precedenčnej gramatiky – ide iba o pomocné symboly zavedené v súvislosti s algoritmom „posuň a redukuj“. Preto pre tieto symboly nie je definovaná žiadna z relácií $\doteq$, $\lessdot$ a $\gtrdot$. Napriek tomu možno na tieto symboly intuitívne nazerať tak, ako keby pre každé $c \in N \cup T$ platilo $\vdash \lessdot c$ a $c \gtrdot \dashv$. Operácie vykonávané algoritmom „posuň a redukuj“ v špeciálnych prípadoch (keď na zásobníku je $\vdash$ alebo keď na vstupe je $\dashv$) sú potom konzistentné so zvyšnými prípadmi.