

## Cvičenie č. 4 Bezkontextové gramatiky (2. časť)

Peter Kostolányi

16. októbra 2025

### 1 Normálne tvary bezkontextových gramatík

Vetou o normálnom tvare bezkontextových gramatík možno nazvať prakticky ľubovoľné tvrdenie, podľa ktorého ku každej alebo „skoro každej“ bezkontextovej gramatike  $G$  existuje ekvivalentná alebo „takmer ekvivalentná“ gramatika  $G'$  s nejakou špeciálnou vlastnosťou.

**Poznámka 1.** Normálne tvary možno, samozrejme, študovať aj pre iné objekty ako gramatiky. Jediným predpokladom je, aby na danej triede objektov  $X$  bola definovaná relácia ekvivalencie  $\sim$ . Veta o normálnom tvare potom vždy pre nejakú triedu  $Y \subseteq X$  hovorí, že pre každé  $x \in X$  existuje  $y \in Y$  také, že  $y \sim x$ .

V našom prípade je touto triedou  $X$  trieda všetkých bezkontextových gramatík, pričom pre dvojicu bezkontextových gramatík  $G, G'$  je  $G \sim G'$  práve vtedy, keď  $L(G) = L(G')$ .

Normálne tvary bezkontextových gramatík je užitočné skúmať predovšetkým z nasledujúcich dvoch dôvodov.

- Predpoklad normálneho tvaru môže často uľahčiť dôkazy tvrdení o bezkontextových jazykoch. Ak totiž namiesto všeobecných bezkontextových gramatík uvažujeme iba gramatiky v normálnom tvare, môže sa podstatne zjednodušiť argumentácia. Dôležitá je pritom predovšetkým skutočnosť, že ekvivalentná gramatika v normálnom tvare vždy *existuje*; algoritmus na prevod do normálneho tvaru je tu menej podstatný, avšak zaručuje konštruktívnosť dôkazu.
- Viaceré užitočné algoritmy pracujúce s bezkontextovými gramatikami<sup>1</sup> predpokladajú ako svoj vstup gramatiku v nejakom normálnom tvare. Pri implementácii takýchto algoritmov sa preto môže zísť aj procedúra na prevod do požadovaného normálneho tvaru.

V nasledujúcom sa zameriame na praktickú stránku prevodu gramatík do jednotlivých normálnych tvarov. Matematické zápisy týchto konštrukcií a dôkazy ich správnosti odzneli na prednáške.

### 2 Redukovaný normálny tvar

Bezkontextová gramatika je *redukovaná* alebo *v redukovanom normálnom tvare*, ak neobsahuje žiadne pravidlo typu  $\xi \rightarrow \xi$  a každý jej neterminál  $\xi$  je súčasne „terminujúci“ (teda existuje aspoň jedno terminálne slovo odvoditeľné zo  $\xi$ ) a dosiahnuteľný (v danej gramatike teda existuje vetná forma obsahujúca  $\xi$  – tá musí byť z definície odvoditeľná z počiatočného neterminálu).

**Definícia 1.** Bezkontextová gramatika  $G = (N, T, P, \sigma)$  je v *redukovanom normálnom tvare*, ak sú splnené nasledujúce tri podmienky:

- (i) Množina pravidiel  $P$  neobsahuje pre žiadne  $\xi \in N$  pravidlo  $\xi \rightarrow \xi$ .
- (ii) Pre každé  $\xi \in N$  existuje terminálne slovo  $w \in T^*$  také, že  $\xi \Rightarrow^* w$ .
- (iii) Pre každé  $\xi \in N$  existujú slová  $u, v \in (N \cup T)^*$  také, že  $\sigma \Rightarrow^* u\xi v$ .

O *normálnom tvare* tu môžeme hovoriť vďaka nasledujúcej vete z prednášky.

**Veta 1.** *Nech  $G$  je bezkontextová gramatika taká, že  $L(G) \neq \emptyset$ . Potom existuje bezkontextová gramatika  $G'$  v redukovanom normálnom tvare taká, že  $L(G') = L(G)$ .*

---

<sup>1</sup>Príkladom môžu byť algoritmy, ktoré pre slovo  $x$  a gramatiku  $G$  rozhodujú, či  $x \in L(G)$ .

Predpoklad  $L(G) \neq \emptyset$  je v predchádzajúcej vete naozaj nutný. Každá bezkontextová gramatika  $G$  totiž musí mať počiatočný neterminál  $\sigma$ . Pre redukovanú gramatiku  $G$  tak podľa podmienky (ii) definície 1 existuje terminálne slovo  $w$  také, že  $\sigma \Rightarrow^* w$ . Potom ale nutne  $w \in L(G)$ .

Každá z podmienok (i) až (iii) definície 1 sama o sebe určuje normálny tvar bezkontextových gramatík. V nasledujúcom najprv zosumarizujeme algoritmy na prevod gramatík do týchto „pomocných“ normálnych tvarov a následne uvidíme, že použitie všetkých troch týchto algoritmov vo vhodnom poradí garantuje ako výstup gramatiku v redukovanom normálnom tvare.

## 2.1 Odstránenie pravidiel typu $\xi \rightarrow \xi$

Prevod bezkontextovej gramatiky do normálneho tvaru daného podmienkou (i) definície 1 spočíva jednoducho vo „vypustení“ všetkých pravidiel typu  $\xi \rightarrow \xi$  z množiny prepisovacích pravidiel  $P$ .

## 2.2 Odstránenie „neterminujúcich“ neterminálov

Prevod bezkontextovej gramatiky do normálneho tvaru daného podmienkou (ii) definície 1 spočíva v nájdení množiny  $S$  všetkých „terminujúcich“ neterminálov gramatiky a v následnom odstránení zvyšných – čiže „neterminujúcich“ – neterminálov, ako aj všetkých pravidiel, v ktorých sa takéto neterminály vyskytujú. Množinu  $S$  možno pre bezkontextovú gramatiku  $G = (N, T, P, \sigma)$  formálne zapísať ako  $S = \{\xi \in N \mid \exists w \in T^*: \xi \Rightarrow^* w\}$  a dá sa nájsť nasledujúcim algoritmom.

1. Nech  $S_0 = \{\xi \in N \mid \exists u \in T^*: \xi \rightarrow u \in P\}$ .
2. Pre  $i = 1, 2, \dots$  iteruj predpis  $S_i = S_{i-1} \cup \{\xi \in N \mid \exists u \in (T \cup S_{i-1})^*: \xi \rightarrow u \in P\}$ , až kým pre nejaké  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$  nenastane  $S_k = S_{k-1}$ .
3. Polož  $S = S_k$ .

Množina  $S_0$  teda pozostáva z práve tých neterminálov  $\xi$ , ktoré možno pomocou nejakého pravidla prepísať na rýdzo terminálne slovo. Pre  $i = 1, \dots, k$  následne množina  $S_i$  obsahuje všetky neterminály z množiny  $S_{i-1}$ , ako aj tie neterminály  $\xi$ , ktoré možno pomocou nejakého pravidla prepísať na slovo obsahujúce iba terminály a neterminály z  $S_{i-1}$ . Akonáhle týmto spôsobom nepribudnú žiadne nové neterminály, možno celú iteratívnu konštrukciu zastaviť.

**Poznámka 2.** Uvedený algoritmus sa na každom vstupe zastaví, pretože v kroku 2 sa do množiny  $S_i$  v každej iterácii okrem poslednej pridá oproti množine  $S_{i-1}$  aspoň jeden neterminál. Celkový počet neterminálov je ale konečný.

Skutočnosť, že množina  $S_k$  je naozaj hľadaná množina „terminujúcich“ neterminálov, bola dokázaná na prednáške.

**Poznámka 3.** V kroku 2 horeuvedeného algoritmu by v skutočnosti bolo možné iterovať iba predpis  $S_i = \{\xi \in N \mid \exists u \in (T \cup S_{i-1})^*: \xi \rightarrow u \in P\}$ . Ľahko totiž vidieť, že táto množina musí obsahovať okrem iného aj všetky neterminály z  $S_{i-1}$ .

Pre gramatiku  $G = (N, T, P, \sigma)$  takú, že  $L(G) \neq \emptyset$ , je nájdená množina  $S$  vždy neprázdna. V takom prípade môžeme z gramatiky  $G$  odstrániť všetky neterminály z  $N - S$ , ako aj všetky pravidlá z  $P$ , ktorých ľavá alebo pravá strana obsahuje neterminál z  $N - S$ . Vo výsledku dostaneme gramatiku spĺňajúcu podmienku (ii) definície 1.

## 2.3 Odstránenie nedosiahnuteľných neterminálov

Prevod bezkontextovej gramatiky do normálneho tvaru daného podmienkou (iii) definície 1 spočíva v nájdení množiny  $H$  všetkých dosiahnuteľných neterminálov a v následnom odstránení zvyšných – čiže nedosiahnuteľných – neterminálov a prepisovacích pravidiel obsahujúcich nedosiahnuteľné neterminály. Množinu  $H$  možno pre bezkontextovú gramatiku  $G = (N, T, P, \sigma)$  formálne zapísať ako  $H = \{\xi \in N \mid \exists u, v \in (N \cup T)^*: \sigma \Rightarrow^* u\xi v\}$  a dá sa nájsť nasledujúcim algoritmom.

1. Nech  $H_0 = \{\sigma\}$ .
2. Pre  $i = 1, 2, \dots$  iteruj  $H_i = H_{i-1} \cup \{\xi \in N \mid \exists \eta \in H_{i-1} \exists u, v \in (N \cup T)^*: \eta \rightarrow u\xi v \in P\}$ , až kým pre nejaké  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$  nenastane  $H_k = H_{k-1}$ .
3. Polož  $H = H_k$ .

Množina  $H_0$  teda obsahuje iba počiatočný neterminál, ktorý je ako jediný dosiahnuteľný na nula krokov. Pre  $i = 1, \dots, k$  následne množina  $H_i$  obsahuje všetky neterminály z  $H_{i-1}$ , ako aj neterminály, ktoré sa vyskytujú na pravej strane niektorého pravidla s ľavou stranou v  $H_{i-1}$ ; ide tak o neterminály dosiahnuteľné na najviac  $i$  krokov. Akonáhle takto nepribudnú žiadne nové neterminály, možno iteratívnu konštrukciu ukončiť.

**Poznámka 4.** Zastavenie algoritmu na každom vstupe je zrejmé z rovnakých dôvodov, ako pri hľadaní „terminujúcich“ neterminálov. Správnosť algoritmu bola dokázaná na prednáške.

**Poznámka 5.** V kroku 2 je tentokrát zjednotenie s množinou  $H_{i-1}$  naozaj podstatné.

Množina  $H$  nájdená pre gramatiku  $G = (N, T, P, \sigma)$  je vždy neprázdna. Možno teda z gramatiky  $G$  odstrániť všetky neterminály z  $N - H$  a podobne aj všetky pravidlá z  $P$ , ktorých ľavá alebo pravá strana obsahuje neterminál z  $N - H$ . Výsledkom tohto procesu je gramatika spĺňajúca podmienku (ii) definície 1.

## 2.4 Redukovaný normálny tvar: algoritmus

Ľubovoľnú bezkontextovú gramatiku možno previesť do redukovaného normálneho tvaru použitím nasledujúceho algoritmu.

1. Odstráň pravidlá typu  $\xi \rightarrow \xi$ .
2. Odstráň „neterminujúce“ neterminály (a pravidlá, ktoré ich obsahujú).
3. Odstráň nedosiahnuteľné neterminály (a pravidlá, ktoré ich obsahujú).

Správnosť uvedeného algoritmu je založená na nasledujúcich dvoch jednoduchých pozorovaniach.

- a) Po odstránení „neterminujúcich“ a nedosiahnuteľných neterminálov algoritmami z predchádzajúcich pododdielov nemôže vzniknúť žiadne nové pravidlo typu  $\xi \rightarrow \xi$ .
- b) Po odstránení nedosiahnuteľných neterminálov algoritmom z pododdielu 2.3 nemôže vzniknúť žiaden nový „neterminujúci“ neterminál.

Dôkaz obidvoch týchto tvrdení je priamočiary a prenechávame ho čitateľovi.

**Poznámka 6.** Poradie odstraňovania „neterminujúcich“ a nedosiahnuteľných neterminálov vo všeobecnosti nemožno vymeniť. Uvažujme napríklad gramatiku  $G = (N, T, P, \sigma)$  s  $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$ ,  $T = \{a\}$  a  $P = \{\sigma \rightarrow \alpha \mid a, \alpha \rightarrow \alpha\beta, \beta \rightarrow a\}$ . Táto neobsahuje žiadne pravidlo typu  $\xi \rightarrow \xi$  – odstraňovaním takýchto pravidiel sa teda zapodievať nemusíme.

Použitím horeuvedeného algoritmu dostávame redukovanú gramatiku  $G' = (N', T', P', \sigma')$ , kde  $N' = \{\sigma\}$ ,  $T' = T$ ,  $P' = \{\sigma \rightarrow a\}$  a  $\sigma' = \sigma$ .

Skúsme teraz aplikovať opačný postup a uvažujme najprv dosiahnuteľnosť neterminálov. Dostávame  $H_0 = \{\sigma\}$ ,  $H_1 = \{\sigma, \alpha\}$  a  $H_2 = \{\sigma, \alpha, \beta\} = H_3 = H$  – všetky neterminály sú teda dosiahnuteľné. Zamerajme sa teraz na „terminujúce“ neterminály. Dostávame  $S_0 = \{\sigma, \beta\} = S_1 = S$ . Na konci celého procesu teda prichádzame ku gramatike s množinou neterminálov  $N' = \{\sigma, \beta\}$  a množinou pravidiel  $P' = \{\sigma \rightarrow a, \beta \rightarrow a\}$ . Tá celkom očividne *nie je* v redukovanom normálnom tvare. Po odstránení „neterminujúcich“ neterminálov sa totiž môžu niektoré pôvodne dosiahnuteľné neterminály stať nedosiahnuteľnými.

Odstraňovanie pravidiel typu  $\xi \rightarrow \xi$  naopak možno robiť aj uprostred alebo na konci celého algoritmu, ako by čitateľ istotne ľahko dokázal.

## 2.5 Riešená úloha

**Úloha 1.** Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je bezkontextová gramatika s  $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$ ,  $T = \{a, b\}$  a

$$\begin{aligned} P = \{ & \sigma \rightarrow \alpha\alpha \mid \sigma \mid a\sigma \\ & \alpha \rightarrow \gamma b \mid aa \mid \varepsilon \\ & \beta \rightarrow b\beta \mid b \\ & \gamma \rightarrow a\gamma \mid a\gamma\gamma \}. \end{aligned}$$

Štandardnou konštrukciou prevedte gramatiku  $G$  do redukovaného normálneho tvaru.

*Riešenie.* Jediným pravidlom typu  $\xi \rightarrow \xi$  je v gramatike  $G$  pravidlo  $\sigma \rightarrow \sigma$ . Po jeho odstránení dostávame gramatiku s prepisovacími pravidlami

$$\begin{aligned} & \sigma \rightarrow \alpha\alpha \mid a\sigma, \\ & \alpha \rightarrow \gamma b \mid aa \mid \varepsilon, \\ & \beta \rightarrow b\beta \mid b, \\ & \gamma \rightarrow a\gamma \mid a\gamma\gamma. \end{aligned}$$

Nájďme teraz množinu „terminujúcich“ neterminálov  $S$ :

1.  $S_0 = \{\alpha, \beta\}$ ,
2.  $S_1 = S_0 \cup \{\sigma, \alpha, \beta\} = \{\sigma, \alpha, \beta\}$ ,
3.  $S_2 = S_1 \cup \{\sigma, \alpha, \beta\} = \{\sigma, \alpha, \beta\} = S_1$ .

Teda  $S = S_2 = \{\sigma, \alpha, \beta\}$ . Po odstránení „neterminujúcich“ neterminálov – v tomto prípade iba neterminálu  $\gamma$  – a pravidiel, ktoré tento neterminál obsahujú, dostávame gramatiku s prepisovacími pravidlami

$$\begin{aligned} & \sigma \rightarrow \alpha\alpha \mid a\sigma, \\ & \alpha \rightarrow aa \mid \varepsilon, \\ & \beta \rightarrow b\beta \mid b. \end{aligned}$$

Pre túto gramatiku nakoniec nájdeme množinu dosiahnuteľných neterminálov  $H$ :

1.  $H_0 = \{\sigma\}$ ,
2.  $H_1 = H_0 \cup \{\sigma, \alpha\} = \{\sigma, \alpha\}$ ,
3.  $H_2 = H_1 \cup \{\sigma, \alpha\} = \{\sigma, \alpha\} = H_1$ .

Teda  $H = H_2 = \{\sigma, \alpha\}$ . Po odstránení nedosiahnuteľných neterminálov – v tomto prípade iba neterminálu  $\beta$  – dostávame gramatiku  $G' = (N', T, P', \sigma)$  s  $N' = \{\sigma, \alpha\}$  a

$$\begin{aligned} P = \{ & \sigma \rightarrow \alpha\alpha \mid a\sigma \\ & \alpha \rightarrow aa \mid \varepsilon \}. \end{aligned}$$

Gramatika  $G'$  je v redukovanom normálnom tvare. □

## 3 Chomského normálny tvar

*Chomského normálny tvar* umožňuje bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že sa v každom kroku odvodenia bezkontextovej gramatiky prepíše niektorý neterminál na dva neterminály, na jeden terminál, alebo na prázdne slovo.

**Definícia 2.** Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je bezkontextová gramatika. Gramatika  $G$  je v *Chomského normálnom tvare*, ak  $P \subseteq N \times (N^2 \cup T \cup \{\varepsilon\})$ .

O normálnom tvare môžeme hovoriť vďaka nasledujúcej vete, ktorá bola dokázaná na prednáške.

**Veta 2.** *Nech  $G$  je bezkontextová gramatika. Potom existuje bezkontextová gramatika  $G'$  v Chomského normálnom tvare taká, že  $L(G') = L(G)$ .*

Vstupom nasledujúceho algoritmu na prevod do Chomského normálneho tvaru je ľubovoľná bezkontextová gramatika  $G = (N, T, P, \sigma)$ .

1. Pre každý terminál  $c \in T$  zaved' nový<sup>2</sup> neterminál  $\xi_c$  a pravidlo  $\xi_c \rightarrow c$ .
2. Nahraď vo všetkých pravidlách  $\alpha \rightarrow x \in P$  – teda v tých pravidlách, ktoré sa vyskytovali aj v pôvodnej gramatike  $G$  – všetky terminály  $c \in T$  neterminálom  $\xi_c$ . Nech  $G_1 = (N_1, T, P_1, \sigma)$  je výsledná gramatika.

Pravá strana každého pravidla gramatiky  $G_1$  pozostáva z jedného terminálu, z prázdneho slova, alebo z neprázdneho slova zloženého iba z neterminálov. V nasledujúcich krokoch už iba zabezpečíme, aby v prípade neprázdneho slova zloženého z neterminálov bola jeho dĺžka rovná dvom.

3. Zaved' nový neterminál  $\xi_\varepsilon$  a pravidlo  $\xi_\varepsilon \rightarrow \varepsilon$ . Všetky pravidlá  $\alpha \rightarrow \beta \in P_1$ , kde  $\alpha, \beta \in N_1$ , nahraď pravidlom  $\alpha \rightarrow \beta\xi_\varepsilon$ . Nech  $G_2 = (N_2, T, P_2, \sigma)$  je výsledná gramatika.

Gramatika  $G_2$  obsahuje iba prepisovacie pravidlá, ktoré majú na pravej strane jeden terminál, prázdne slovo, alebo slovo dĺžky aspoň dva pozostávajúce iba z neterminálov. V záverečnom kroku teda stačí ošetriť „príliš dlhé“ slová na pravej strane.

4. Pre každé pravidlo  $\pi = (\alpha \rightarrow \beta_1\beta_2 \dots \beta_k) \in P_2$  s  $k > 2$  a  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_k \in N_2$ :

- 4.1 Zaved' nové neterminály  $\psi_{\pi,1}, \dots, \psi_{\pi,k-2}$ .
- 4.2 Odober pôvodné pravidlo  $\alpha \rightarrow \beta_1\beta_2 \dots \beta_k$ .
- 4.3 Pridaj nové pravidlá  $\alpha \rightarrow \beta_1\psi_{\pi,1}, \psi_{\pi,1} \rightarrow \beta_2\psi_{\pi,2}, \dots, \psi_{\pi,k-2} \rightarrow \beta_{k-1}\beta_k$ .

Nech  $G' = (N', T, P', \sigma)$  je výsledná gramatika.

Výsledná gramatika  $G'$  je evidentne vždy v Chomského normálnom tvare a na prednáške bolo dokázané, že  $L(G') = L(G)$ .

**Poznámka 7.** Uvedený algoritmus nie je optimálny: napríklad všetky pravidlá  $\alpha \rightarrow c$  pôvodnej gramatiky, kde  $c \in T$  (ktoré Chomského normálny tvar neporušujú) sa nahradia trojicou pravidiel  $\alpha \rightarrow \xi_c\xi_\varepsilon$ ,  $\xi_c \rightarrow c$  a  $\xi_\varepsilon \rightarrow \varepsilon$ . Poznamenajme však, že toto neplatí pre pravidlá  $\alpha \rightarrow \varepsilon$  pôvodnej gramatiky, ktoré sú vo výsledku nezmenené.

### 3.1 Riešená úloha

**Úloha 2.** Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je bezkontextová gramatika s  $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$ ,  $T = \{a, b\}$  a

$$\begin{aligned} P = \{ & \sigma \rightarrow aab\beta \mid \beta\beta \mid \alpha \\ & \alpha \rightarrow ab\alpha \mid aa \\ & \beta \rightarrow b\beta\beta \mid \varepsilon \}. \end{aligned}$$

Štandardnou konštrukciou preved'te gramatiku  $G$  do Chomského normálneho tvaru.

<sup>2</sup>Práve zavedený neterminál  $\xi_c$  teda nepatrí do  $N$  ani do  $T$ .

*Riešenie.* Pre všetky  $c \in T$  zavedme nový neterminál  $\xi_c$  a pravidlo  $\xi_c \rightarrow c$ ; následne nahradme všetky terminály  $c$  na pravých stranách pôvodných pravidiel neterminálom  $\xi_c$ . Po tejto transformácii dostaneme gramatiku s pravidlami

$$\begin{aligned}\sigma &\rightarrow \xi_a \alpha \xi_b \beta \mid \beta \beta \mid \alpha, \\ \alpha &\rightarrow \alpha \xi_b \alpha \mid \xi_a \xi_a, \\ \beta &\rightarrow \xi_b \beta \beta \mid \varepsilon, \\ \xi_a &\rightarrow a, \\ \xi_b &\rightarrow b.\end{aligned}$$

Zavedme ďalej nový neterminál  $\xi_\varepsilon$  s pravidlom  $\xi_\varepsilon \rightarrow \varepsilon$  a predĺžme neterminálom  $\xi_\varepsilon$  všetky „príliš krátke“ pravé strany pravidiel. Získame tak gramatiku s pravidlami

$$\begin{aligned}\sigma &\rightarrow \xi_a \alpha \xi_b \beta \mid \beta \beta \mid \alpha \xi_\varepsilon, \\ \alpha &\rightarrow \alpha \xi_b \alpha \mid \xi_a \xi_a, \\ \beta &\rightarrow \xi_b \beta \beta \mid \varepsilon, \\ \xi_a &\rightarrow a, \\ \xi_b &\rightarrow b, \\ \xi_\varepsilon &\rightarrow \varepsilon.\end{aligned}$$

Zavedme ešte označenia pravidiel

$$\begin{aligned}\pi_1 &:= (\sigma \rightarrow \xi_a \alpha \xi_b \beta), \\ \pi_2 &:= (\alpha \rightarrow \alpha \xi_b \alpha), \\ \pi_3 &:= (\beta \rightarrow \xi_b \beta \beta)\end{aligned}$$

a „rozbime“ príliš dlhé pravé strany pravidiel pomocou nových neterminálov, čím dostaneme bezkontextovú gramatiku  $G' = (N', T, P', \sigma)$  s  $N' = \{\sigma, \alpha, \beta, \xi_a, \xi_b, \xi_\varepsilon, \psi_{\pi_1,1}, \psi_{\pi_1,2}, \psi_{\pi_2,1}, \psi_{\pi_3,1}\}$  a

$$\begin{aligned}P' &= \{\sigma \rightarrow \xi_a \psi_{\pi_1,1} \mid \beta \beta \mid \alpha \xi_\varepsilon \\ &\quad \alpha \rightarrow \alpha \psi_{\pi_2,1} \mid \xi_a \xi_a \\ &\quad \beta \rightarrow \xi_b \psi_{\pi_3,1} \mid \varepsilon \\ &\quad \psi_{\pi_1,1} \rightarrow \alpha \psi_{\pi_1,2} \\ &\quad \psi_{\pi_1,2} \rightarrow \xi_b \beta \\ &\quad \psi_{\pi_2,1} \rightarrow \xi_b \alpha \\ &\quad \psi_{\pi_3,1} \rightarrow \beta \beta \\ &\quad \xi_a \rightarrow a \\ &\quad \xi_b \rightarrow b \\ &\quad \xi_\varepsilon \rightarrow \varepsilon\}.\end{aligned}$$

□

## 4 „Bezepsilonový“ normálny tvar

Hovoríme, že bezkontextová gramatika je „bezepsilonová“ alebo v „bezepsilonovom“ normálnom tvare, ak neobsahuje vymazávajúce pravidlá typu  $\xi \rightarrow \varepsilon$ . V tomto prípade ide o plnohodnotný normálny tvar len pre gramatiky generujúce neprázdne slová. Gramatika bez pravidiel typu  $\xi \rightarrow \varepsilon$  totiž nikdy nemôže vygenerovať prázdne slovo  $\varepsilon$ , a teda nie každá bezkontextová gramatika sa dá do „bezepsilonového“ tvaru v pravom slova zmysle previesť. Ako však bolo dokázané na prednáške, ku každej bezkontextovej gramatike  $G$  existuje bezkontextová gramatika  $G'$  v „bezepsilonovom“ normálnom tvare taká, že  $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$ .

**Definícia 3.** Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je bezkontextová gramatika. Hovoríme, že gramatika  $G$  je v „bezepsilonovom“ normálnom tvare, ak  $P \subseteq N \times (N \cup T)^+$ .

**Veta 3.** Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je bezkontextová gramatika. Potom existuje bezkontextová gramatika  $G' = (N', T', P', \sigma')$  v „bezepsilonovom“ normálnom tvare taká, že  $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$ .

Správnosť nasledujúceho algoritmu na prevod gramatiky do „bezepsilonového“ normálneho tvaru bola dokázaná na prednáške. Jeho vstupom je bezkontextová gramatika  $G = (N, T, P, \sigma)$  a výstupom je bezkontextová gramatika  $G' = (N', T', P', \sigma')$  v „bezepsilonovom“ normálnom tvare taká, že  $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$ .

1. Nájdí množinu  $E = \{\xi \in N \mid \xi \Rightarrow^* \varepsilon\}$  vymazávajúcich neterminálov v gramatike  $G$ :
  - 1.1 Nech  $E_0 = \{\xi \in N \mid \xi \rightarrow \varepsilon \in P\}$  (ide o neterminály „vymazávajúce na jeden krok“).
  - 1.2 Pre  $i = 1, 2, \dots$  iteruj  $E_i = E_{i-1} \cup \{\xi \in N \mid \exists u \in E_{i-1}^* : \xi \rightarrow u \in P\}$ , až kým pre nejaké  $k$  nenastane  $E_k = E_{k-1}$ .
  - 1.3 Polož  $E = E_k$ .
2. Pre každé pôvodné pravidlo  $\xi \rightarrow u \in P$  s  $\xi \in N$  a  $u \in (N \cup T)^+$  pridaj do množiny prepisovacích pravidiel všetky pravidlá  $\xi \rightarrow v_0 v_1 \dots v_j$  s  $j \in \mathbb{N}$  a  $v_0, \dots, v_j \in (N \cup T)^*$  také, že pre nejaké  $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in E$  je  $u = v_0 \alpha_1 v_1 \alpha_2 \dots v_{j-1} \alpha_j v_j$ . (Čiže pridáme všetky pravidlá, ktoré vzniknú z pravidla  $\xi \rightarrow u$  vypustením niektorých výskytov vymazávajúcich neterminálov v slove  $u$ .)
3. Odober z množiny prepisovacích pravidiel všetky pravidlá  $\xi \rightarrow \varepsilon$ , kde  $\xi \in N$ . Vráť výslednú gramatiku  $G' = (N', T', P', \sigma')$  ako výstup.

V kroku 2 by, samozrejme, bolo možné pridávať iba také pravidlá  $\xi \rightarrow v_0 v_1 \dots v_j$ , pre ktoré  $v_0 v_1 \dots v_j \neq \varepsilon$ . V opačnom prípade sa totiž pravidlo hneď v nasledujúcom kroku z gramatiky odstráni.

#### 4.1 Riešená úloha

**Úloha 3.** Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je bezkontextová gramatika s  $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$ ,  $T = \{a, b\}$  a

$$\begin{aligned} P = \{ & \sigma \rightarrow a\sigma \mid b\alpha \mid bb \\ & \alpha \rightarrow \beta \mid aa \\ & \beta \rightarrow b\beta\beta a\alpha\sigma \mid \varepsilon \\ & \gamma \rightarrow \alpha\alpha \mid a\gamma \mid a\}. \end{aligned}$$

Štandardnou konštrukciou prevedte gramatiku  $G$  do „bezepsilonového“ normálneho tvaru.

*Riešenie.* Nájdeme najprv množinu vymazávajúcich neterminálov  $E$ :

1.  $E_0 = \{\beta\}$ ,
2.  $E_1 = E_0 \cup \{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta\}$ ,
3.  $E_2 = E_1 \cup \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ,
4.  $E_3 = E_2 \cup \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\alpha, \beta, \gamma\} = E_2$ .

Teda  $E = E_3 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ . Z pravidiel gramatiky  $G$  následne získame nasledujúce nové pravidlá:

$$\begin{array}{lll}
\sigma \rightarrow a\sigma & \rightsquigarrow & \sigma \rightarrow a\sigma, \\
\sigma \rightarrow b\alpha & \rightsquigarrow & \sigma \rightarrow b\alpha \mid b, \\
\sigma \rightarrow bb & \rightsquigarrow & \sigma \rightarrow bb, \\
\alpha \rightarrow \beta & \rightsquigarrow & \alpha \rightarrow \beta \mid \varepsilon, \\
\alpha \rightarrow aa & \rightsquigarrow & \alpha \rightarrow aa, \\
\beta \rightarrow b\beta\beta a\alpha\sigma & \rightsquigarrow & \beta \rightarrow b\beta\beta a\alpha\sigma \mid b\beta\beta a\sigma \mid b\beta a\alpha\sigma \mid b\beta a\sigma \mid ba\alpha\sigma \mid ba\sigma, \\
\beta \rightarrow \varepsilon & \rightsquigarrow & \beta \rightarrow \varepsilon, \\
\gamma \rightarrow \alpha\alpha & \rightsquigarrow & \gamma \rightarrow \alpha\alpha \mid \alpha \mid \varepsilon, \\
\gamma \rightarrow a\gamma & \rightsquigarrow & \gamma \rightarrow a\gamma \mid a, \\
\gamma \rightarrow a & \rightsquigarrow & \gamma \rightarrow a.
\end{array}$$

Po odstránení duplikátov a pravidiel s prázdnyim slovom na pravej strane tak dostávame výslednú gramatiku  $G' = (N, T, P', \sigma)$  s

$$\begin{aligned}
P' = \{ & \sigma \rightarrow a\sigma \mid b\alpha \mid b \mid bb \\
& \alpha \rightarrow \beta \mid aa \\
& \beta \rightarrow b\beta\beta a\alpha\sigma \mid b\beta\beta a\sigma \mid b\beta a\alpha\sigma \mid b\beta a\sigma \mid ba\alpha\sigma \mid ba\sigma \\
& \gamma \rightarrow \alpha\alpha \mid \alpha \mid a\gamma \mid a \}.
\end{aligned}$$

□

**Poznámka 8.** Už sme spomenuli, že „bezepsilonový“ normálny tvar nie je normálnym tvarom v pravom slova zmysle: „bezepsilonové“ gramatiky nedokážu vygenerovať prázdne slovo a veta o normálnom tvare tak zaručuje iba ekvivalenciu „až na  $\varepsilon$ “. Tento drobný nedostatok sa občas zvykne riešiť alternatívnou definíciou „bezepsilonového“ normálneho tvaru, pri ktorej sa toleruje prepisovacie pravidlo  $\sigma \rightarrow \varepsilon$  v prípade, že sa počiatočný neterminál  $\sigma$  nevyskytuje na pravej strane žiadneho pravidla. Množina prepisovacích pravidiel  $P$  teda musí byť v tvare  $P \subseteq \{\sigma \rightarrow \varepsilon\} \cup N \times ((N - \{\sigma\}) \cup T)^+$ . Na prevod do tohto variantu „bezepsilonového“ normálneho tvaru stačí použiť horeuvedený algoritmus, pridať nový počiatočný neterminál  $\sigma'$ , pravidlo  $\sigma' \rightarrow \sigma$  a ak  $\sigma \in E$ , tak aj pravidlo  $\sigma' \rightarrow \varepsilon$ .

## 5 Formálna definícia pojmu odvodenia

Odvodenie v bezkontextovej gramatike je pomerne intuitívny pojem, ktorého definícií sa v literatúre nevenuje veľká pozornosť. Zvyčajne sa narába iba s predstavou o „odvodení  $\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n$ “, pričom sa toleruje, že takýto zápis v skutočnosti reprezentuje výrok a nie „entitu odvodenia“. V literatúre sa miestami objavujú pokusy o zmiernenie tejto nepresnosti podaním formálnej definície pojmu odvodenia, ktorá má zápisom ako ten vyššie priradiť určitý význam. Tieto definície sú však často chybné a nesúhlasia napríklad s teóriou okolo stromov odvodenia, kde je čitateľ znova prenechaný napospas intuícii.

Hovoriť o „odvodení  $\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n$ “ je účelné z hľadiska prehľadnosti a intuitívnosti zápisu a budeme tak robiť aj my. Na správne pochopenie konceptu stromov odvodenia je však nutné mať adekvátnu predstavu o tom, čo sa takýmto zápisom v skutočnosti myslí. Potrebujeme teda definíciu pojmu odvodenia, ktorá bude „v pozadí“ za každým zápisom typu  $\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n$  a ktorá zároveň bude v súlade s neskoršie zavedenými pojmami.

Uvedomme si najprv, že odvodenie *nemôžeme* definovať iba ako postupnosť slov  $(w_0, w_1, \dots, w_n)$  takých, že  $w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n$ , ba ani ako striedavú postupnosť takýchto slov a pravidiel používaných pri ich odvodzovaní. V bezkontextovej gramatike  $G = (N, T, P, \sigma)$  s  $N = \{\sigma, \alpha\}$ ,  $T = \{a\}$  a  $P = \{\sigma \rightarrow \alpha\alpha, \alpha \rightarrow \alpha\alpha \mid a\}$  totiž napríklad existujú dve *fundamentálne odlišné* odvodenia vetnej formy  $\alpha\alpha\alpha$ , ktoré obidve môžeme zapísať ako

$$\sigma \Rightarrow \alpha\alpha \Rightarrow \alpha\alpha\alpha.$$



Pri oboch týchto odvodeniach najprv na počiatočný neterminál aplikujeme pravidlo  $\sigma \rightarrow \alpha\alpha$  a následne pokračujeme použitím pravidla  $\alpha \rightarrow \alpha\alpha$ . Rozdiel medzi nimi spočíva v tom, na ktorý z výskytov neterminálu  $\alpha$  aplikujeme pravidlo  $\alpha \rightarrow \alpha\alpha$ . Ak teda vo vetných formách podčiarkneme výskyt neterminálov prepisovaných v nasledujúcom kroku, môžeme tieto dve odvodenia zapísať nasledovne:

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\alpha}\alpha \Rightarrow \alpha\alpha\alpha,$$

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \alpha\underline{\alpha} \Rightarrow \alpha\alpha\alpha.$$

Ako vhodný prístup k definícii pojmu odvodenia sa javí práve zahrnutie „podčiarknutých neterminálov“ použitých vyššie. Zo zápisu  $u\underline{\alpha}v \Rightarrow uv$  je totiž zrejmy výskyt prepisovaného neterminálu a aj použité prepisovacie pravidlo je ním určené jednoznačne.

Pre naše neskoršie účely je postačujúce pamätať si, že pod odvodením rozumieme *postupnosť vetných foriem s vyznačenými výskytmi prepisovaných neterminálov*. Nasledujúcu formálnu definíciu uvádzame viac-menej len pre úplnosť a s cieľom presvedčiť nedôverčivého čitateľa o možnosti pojem odvodenia plne sformalizovať.

**Definícia 4.** Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je bezkontextová gramatika. Nech  $\underline{N} = \{\underline{\alpha} \mid \alpha \in N\}$  je abeceda „podčiarknutých neterminálov“; predpokladajme, že je táto abeceda disjunktná s abecedou  $N \cup T$ . Nech  $h: (N \cup \underline{N} \cup T)^* \rightarrow (N \cup T)^*$  je homomorfizmus taký, že pre všetky  $\alpha \in N$  je  $h(\underline{\alpha}) = h(\alpha) = \alpha$  a pre všetky  $c \in T$  je  $h(c) = c$ . *Odvodenie* v gramatike  $G$  je konečná postupnosť slov  $(w_0, w_1, \dots, w_n)$  taká, že:

(i) Pre  $i = 0, \dots, n-1$  je  $w_i = u_i \underline{\alpha}_i v_i$ , kde  $u_i, v_i \in (N \cup T)^*$  a  $\alpha_i \in N$ ; ďalej  $w_n \in (N \cup T)^*$ .

(ii) Pre  $i = 0, \dots, n-1$  je  $h(w_{i+1}) = u_i x_i v_i$  pre nejaké  $x_i \in (N \cup T)^*$  také, že  $\alpha_i \rightarrow x_i \in P$ .

*Odvodenie slova  $w$  v gramatike  $G$*  je odvodenie  $(w_0, w_1, \dots, w_n)$  také, že  $h(w_0) = \sigma$  a  $w_n = w$ .

## 6 Stromy odvodenia, jednoznačnosť a viacznačnosť

Uvažujme opäť bezkontextovú gramatiku  $G$  z predchádzajúceho oddielu. Slovo  $aa$  sa v nej dá odvodiť dvoma spôsobmi:

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\alpha}\alpha \Rightarrow a\underline{\alpha} \Rightarrow aa,$$

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \alpha\underline{\alpha} \Rightarrow \underline{\alpha}a \Rightarrow aa.$$

Tieto odvodenia sa líšia iba poradím prepísania jednotlivých výskytov neterminálu  $\alpha$ ; „štruktúra“ odvodenia je v oboch prípadoch rovnaká. Podobná situácia nastane vždy, keď sa v odvodení vyskytne vetná forma s viac ako jedným neskôr prepísaným neterminálom – poradie ich prepísovania možno zvoliť ľubovoľne, čo znamená viacero formálne rôznych odvodení.

Aj z tohto dôvodu je často namieste považovať odvodenia s rovnakou „štruktúrou“, líšiace sa iba poradím prepísovania neterminálov, za ekvivalentné. Formalizáciou tejto myšlienky je koncept *stromu odvodenia*, čo je stromová štruktúra jedinečná pre každé odvodenie. Stromu odvodenia môže naopak zodpovedať aj viacero odvodení, ktoré sa však líšia iba poradím prepísovania neterminálov a možno ich tak považovať za ekvivalentné.

Prv než uvedieme jeho formálnu definíciu, ilustrujeme pojem stromu odvodenia na príklade.

*Príklad 1.* Uvažujme gramatiku  $G = (N, T, P, \sigma)$  s  $N = \{\sigma\}$ ,  $T = \{a, b\}$  a  $P = \{\sigma \rightarrow \sigma\sigma \mid a \mid b \mid \varepsilon\}$  a odvodenia

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\sigma}\sigma \Rightarrow \underline{\sigma}\sigma\sigma \Rightarrow a\underline{\sigma}\sigma \Rightarrow ab\underline{\sigma} \Rightarrow aba$$

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \sigma\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\sigma}\sigma\sigma \Rightarrow \underline{\sigma}\sigma\sigma\sigma \Rightarrow a\underline{\sigma}\sigma\sigma \Rightarrow a\underline{\sigma}\sigma \Rightarrow ab\underline{\sigma} \Rightarrow aba.$$

Príslušné stromy odvodenia sú na obrázku 1.



**Obr. 1:** Stromy odvodení v gramatike  $G$ .

Stromy odvodenia zodpovedajúce daným dvom odvodeniam slova  $aba$  sú rôzne, čo znamená, že tieto dve odvodenia nepovažujeme za ekvivalentné. Naopak, napríklad odvodenie

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \sigma \underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\sigma} a \Rightarrow \sigma \underline{\sigma} a \Rightarrow \underline{\sigma} ba \Rightarrow aba$$

má rovnaký strom odvodenia ako prvé odvodenie. Tieto dve odvodenia teda v určitom zmysle možno považovať za ekvivalentné.

Formálna definícia stromu odvodenia zvyčajne pozostáva z dvoch častí. V prvej sa definujú všetky korektné stromy odvodení v danej gramatike. V druhej časti sa potom definuje, kedy strom odvodenia prislúcha k nejakému odvodeniu. V nasledujúcom pod *stromom* rozumieme zakorenený strom s ohodnotenými uzlami a s pevným usporiadaním potomkov.

**Definícia 5.** Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je bezkontextová gramatika. *Strom odvodenia* v gramatike  $G$  je strom, pre ktorý sú splnené nasledujúce podmienky.

- (i) Každý vnútorný uzol je ohodnotený nejakým neterminálom  $\xi \in N$ .
- (ii) Každý list je ohodnotený buď nejakým symbolom  $d \in N \cup T$ , alebo prázdny slovom  $\varepsilon$ . Listy ohodnotené prázdny slovom nemajú súrodencov.
- (iii) Ak sú ohodnotenia všetkých synov uzla ohodnoteného neterminálom  $\xi \in N$  postupne dané ako  $d_1, \dots, d_n \in N \cup T \cup \{\varepsilon\}$  (v tomto poradí), tak  $P$  obsahuje pravidlo  $\xi \rightarrow d_1 \dots d_n$ .

Zrežazenie ohodnotení všetkých listov (v poradí zľava doprava) určuje vetnú formu vygenerovanú daným odvodením z neterminálu, ktorým je ohodnotený koreň.

**Definícia 6.** Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je bezkontextová gramatika a  $\xi \Rightarrow^n w$  je odvodenie v  $G$ ,<sup>3</sup> kde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\xi \in N$  a  $w \in (N \cup T)^*$ . *Strom odvodenia*  $\xi \Rightarrow^n w$  je strom odvodenia v gramatike  $G$  definovaný indukčne vzhľadom na  $n$ :

1. Pre  $n = 0$  nutne  $w = \xi$ ; strom odvodenia  $\xi \Rightarrow^0 \xi$  je potom strom pozostávajúci z jediného uzla ohodnoteného  $\xi$ .
2. Strom odvodenia  $\xi \Rightarrow^n u \underline{\alpha} v \Rightarrow u x v = w$  vznikne zo stromu odvodenia  $\xi \Rightarrow^n u \alpha v$  pridaním synov jeho  $(|u| + 1)$ -ému „neepsilónovému“ listu tak, aby zrežazenie ich ohodnotení bolo  $x$ .

*Stromom odvodenia* slova  $w \in L(G)$  v gramatike  $G$  ďalej nazveme strom ľubovoľného z odvodení  $\sigma \Rightarrow^* w$  slova  $w$  v tejto gramatike.

Indukciou by sme ľahko dokázali, že zrežazením ohodnotení listov stromu odvodenia  $\xi \Rightarrow^n w$  vždy dostaneme slovo  $w$ .

<sup>3</sup>Pod nepresným zápisom  $\xi \Rightarrow^n w$  sa tu ukrýva odvodenie v zmysle definície 4.

*Ľavé krajné odvodenie* je také odvodenie  $(w_0, w_1, \dots, w_n)$ , kde vo všetkých vetných formách  $w_0, \dots, w_{n-1}$  je podčiarknutý prvý výskyt neterminálu (zľava) a *pravé krajné odvodenie* je také odvodenie, kde sú podčiarknuté posledné výskyty neterminálov. Inými slovami: v ľavom krajnom odvodení sa v každom kroku odvodenia prepisuje prvý neterminál zľava a v pravom krajnom odvodení sa v každom kroku prepisuje prvý neterminál sprava. Krok ľavého krajného odvodenia sa niekedy zvykne označovať ako  $\Rightarrow_{lm}$  a krok pravého krajného odvodenia ako  $\Rightarrow_{rm}$ .

Ľahko vidieť, že existuje vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi stromami odvodenia a ľavými (resp. pravými) krajnými odvodeniami.

**Definícia 7.** Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je bezkontextová gramatika. Gramatika  $G$  sa nazýva *jednoznačná*, ak pre každé slovo  $w \in L(G)$  existuje práve jedno ľavé krajné odvodenie v gramatike  $G$ . Gramatika, ktorá nie je jednoznačná, sa nazýva *viaczná*.

**Definícia 8.** Nech  $L \in \mathcal{L}_{CF}$  je bezkontextový jazyk. Jazyk  $L$  sa nazýva *jednoznačný*, ak existuje jednoznačná bezkontextová gramatika  $G$  taká, že  $L(G) = L$ . Jazyk, ktorý nie je jednoznačný, sa nazýva *vnútorne viaczná*.

Čitateľ si už istotne uvedomil, že jednoznačnosť gramatiky je ekvivalentná existencii práve jedného *pravého krajného* odvodenia pre každé slovo  $w \in L(G)$ , čo je ďalej ekvivalentné tomu, že pre každé slovo  $w \in L(G)$  existuje práve jeden strom jeho odvodenia v gramatike  $G$ .

## 7 Uzáverové vlastnosti triedy bezkontextových jazykov

Hovoríme, že trieda jazykov  $\mathcal{L}$  je *uzavretá* na nejakú  $k$ -árnu operáciu, ak táto operácia pre každú  $k$ -ticiu jazykov z triedy  $\mathcal{L}$  vždy opäť vráti jazyk z triedy  $\mathcal{L}$ .

Uzáverovými vlastnosťami tried jazykov sa na tomto predmete budeme hlbšie zaoberať neskôr. Na prednáške však už bolo pomocou bezkontextových gramatík dokázaných niekoľko uzáverových vlastností triedy  $\mathcal{L}_{CF}$  všetkých bezkontextových jazykov. Tri z nich si teraz pripomenieme – za každým sa pritom obmedzíme iba na opis príslušnej *konštrukcie* bezkontextovej gramatiky; dôkazy správnosti týchto konštrukcií odzneli na prednáške.

**Veta 4.** Trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  je uzavretá na zjednotenie: pre všetky  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{CF}$  je aj  $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_{CF}$ .

Nech  $G_1 = (N_1, T_1, P_1, \sigma_1)$  a  $G_2 = (N_2, T_2, P_2, \sigma_2)$  sú ľubovoľné bezkontextové gramatiky také, že  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ ,  $L(G_1) = L_1$  a  $L(G_2) = L_2$ . Jazyk  $L_1 \cup L_2$  je potom generovaný bezkontextovou gramatikou  $G = (N, T, P, \sigma)$ , kde  $\sigma \notin N_1 \cup T_1 \cup N_2 \cup T_2$  je nový neterminál,  $N = N_1 \cup N_2 \cup \{\sigma\}$ ,  $T = T_1 \cup T_2$  a  $P = P_1 \cup P_2 \cup \{\sigma \rightarrow \sigma_1 \mid \sigma_2\}$ .

**Veta 5.** Trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  je uzavretá na zretazenie: pre všetky  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{CF}$  je aj  $L_1 \cdot L_2 \in \mathcal{L}_{CF}$ .

Nech  $G_1 = (N_1, T_1, P_1, \sigma_1)$  a  $G_2 = (N_2, T_2, P_2, \sigma_2)$  sú ľubovoľné bezkontextové gramatiky také, že  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ ,  $L(G_1) = L_1$  a  $L(G_2) = L_2$ . Jazyk  $L_1 \cdot L_2$  je potom generovaný bezkontextovou gramatikou  $G = (N, T, P, \sigma)$ , kde  $\sigma \notin N_1 \cup T_1 \cup N_2 \cup T_2$  je nový neterminál,  $N = N_1 \cup N_2 \cup \{\sigma\}$ ,  $T = T_1 \cup T_2$  a  $P = P_1 \cup P_2 \cup \{\sigma \rightarrow \sigma_1 \sigma_2\}$ .

**Veta 6.** Trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  je uzavretá na iteráciu: pre všetky  $L \in \mathcal{L}_{CF}$  je aj  $L^* \in \mathcal{L}_{CF}$ .

Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je ľubovoľná bezkontextová gramatika taká, že  $L(G) = L$ . Jazyk  $L^*$  je potom generovaný bezkontextovou gramatikou  $G' = (N', T, P', \sigma')$ , kde  $\sigma' \notin N \cup T$  je nový neterminál,  $N' = N \cup \{\sigma'\}$  a  $P' = P \cup \{\sigma' \rightarrow \sigma \sigma' \mid \varepsilon\}$ .