Cvičenie č. 5
Konečné automaty (1. časť)

Peter Kostolányi

19. októbra 2022

1 Deterministické a nedeterministické konečné automaty

Začnime stručným zopakovaním základných definícií súvisiacich s konečnými automatmi v podobe, v akej odzneli na prednáške. Rovno pritom upozornime na fakt, že ide len o jeden z množstva prístupov k definícii konečných automatov a nimi rozoznávaných jazykov; pri štúdiu literatúry je teda potrebné počítať s určitými rozdielmi v týchto definíciách, ktoré sú však – ako pochopíme neskôr – spravidla relatívne nepodstatné.

Definícia 1. *Deterministický konečný automat* je pätica $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde K je konečná množina stavov, Σ je vstupná abeceda, $\delta\colon K \times \Sigma \to K$ je prechodová funkcia, $q_0 \in K$ je počiatočný stav a $F \subseteq K$ je množina koncových (alebo akceptačných) stavov.

Všimnime si, že dôsledkom existencie počiatočného stavu q_0 je neprázdnosť množiny stavov K.

Definícia 2. *Konfigurácia* deterministického konečného automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je dvojica (q, w), kde $q \in K$ je stav a $w \in \Sigma^*$ je slovo (reprezentujúce nedočítanú časť vstupu).

Definícia 3. *Krok výpočtu* deterministického konečného automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je binárna relácia $\vdash_A$ na množine konfigurácií automatu A taká, že pre $p, q \in K$ a $u, v \in \Sigma^*$ je $(p, u) \vdash_A (q, v)$ práve vtedy, keď existuje $c \in \Sigma$ také, že $u = cv$ a $\delta(p, c) = q$.

V prípade, že je uvažovaný automat A zrejmý z kontextu, píšeme namiesto $\vdash_A$ často iba $\vdash$. Ide pritom o reláciu; pre každé $k \in \mathbb{N}$ sú teda v relácii $\vdash^k$ tie dvojice konfigurácií, medzi ktorými možno „prejsť“ na k krokov výpočtu. V relácii $\vdash^*$, reflexívno-tranzitívnom uzávere relácie $\vdash$, sú tie dvojice konfigurácií, medzi ktorými možno „prejsť“ na nejaký počet krokov a v tranzitívnom uzávere, relácii $\vdash^+$, sú tie dvojice konfigurácií, medzi ktorými možno „prejsť“ na nejaký nenulový počet krokov. Relácia $\vdash^0$ je identita.

Definícia 4. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat. *Jazyk* akceptovaný (alebo rozoznávaný) automatom A je daný ako $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F : (q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)\}$.

Poznámka 1. V literatúre sa deterministické konečné automaty niekedy definujú aj s čiastočnou prechodovou funkciou, čo znamená, že hodnota $\delta(q, c)$ nemusí byť definovaná pre všetky stavy q a symboly c.[1] Na tomto predmete však pracujeme s definíciou s úplnou prechodovou funkciou – pri zadávaní deterministického konečného automatu je teda potrebné špecifikovať výstupy jeho prechodovej funkcie pre všetky stavy a všetky písmená.

Nedeterministický konečný automat sa oproti deterministickému líši hlavne tým, že v ňom z jedného stavu môže viesť aj viacero prechodov na ten istý symbol (prípadne nemusí existovať žiaden takýto prechod). To bolo na prednáške sformalizované pomocou prechodovej funkcie, ktorá pre každý stav q a symbol c vráti *množinu* stavov $\delta(q, c)$. Výpočet automatu tak môže zo stavu q na písmeno c pokračovať do všetkých stavov z množiny $\delta(q, c)$, v dôsledku čoho môže na vstupnom slove w existovať viacero rôznych výpočtov. Automat pritom slovo w akceptuje práve vtedy, keď *existuje aspoň jeden* jeho výpočet na slove w, ktorý sa skončí v akceptačnom stave. Pri definícii z prednášky majú navyše nedeterministické konečné automaty možnosť vykonávať aj *prechody na prázdne slovo*, pri ktorých nič neprečítajú zo vstupu.

[1] Ekvivalencia oboch definícií je priamym dôsledkom ekvivalencie deterministických a nedeterministických konečných automatov, ktorej sa budeme bližšie venovať na nasledujúcom cvičení.

Definícia 5. *Nedeterministický konečný automat* je pätica $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde K je konečná množina stavov, Σ je vstupná abeceda, $\delta\colon K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^K$ je prechodová funkcia, $q_0 \in K$ je počiatočný stav a $F \subseteq K$ je množina koncových (alebo akceptačných) stavov.

Definícia 6. *Konfigurácia* nedeterministického konečného automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je dvojica (q, w), kde $q \in K$ je stav a $w \in \Sigma^*$ je slovo (reprezentujúce nedočítanú časť vstupu).

Definícia 7. *Krok výpočtu* nedeterministického konečného automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je binárna relácia $\vdash_A$ na množine konfigurácií automatu A taká, že pre $p, q \in K$ a $u, v \in \Sigma^*$ je $(p, u) \vdash_A (q, v)$ práve vtedy, keď existuje $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $u = zv$ a $q \in \delta(p, z)$.

Podobne ako pri deterministických konečných automatoch píšeme v prípadoch, keď je uvažovaný automat A zrejmý z kontextu, namiesto $\vdash_A$ často iba $\vdash$.

Definícia 8. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je nedeterministický konečný automat. *Jazyk* akceptovaný (alebo rozoznávaný) automatom A je daný ako $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F : (q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)\}$.

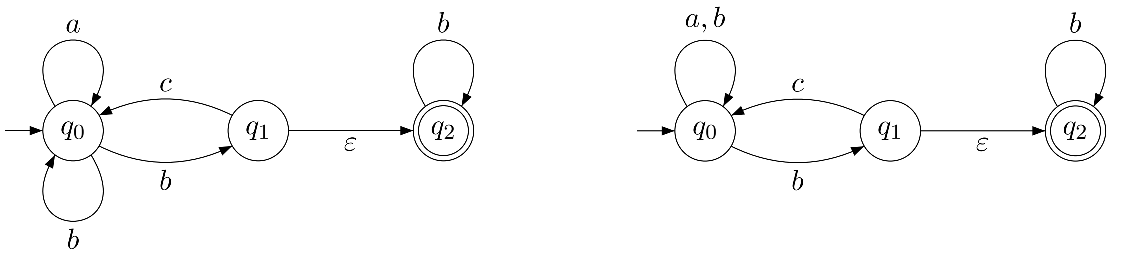
Častým spôsobom ako zadať konečný automat je tzv. *prechodový diagram*, v ktorom sú stavy znázornené „kolečkami“, prechodová funkcia šípkami medzi stavmi, počiatočný stav krátkou šípkou do zodpovedajúceho „kolečka“ a akceptačné stavy „zdvojenými kolečkami“.

Príklad 1. Uvažujme nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2\}$ a prechodovou funkciou danou nasledovne:

$$
\begin{array}{llll}
\delta(q_0, a) = \{q_0\}, & \delta(q_0, b) = \{q_0, q_1\}, & \delta(q_0, c) = \emptyset, & \delta(q_0, \varepsilon) = \emptyset, \\
\delta(q_1, a) = \emptyset, & \delta(q_1, b) = \emptyset, & \delta(q_1, c) = \{q_0\}, & \delta(q_1, \varepsilon) = \{q_2\}, \\
\delta(q_2, a) = \emptyset, & \delta(q_2, b) = \{q_2\}, & \delta(q_2, c) = \emptyset & \delta(q_2, \varepsilon) = \emptyset.
\end{array}
$$

Ľahko vidieť – a pri troche úsilia aj dokázať – že tento automat rozoznáva jazyk $L(A) = \{a, b, bc\}^* b^+$.

Prechodový diagram automatu A je na obrázku 1a. Násobné prechody medzi rovnakými stavmi niekedy pre prehľadnosť kreslíme ako jedinú šípku s viacerými ohodnoteniami, tak ako v prípade slučky v diagrame na obrázku 1b.



(a) Diagram automatu $\mathcal{A}$.

(b) Ekvivalentný diagram toho istého automatu.

Obr. 1: Prechodový diagram nedeterministického konečného automatu A.

Nasledujúce jednoduché tvrdenie, ktorého dôkaz prenechávame ako jednu z úloh na nasledujúce cvičenie, budeme často používať bez toho, aby sme to explicitne uvádzali (platí pre deterministické aj pre nedeterministické konečné automaty):

Tvrdenie 1. *Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je konečný automat. Potom:*

a) Pre všetky $p, q \in K$ a $u, v \in \Sigma^*$ je $(p, uv) \vdash^* (q, v)$ práve vtedy, keď $(p, u) \vdash^* (q, \varepsilon)$,

b) Pre všetky $p, q, r \in K$ a $u, v \in \Sigma^*$ také, že $(p, u) \vdash^* (q, \varepsilon)$ a $(q, v) \vdash^* (r, \varepsilon)$ je aj $(p, uv) \vdash^* (r, \varepsilon)$.

2 Dokazovanie správnosti konštrukcie automatu

Dokazovanie tvrdenia $L(A) = L$ pre konečný automat A a jazyk L je v mnohom podobné dokazovaniu takýchto tvrdení pre bezkontextové gramatiky. Hlavným spoločným znakom je matematická indukcia, ktorou sa obyčajne dokáže o niečo silnejšie tvrdenie, než to pôvodne zamýšľané. Pre konečné automaty sú takýmto vhodným silnejším tvrdením väčšinou *invarianty* pre jednotlivé stavy: pre každý stav q sa charakterizujú slová w dočítané automatom v stave q – čiže slová w, pre ktoré je $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$.[2] Tvrdenie $L(A) = L$ potom obyčajne vyplýva z invariantov pre akceptačné stavy.

2.1 Riešené úlohy

Úloha 1. Zostrojte deterministický konečný automat akceptujúci jazyk

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \equiv 1 \pmod 3 \ \wedge\ \#_b(w) \equiv 3 \pmod 7\}$$

a správnosť svojej konštrukcie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že jazyk L je akceptovaný automatom $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$, $\Sigma = \{a, b\}$, $q_0 = [0,0]$, $F = \{[1,3]\}$ a

$$\begin{aligned} \delta([s,t], a) &= [s+1, t], \quad \forall s \in \mathbb{Z}_3\ \forall t \in \mathbb{Z}_7, \\ \delta([s,t], b) &= [s, t+1], \quad \forall s \in \mathbb{Z}_3\ \forall t \in \mathbb{Z}_7, \end{aligned}$$

kde operácie sčítania sú, samozrejme, vždy modulo 3 resp. 7.

Rovnosť $L(A) = L$ vyplynie z nasledujúceho tvrdenia o *invariantoch* pre jednotlivé stavy:

$$\forall [s,t] \in K\ \forall w \in \Sigma^* : ([0,0], w) \vdash^* ([s,t], \varepsilon) \iff \#_a(w) \equiv s \pmod 3 \ \wedge\ \#_b(w) \equiv t \pmod 7.$$

Dokážme teraz jednotlivé implikácie, vždy naraz pre všetky stavy $[s,t]$ a slová w.

$\Rightarrow$: Indukciou vzhľadom na n dokážeme, že pre všetky stavy $[s,t] \in K$ a všetky $w \in \Sigma^*$ spĺňajúce $([0,0], w) \vdash^n ([s,t], \varepsilon)$ musí byť $\#_a(w) \equiv s \pmod 3$ a zároveň $\#_b(w) \equiv t \pmod 7$.

1. Nech $n = 0$. Potom $[s,t] = [0,0]$ a $w = \varepsilon$. Tvrdenie teda platí.
2. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n = k$ a uvažujme $n = k+1$.
   Nech $[s,t] \in K$ a $w \in \Sigma^*$ sú také, že $([0,0], w) \vdash^{k+1} ([s,t], \varepsilon)$. Potom $w = uc$ pre nejaké $u \in \Sigma^*$ a $c \in \Sigma$ také, že pre nejaký stav $[s', t'] \in K$ je

   $$([0,0], uc) \vdash^k ([s', t'], c) \vdash ([s,t], \varepsilon)$$

   (posledný krok výpočtu musí byť na písmeno, pretože automat A je deterministický).
   a) Ak $c = a$, nutne $\delta([s', t'], a) = [s,t]$. Z definície prechodovej funkcie δ vyplýva, že $s' = s-1$ a $t' = t$ a vďaka indukčnému predpokladu dostávame $\#_a(u) \equiv s-1 \pmod 3$ a $\#_b(u) \equiv t \pmod 7$. Preto naozaj $\#_a(w) = \#_a(ua) = \#_a(u) + 1 \equiv s \pmod 3$ a $\#_b(w) = \#_b(ua) = \#_b(u) \equiv t \pmod 7$.
   b) Ak $c = b$, možno argumentovať analogicky.

$\Leftarrow$: Keďže je automat A deterministický, je možné dokázať opačnú implikáciu aj bez ďalšej indukcie. Stačí si všimnúť, že dokazované invarianty pre jednotlivé stavy sú „disjunktné" – nemôže sa teda stať, že by niektoré slovo súčasne vyhovovalo invariantom pre dva rôzne stavy.

Z úplnosti prechodovej funkcie deterministického konečného automatu A vyplýva, že pre každé slovo $w \in \Sigma^*$ existuje stav $q \in K$ taký, že $([0,0], w) \vdash^* (q, \varepsilon)$. Nech slovo w vyhovuje invariantu pre nejaký stav $[s,t] \in K$, t. j. $\#_a(w) \equiv s \pmod 3$ a $\#_b(w) \equiv t \pmod 7$. Potom nutne $q = [s,t]$, pretože v opačnom prípade by podľa predchádzajúcej implikácie muselo slovo w vyhovovať invariantu pre stav $q \neq [s,t]$, čo sa vylučuje s platnosťou invariantu pre stav $[s,t]$.

[2] Podobne by bolo možné pre každý stav q charakterizovať aj tie slová, pre ktoré existuje výpočet začínajúci v stave q a končiaci v akceptačnom stave. Takýto prístup je však väčšinou o niečo menej intuitívny.

Rovnosť $L(A) = L$ je už bezprostredným dôsledkom dokázaného:

$\subseteq$: Nech $w \in L(A)$. Keďže $[1,3]$ je jediný akceptačný stav, musí platiť $([0,0], w) \vdash^* ([1,3], \varepsilon)$. Z invariantu pre $[1,3]$ ale vyplýva $\#_a(w) \equiv 1 \pmod 3$ a $\#_b(w) \equiv 3 \pmod 7$, a teda $w \in L$.

$\supseteq$: Nech $w \in L$. Potom $\#_a(w) \equiv 1 \pmod 3$ a $\#_b(w) \equiv 3 \pmod 7$ a z dokázaných invariantov vyplýva, že $([0,0], w) \vdash^* ([1,3], \varepsilon)$. Preto $w \in L(A)$. □

Úloha 2. Nech $\Sigma = \{a, b\}$. Zostrojte nedeterministický konečný automat akceptujúci jazyk

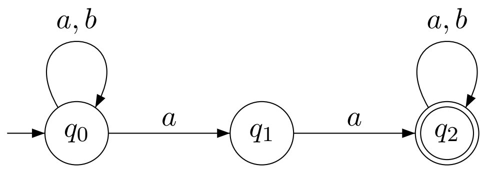
$$L = \Sigma^* aa \Sigma^*$$

a správnosť svojej konštrukcie dokážte.

Riešenie. Ukážeme, že jazyk L je akceptovaný automatom $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ a

$$\begin{aligned} &\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}, && \delta(q_1, a) = \{q_2\}, && \delta(q_2, a) = \{q_2\}, \\ &\delta(q_0, b) = \{q_0\}, && \delta(q_1, b) = \emptyset, && \delta(q_2, b) = \{q_2\}, \\ &\delta(q_0, \varepsilon) = \emptyset, && \delta(q_1, \varepsilon) = \emptyset, && \delta(q_2, \varepsilon) = \emptyset. \end{aligned}$$

Prechodový diagram automatu A je na obrázku 2.



Obr. 2: Prechodový diagram nedeterministického konečného automatu A.

Pre stavy automatu A dokážeme nasledujúce invarianty:

$$\begin{aligned} &I_0\colon \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^* (q_0, \varepsilon) \iff w \in \Sigma^*, \\ &I_1\colon \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^* (q_1, \varepsilon) \iff w \in \Sigma^* a, \\ &I_2\colon \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^* (q_2, \varepsilon) \iff w \in \Sigma^* aa \Sigma^*. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Matematickou indukciou vzhľadom na n dokážeme, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &I_0'\colon \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^n (q_0, \varepsilon) \Rightarrow w \in \Sigma^*, \\ &I_1'\colon \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^n (q_1, \varepsilon) \Rightarrow w \in \Sigma^* a, \\ &I_2'\colon \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^n (q_2, \varepsilon) \Rightarrow w \in \Sigma^* aa \Sigma^*. \end{aligned}$$

1. Pre $n = 0$ môže byť ľavá strana pravdivá iba pri implikácii I_0'. V takom prípade tiež nutne $w = \varepsilon$, čo je slovo zo Σ^*.
2. Predpokladajme platnosť implikácií I_0' až I_2' pre $n = k$ a uvažujme $n = k + 1$.
   - I_0': Pre každé $w \in \Sigma^*$ spĺňajúce $(q_0, w) \vdash^{k+1} (q_0, \varepsilon)$ je triviálne $w \in \Sigma^*$.
   - I_1': Nech $w \in \Sigma^*$ je slovo také, že $(q_0, w) \vdash^{k+1} (q_1, \varepsilon)$. Potom $(q_0, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (q_1, \varepsilon)$ pre nejaké $q \in K$, $u \in \Sigma^*$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $w = uz$.
     V takom prípade $q_1 \in \delta(q, z)$ a z definície prechodovej funkcie δ ľahko vidieť, že $z = a$. Preto naozaj $w = ua \in \Sigma^* a$.
   - I_2': Nech $w \in \Sigma^*$ je slovo také, že $(q_0, w) \vdash^{k+1} (q_2, \varepsilon)$. Potom $(q_0, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (q_2, \varepsilon)$ pre nejaké $q \in K$, $u \in \Sigma^*$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $w = uz$.
     Preto $q_2 \in \delta(q, z)$, a teda buď $q = q_1$ a $z = a$, alebo $q = q_2$ a $z \in \{a, b\}$. V prvom prípade z indukčného predpokladu dostávame $u \in \Sigma^* a$, z čoho $w = ua \in \Sigma^* aa \Sigma^*$. V druhom je z indukčného predpokladu $u \in \Sigma^* aa \Sigma^*$, a teda aj $w = uz \in \Sigma^* aa \Sigma^*$.

$\Leftarrow$: Nech $w \in \Sigma^*$. Dokážme najprv implikáciu

$$I_0'' \colon w \in \Sigma^* \Rightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_0, \varepsilon).$$

Indukciou vzhľadom na dĺžku slova w.

1. Ak $|w| = 0$, je $w = \varepsilon$ a $(q_0, \varepsilon) \vdash^* (q_0, \varepsilon)$.
2. Predpokladajme platnosť implikácie pre slová dĺžky k a uvažujme $w \in \Sigma^*$ s $|w| = k + 1$. Nech $w = uc$, kde $u \in \Sigma^k$ a $c \in \Sigma$. Na slovo u sa vzťahuje indukčný predpoklad, a teda $(q_0, u) \vdash^* (q_0, \varepsilon)$. Keďže ale $q_0 \in \delta(q_0, a)$ a $q_0 \in \delta(q_0, b)$, nutne $(q_0, c) \vdash (q_0, \varepsilon)$. V dôsledku toho skutočne $(q_0, w) = (q_0, uc) \vdash^* (q_0, c) \vdash (q_0, \varepsilon)$.

Dokážeme teraz druhú implikáciu

$$I_1'' \colon w \in \Sigma^* a \Rightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_1, \varepsilon).$$

Každé slovo $w \in \Sigma^* a$ môžeme napísať ako $w = ua$, kde $u \in \Sigma^*$. Podľa implikácie I_0'' teda $(q_0, u) \vdash^* (q_0, \varepsilon)$. Keďže ale $q_1 \in \delta(q_0, a)$, dostávame $(q_0, w) = (q_0, ua) \vdash^* (q_0, a) \vdash (q_1, \varepsilon)$.

Zostáva dokázať poslednú implikáciu

$$I_2'' \colon w \in \Sigma^* aa \Sigma^* \Rightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_2, \varepsilon).$$

Slovo $w \in \Sigma^* aa \Sigma^*$ napíšme ako $w = uaav$ pre nejaké slová $u, v \in \Sigma^*$. Implikáciu I_2'' dokážeme indukciou vzhľadom na dĺžku slova v.

1. Pre $|v| = 0$ je $v = \varepsilon$ a $w = uaa$. Podľa implikácie I_1'' platí $(q_0, ua) \vdash^* (q_1, \varepsilon)$. Keďže ale $q_2 \in \delta(q_1, a)$, dostávame $(q_0, w) = (q_0, uaa) \vdash^* (q_1, a) \vdash (q_2, \varepsilon)$.
2. Predpokladajme platnosť tvrdenia pre $|v| = k$ a uvažujme $v \in \Sigma^*$ také, že $|v| = k + 1$. Potom $w = uaaxc$, kde $x \in \Sigma^k$ a $c \in \Sigma$. Z indukčného predpokladu $(q_0, uaax) \vdash^* (q_2, \varepsilon)$. Keďže ale $q_2 \in \delta(q_2, a)$ a $q_2 \in \delta(q_2, b)$, dostávame $(q_0, w) = (q_0, uaaxc) \vdash^* (q_2, c) \vdash (q_2, \varepsilon)$.

Keďže je q_2 jediným akceptačným stavom, $w \in \Sigma^*$ patrí do $L(A)$ práve vtedy, keď $(q_0, w) \vdash^* (q_2, \varepsilon)$. To ale vďaka invariantu I_2 nastane práve vtedy, keď $w \in \Sigma^* aa \Sigma^* = L$. Skutočne teda $L(A) = L$. $\square$

3 „Odepsilonovanie“ nedeterministických konečných automatov

Na prednáške bolo dokázané, že prechody na prázdne slovo nie sú pre nedeterministické konečné automaty nevyhnutné – každý nedeterministický konečný automat možno prerobiť na ekvivalentný, ktorý žiadne takéto prechody nemá.

Veta 1. *Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je nedeterministický konečný automat. Potom existuje nedeterministický konečný automat $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$ taký, že $L(A') = L(A)$ a pre všetky $q \in K'$ je $\delta'(q, \varepsilon) = \emptyset$.*

Konštrukcií zbavujúcich nedeterministický konečný automat prechodov na prázdne slovo existuje viacero. V nasledujúcom si pripomenieme algoritmus, ktorého správnosť bola dokázaná na prednáške. Jeho vstupom je nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

1. Pre všetky $q \in K$ nájdi (napríklad prehľadávaním do hĺbky) „epsilonový chvost stavu q“, čo je množina $[q]_\varepsilon$ stavov dosiahnuteľných z q na prázdne slovo: $[q]_\varepsilon = \{p \in K \mid (q, \varepsilon) \vdash^* (p, \varepsilon)\}$.

2. Odstráň všetky prechody na ε.

3. Pre každý stav $q \in K$ okrem q_0 a každé $c \in \Sigma$ pridaj prechody zo stavu q na písmeno c do všetkých stavov $p \in K$ takých, že pre nejaké $q' \in K$ je $q' \in \delta(q, c)$ a $p \in [q']_\varepsilon$.

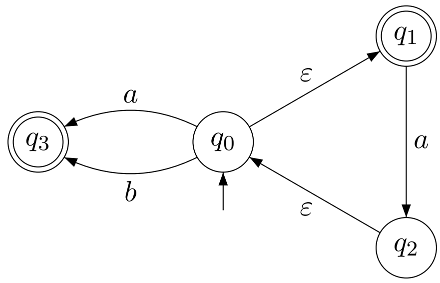
4. Pre každé $c \in \Sigma$ pridaj prechody zo stavu q_0 na písmeno c do všetkých stavov $p \in K$ takých, že pre nejaké $q, q' \in K$ je $q \in [q_0]_\varepsilon$, $q' \in \delta(q, c)$ a $p \in [q']_\varepsilon$.

5. Ak $[q_0]_\varepsilon$ obsahuje aspoň jeden akceptačný stav, pridaj q_0 do množiny akceptačných stavov.

Poznámka 2. V krokoch 3 a 4 uvedeného algoritmu označuje δ prechodovú funkciu *pôvodného* automatu A. Napríklad v kroku 4 teda netreba uvažovať prechody pridané v kroku 3.

3.1 Riešená úloha

Úloha 3. Uvažujme nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s $K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_1, q_3\}$ a prechodovou funkciou δ danou prechodovým diagramom na obrázku 3. Štandardnou konštrukciou zbavte automat A prechodov na ε.

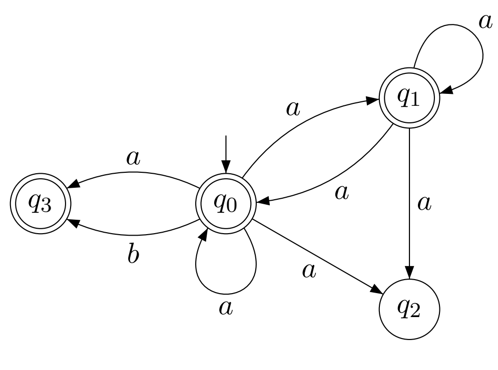


Obr. 3: Prechodový diagram nedeterministického konečného automatu A.

Riešenie. Pre každý stav $q \in K$ najprv nájdeme jeho „epsilonový chvost" $[q]_\varepsilon$:

$$[q_0]_\varepsilon = \{q_0, q_1\}, \qquad [q_1]_\varepsilon = \{q_1\},$$
$$[q_2]_\varepsilon = \{q_2, q_0, q_1\}, \qquad [q_3]_\varepsilon = \{q_3\}.$$

V kroku 2 odstránime prechody na ε vedúce z q_0 do q_1 a z q_2 do q_0. Pokračujme krokom 3. Keďže $q_2 \in \delta(q_1, a)$ a $q_0, q_1 \in [q_2]_\varepsilon$, vo výslednom automate budú prechody zo stavu q_1 na písmeno a vedúce do stavov q_0 a q_1. V kroku 3 nepribudnú žiadne ďalšie prechody. Keďže $q_1 \in [q_0]_\varepsilon$, $q_2 \in \delta(q_1, a)$ a $q_0, q_1, q_2 \in [q_2]_\varepsilon$, v kroku 4 pribudnú prechody zo stavu q_0 na písmeno a do stavov q_0, q_1 a q_2.



Obr. 4: Prechodový diagram nedeterministického konečného automatu A'.

V poslednom kroku sa stane akceptačným aj stav q_0, pretože $q_1 \in [q_0]_\varepsilon \cap F$. Výsledný automat $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$ je potom znázornený diagramom na obrázku 4. $\square$

Poznámka 3. Algoritmus z prednášky je v zásade založený na nahradzovaní postupností prechodov typu „jeden prechod na písmeno a niekoľko prechodov na ε" jedným prechodom na písmeno. Existuje aj duálny algoritmus, v ktorom sa jedným prechodom na písmeno nahradzujú postupnosti typu „niekoľko prechodov na ε a jeden prechod na písmeno". Takýto prístup umožňuje spracovať počiatočný stav q_0 konzistentne s ostatnými stavmi – nie je teda nutná analógia kroku 4. Krok 5 by ale naopak bolo nutné vykonať pre všetky stavy (a nielen pre počiatočný stav q_0).

Obidva tieto varianty „odepsilonovacieho" algoritmu možno upraviť aj pre nedeterministické konečné automaty s viac ako jedným počiatočným stavom, kde ich možno interpretovať azda najprirodzenejším a najelegantnejším spôsobom.