Cvičenie č. 6
Konečné automaty (2. časť)

Peter Kostolányi

26. októbra 2022

1 Determinizácia konečných automatov

Je jedným z kľúčových výsledkov teórie konečných automatov, že deterministické a nedeterministické konečné automaty sú rovnako silné. Jeden smer tohto tvrdenia je zrejmý: aj keď deterministický konečný automat v zmysle jeho formálnej definície z prednášky *nie je* súčasne aj nedeterministickým konečným automatom, po drobnej úprave prechodovej funkcie sa ním stane. Zvyšná časť tvrdenia bola dokázaná na prednáške a možno ju sformulovať v podobe nasledujúcej vety.

Veta 1. *Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je nedeterministický konečný automat. Potom existuje* deterministický *konečný automat $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$ taký, že $L(A') = L(A)$.*

1.1 Podmnožinová konštrukcia

Algoritmus determinizácie nedeterministického konečného automatu predpokladá ako svoj vstup už „odepsilonovaný" nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a spočíva v takzvanej podmnožinovej konštrukcii:

1. Nech $K' = 2^K$.
2. Pre každé $Q \in K'$ a každé $c \in \Sigma$ polož $\delta'(Q, c) = \{p \in K \mid \exists q \in Q : p \in \delta(q, c)\}$.
3. Za počiatočný stav q_0' vezmi množinu $\{q_0\}$.
4. Za F' vezmi množinu všetkých stavov $Q \in K'$ takých, že $Q \cap F \neq \emptyset$.

Výstupom je deterministický konečný automat $A' = (K', \Sigma, \delta', q_0', F')$ taký, že $L(A') = L(A)$.

1.2 Zefektívnenie podmnožinovej konštrukcie

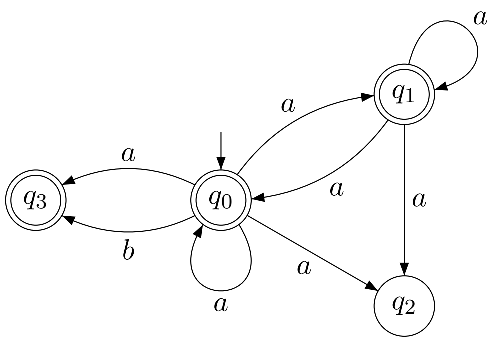
Výsledkom podmnožinovej konštrukcie v podobe, v akej bola opísaná vyššie, môže vo všeobecnosti byť aj automat s veľmi veľkým množstvom nedosiahnuteľných – a teda zbytočných – stavov. Tomuto nedostatku možno predísť *postupným konštruovaním* ekvivalentného deterministického automatu A' tak, aby tento obsahoval *iba dosiahnuteľné* stavy. Vstupom nasledujúcej schémy determinizačného algoritmu[1] je opäť už „odepsilonovaný" nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a jej výstupom bude deterministický konečný automat $A' = (K', \Sigma, \delta', q_0', F')$ taký, že $L(A') = L(A)$. V priebehu vykonávania bude množina $K'_?$ pozostávať z tých stavov konštruovaného automatu, ktoré už boli pridané do množiny K', ale ešte pre ne nie sú definované výstupy prechodovej funkcie δ'.

1. Inicializuj $K' := \{\{q_0\}\}$ a $K'_? := \{\{q_0\}\}$.
2. Vyber ľubovoľné $Q \in K'_?$ a polož $K'_? := K'_? - \{Q\}$.
3. Opakuj pre všetky $c \in \Sigma$:
   3.1. Nech $P := \{p \in K \mid \exists q \in Q : p \in \delta(q, c)\}$.
   3.2. Ak $P \notin K'$, polož $K' := K' \cup \{P\}$ a $K'_? := K' \cup \{P\}$.
   3.3. Polož $\delta'(Q, c) := P$.
4. Ak $K'_? \neq \emptyset$, pokračuj krokom 2; inak pokračuj krokom 5.
5. Polož $q_0' := \{q_0\}$ a $F' := \{Q \in K' \mid Q \cap F \neq \emptyset\}$.

[1] O algoritmus by išlo až po upresnení spôsobu vyberania stavov z množiny $K'_?$.

1.3 Riešená úloha

Úloha 1. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ so $\Sigma = \{a, b\}$ je nedeterministický konečný automat na obrázku 1.



Obr. 1: Prechodový diagram nedeterministického konečného automatu A.

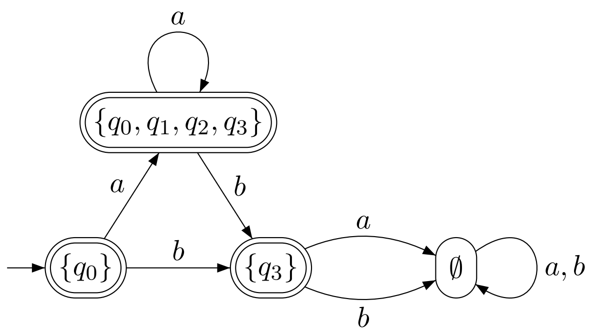
Štandardnou konštrukciou zostrojte ekvivalentný *deterministický* konečný automat.

Riešenie. Automat A neobsahuje žiadne prechody na ε. Môžeme naň teda aplikovať podmnožinovú konštrukciu vo variante z pododdielu 1.2 a stavy ekvivalentného automatu A' vytvárať spoločne s jeho prechodmi napríklad nasledovne.

Stav $Q \in K'$	$\delta'(Q, a)$	$\delta'(Q, b)$
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$
$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Počiatočným stavom automatu A' bude množina $\{q_0\}$ a koncovými stavmi budú $\{q_0\}$, $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ a $\{q_3\}$ – všetky tieto množiny totiž obsahujú aspoň jeden koncový stav automatu A.

Zisťujeme teda, že deterministický konečný automat $A' = (K', \Sigma, \delta', q_0', F')$ ekvivalentný automatu A je daný diagramom na obrázku 2.



Obr. 2: Prechodový diagram deterministického konečného automatu A' ekvivalentného automatu A.

To znamená, že $K' = \{\{q_0\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{q_3\}, \emptyset\}$,

$$
\begin{aligned}
\delta'(\{q_0\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, & \delta'(\{q_0\}, b) &= \{q_3\}, \\
\delta'(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, & \delta'(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, b) &= \{q_3\}, \\
\delta'(\{q_3\}, a) &= \emptyset, & \delta'(\{q_3\}, b) &= \emptyset, \\
\delta'(\emptyset, a) &= \emptyset, & \delta'(\emptyset, b) &= \emptyset,
\end{aligned}
$$

$q_0' = \{q_0\}$ a $F' = \{\{q_0\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{q_3\}\}$. □

2 Konštrukcia regulárnej gramatiky ku konečnému automatu

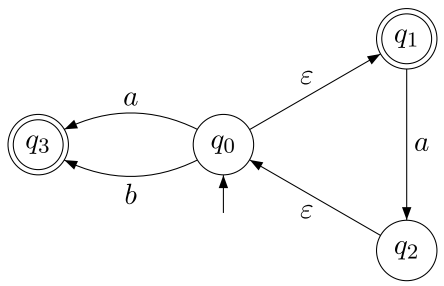
Na prednáške bola dokázaná ekvivalencia (deterministických alebo nedeterministických) konečných automatov a regulárnych gramatík.

Zamerajme sa teraz na konštrukciu regulárnej gramatiky $G = (N, T, P, \sigma)$ ekvivalentnej danému nedeterministickému konečnému automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, ktorú možno zhrnúť nasledovne.

1. Abeceda neterminálov gramatiky G je množina stavov automatu A, t. j. $N = K$.
2. Abeceda terminálov gramatiky G je identická so vstupnou abecedou automatu A, t. j. $T = \Sigma$.
3. Množina prepisovacích pravidiel P gramatiky G je daná takto:
   - (i) Pre každé $p, q \in K$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $q \in \delta(p, z)$, je v množine P pravidlo $p \to zq$.
   - (ii) Pre každé $q \in F$ je v množine prepisovacích pravidiel P pravidlo $q \to \varepsilon$.
   - (iii) Množina P neobsahuje žiadne iné prepisovacie pravidlá.
4. Počiatočný neterminál gramatiky G je počiatočný stav automatu A, t. j. $\sigma = q_0$.

2.1 Riešená úloha

Úloha 2. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ so $\Sigma = \{a, b\}$ je nedeterministický konečný automat na obrázku 3.



Obr. 3: Prechodový diagram nedeterministického konečného automatu A.

Štandardnou konštrukciou zostrojte regulárnu gramatiku G ekvivalentnú automatu A.

Riešenie. Položme $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $T = \{a, b\}$, $\sigma = q_0$ a

$$
\begin{aligned}
P = \{q_0 &\to q_1 \mid aq_3 \mid bq_3 \\
q_1 &\to aq_2 \mid \varepsilon \\
q_2 &\to q_0 \\
q_3 &\to \varepsilon\}.
\end{aligned}
$$

□

3 Konštrukcia konečného automatu k regulárnej gramatike

Pripomeňme si ešte opačný problém konštrukcie nedeterministického konečného automatu ekvivalentného danej regulárnej gramatike. Konštrukciu automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ku gramatike $G = (N, T, P, \sigma)$ možno zhrnúť nasledovne.

1. Zostroj regulárnu gramatiku $G' = (N', T, P', \sigma)$ takú, že $P' \subseteq N' \times (TN' \cup N' \cup T \cup \{\varepsilon\})$ a $L(G') = L(G)$. Pre každé pravidlo $\pi = (\alpha \to a_1 \dots a_k s) \in P$, kde $k \geq 2$, $a_1, \dots, a_k \in T$ a $s \in N \cup \{\varepsilon\}$ teda:
   1.1. Zaveď nové neterminály $\psi_{\pi,1}, \dots, \psi_{\pi,k-1}$.
   1.2. Odober pôvodné pravidlo $\alpha \to a_1 \dots a_k s$.
   1.3. Pridaj nové pravidlá $\alpha \to a_1\psi_{\pi,1}, \psi_{\pi,1} \to a_2\psi_{\pi,2}, \dots, \psi_{\pi,k-1} \to a_k s$.
2. Polož $K = N' \cup \{q_{\text{fin}}\}$, kde $q_{\text{fin}} \notin N'$.
3. Polož $\Sigma = T$.
4. Prechodovú funkciu δ automatu A definuj pre každé $\xi \in N'$ a $z \in T \cup \{\varepsilon\}$ nasledovne:
   (i) Ak pre $\eta \in N'$ je $\xi \to z\eta \in P'$, tak $\eta \in \delta(\xi, z)$.
   (ii) Ak $\xi \to z \in P'$, tak $q_{\text{fin}} \in \delta(\xi, z)$.
   (iii) Množina $\delta(\xi, z)$ neobsahuje žiadne iné stavy.

   Navyše $\delta(q_{\text{fin}}, z) = \emptyset$ pre všetky $z \in T \cup \{\varepsilon\}$.
5. Polož $q_0 = \sigma$.
6. Polož $F = \{q_{\text{fin}}\}$.

3.1 Riešená úloha

Úloha 3. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je regulárna gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$
\begin{aligned}
P = \{\sigma &\to aba\sigma \mid b\alpha \mid \beta \mid b \\
\alpha &\to a\alpha \mid \varepsilon \\
\beta &\to \beta \mid aa\}.
\end{aligned}
$$

Štandardnou konštrukciou zostrojte ekvivalentný nedeterministický konečný automat.

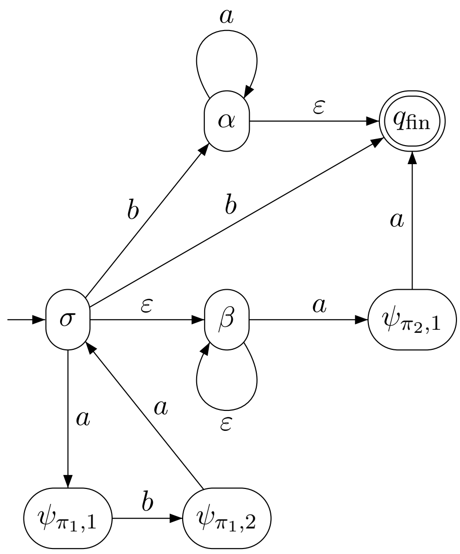
Riešenie. Zaveďme nasledujúce označenia pravidiel gramatiky G:

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &:= (\sigma \to aba\sigma), \\
\pi_2 &:= (\beta \to aa).
\end{aligned}
$$

Ekvivalentnú regulárnu gramatiku $G' = (N', T, P', \sigma)$ takú, že $P' \subseteq N' \times (TN' \cup N' \cup T \cup \{\varepsilon\})$, zostrojíme nasledovne: $N' = \{\sigma, \alpha, \beta, \psi_{\pi_1,1}, \psi_{\pi_1,2}, \psi_{\pi_2,1}\}$ a

$$
\begin{aligned}
P' = \{\sigma &\to a\psi_{\pi_1,1} \mid b\alpha \mid \beta \mid b \\
\alpha &\to a\alpha \mid \varepsilon \\
\beta &\to \beta \mid a\psi_{\pi_2,1} \\
\psi_{\pi_1,1} &\to b\psi_{\pi_1,2} \\
\psi_{\pi_1,2} &\to a\sigma \\
\psi_{\pi_2,1} &\to a\}.
\end{aligned}
$$

Výsledný nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je potom daný ako na obrázku 4.



Obr. 4: Nedeterministický konečný automat A ekvivalentný gramatike G.

To znamená, že $K = \{\sigma, \alpha, \beta, \psi_{\pi_1,1}, \psi_{\pi_1,2}, \psi_{\pi_2,1}, q_{\text{fin}}\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,

$$\begin{array}{lll}
\delta(\sigma, a) = \{\psi_{\pi_1,1}\}, & \delta(\sigma, b) = \{\alpha, q_{\text{fin}}\}, & \delta(\sigma, \varepsilon) = \{\beta\}, \\
\delta(\alpha, a) = \{\alpha\}, & \delta(\alpha, b) = \emptyset, & \delta(\alpha, \varepsilon) = \{q_{\text{fin}}\}, \\
\delta(\beta, a) = \{\psi_{\pi_2,1}\}, & \delta(\beta, b) = \emptyset, & \delta(\beta, \varepsilon) = \{\beta\}, \\
\delta(\psi_{\pi_1,1}, a) = \emptyset, & \delta(\psi_{\pi_1,1}, b) = \{\psi_{\pi_1,2}\}, & \delta(\psi_{\pi_1,1}, \varepsilon) = \emptyset, \\
\delta(\psi_{\pi_1,2}, a) = \{\sigma\}, & \delta(\psi_{\pi_1,2}, b) = \emptyset, & \delta(\psi_{\pi_1,2}, \varepsilon) = \emptyset, \\
\delta(\psi_{\pi_2,1}, a) = \{q_{\text{fin}}\}, & \delta(\psi_{\pi_2,1}, b) = \emptyset, & \delta(\psi_{\pi_2,1}, \varepsilon) = \emptyset,
\end{array}$$

$q_0 = \sigma$ a $F = \{q_{\text{fin}}\}$. □