Riešenia prvej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

13. októbra 2022

Úloha 1. Nech L_1, L_2, L_3 sú jazyky. Porovnajte nasledujúce dvojice jazykov:

a) $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3$ a $L_1 \cdot L_3 \cup L_2 \cdot L_3$,

b) $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3$ a $L_1 \cdot L_3 \cap L_2 \cdot L_3$.

Riešenie.

a) Dokážeme, že $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = L_1 \cdot L_3 \cup L_2 \cdot L_3$.

$\subseteq$: Ak $w \in (L_1 \cup L_2) \cdot L_3$, je $w = uv$, kde $u \in L_1 \cup L_2$ a $v \in L_3$. Keďže $u \in L_1 \cup L_2$, nutne $u \in L_1$ alebo $u \in L_2$. Ak $u \in L_1$, je $w = uv \in L_1 \cdot L_3$; ak $u \in L_2$, je $w = uv \in L_2 \cdot L_3$. V oboch prípadoch $w \in L_1 \cdot L_3 \cup L_2 \cdot L_3$.

$\supseteq$: Ak $w \in L_1 \cdot L_3 \cup L_2 \cdot L_3$, je $w \in L_1 \cdot L_3$ alebo $w \in L_2 \cdot L_3$. Ak $w \in L_1 \cdot L_3$, je $w = uv$, kde $u \in L_1$ a $v \in L_3$; z $u \in L_1$ ďalej vyplýva $u \in L_1 \cup L_2$, takže $w \in (L_1 \cup L_2) \cdot L_3$. Podobne ak $w \in L_2 \cdot L_3$, je $w = uv$, kde $u \in L_2$ a $v \in L_3$; z $u \in L_2$ vyplýva $u \in L_1 \cup L_2$, takže aj v tomto prípade $w \in (L_1 \cup L_2) \cdot L_3$.

b) Dokážeme, že $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 \subseteq L_1 \cdot L_3 \cap L_2 \cdot L_3$, kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

$\subseteq$: Ak $w \in (L_1 \cap L_2) \cdot L_3$, je $w = uv$ pre nejaké $u \in L_1 \cap L_2$ a $v \in L_3$. Keďže $u \in L_1 \cap L_2$, je súčasne $u \in L_1$ aj $u \in L_2$. Preto $w = uv \in L_1 \cdot L_3$ a súčasne $w = uv \in L_2 \cdot L_3$, a teda $w \in L_1 \cdot L_3 \cap L_2 \cdot L_3$.

$\not\supseteq$: Nech $L_1 = \{\varepsilon\}$, $L_2 = \{a\}$ a $L_3 = \{\varepsilon, a\}$. Potom $L_1 \cdot L_3 \cap L_2 \cdot L_3 = \{\varepsilon, a\} \cap \{a, aa\} = \{a\}$, ale $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = \emptyset \cdot \{\varepsilon, a\} = \emptyset$. □

Úloha 2. Pre ľubovoľnú abecedu Σ a jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ položme $\sqrt{L} = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L\}$.

Nech teraz Σ, Γ sú abecedy, $L \subseteq \Sigma^*$ jazyk a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ homomorfizmus. Porovnajte jazyky $h(\sqrt{L})$ a $\sqrt{h(L)}$.

Riešenie. Dokážeme, že $h(\sqrt{L}) \subseteq \sqrt{h(L)}$, kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

$\subseteq$: Ak $v \in h(\sqrt{L})$, musí existovať $u \in \sqrt{L}$ také, že $v = h(u)$. Keďže $u \in \sqrt{L}$, je $uu \in L$, a teda $vv = h(u)h(u) = h(uu) \in h(L)$, z čoho $v \in \sqrt{h(L)}$.

$\not\supseteq$: Nech $\Sigma = \Gamma = \{a\}$, $h\colon a^* \to a^*$ je taký, že $h(a) = aa$ a $L = \{a\}$. Potom $\sqrt{h(L)} = \sqrt{\{aa\}} = \{a\}$, ale $h(\sqrt{L}) = h(\emptyset) = \emptyset$. □