Riešenia druhej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

27. októbra 2022

Úloha 1. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk

$$L = \{ucv \mid u, v \in \{a,b\}^*;\ \#_a(u) = \#_a(v)\}$$

(nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$). Správnosť svojej konštrukcie dokážte matematickou indukciou.

Riešenie. Dokážeme, že $L = L(G)$ pre gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{\sigma\}$, $T = \{a, b, c\}$ a

$$P = \{\sigma \to a\sigma a \mid b\sigma \mid \sigma b \mid c\}.$$

Ukážeme, že slovo $x \in (N \cup T)^*$ je vetnou formou gramatiky G práve vtedy, keď patrí do jazyka

$$F = \{usv \mid s \in \{\sigma, c\};\ u, v \in \{a,b\}^*;\ \#_a(u) = \#_a(v)\}.$$

Keďže evidentne $F \cap T^* = L$, vyplynie z tohto pozorovania aj rovnosť $L(G) = L$.

$\subseteq$: Nech $x \in (N \cup T)^*$ je také, že pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ je $\sigma \Rightarrow^n x$. Indukciou vzhľadom na n dokážeme, že $x \in F$.

Pre $n = 0$ je $\sigma \Rightarrow^0 x$, a teda $x = \sigma \in F$. Predpokladajme teda, že tvrdenie platí pre $n = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme $n = k+1$. Ak $\sigma \Rightarrow^{k+1} x$, tak pre nejaké $y \in (N \cup T)^*$ je $\sigma \Rightarrow^k y \Rightarrow x$. Z indukčného predpokladu potom $y \in F$ – a keďže $y \Rightarrow x$, musí slovo y obsahovať aspoň jeden neterminál. To znamená, že $y = u\sigma v$ pre nejaké $u, v \in \{a,b\}^*$ také, že $\#_a(u) = \#_a(v)$. Slovo x vznikne zo slova y použitím niektorého prepisovacieho pravidla na jediný výskyt neterminálu σ. Ak ide o pravidlo $\sigma \to a\sigma a$, je $x = ua\sigma av$, pričom $\#_a(ua) = \#_a(u) + 1 = \#_a(v) + 1 = \#_a(av)$ – čiže $x \in F$. Ak ide o pravidlo $\sigma \to b\sigma$ resp. o pravidlo $\sigma \to \sigma b$, je $x = ub\sigma v$ resp. $x = u\sigma bv$, pričom $\#_a(ub) = \#_a(u) = \#_a(v)$, ako aj $\#_a(u) = \#_a(v) = \#_a(bv)$; v oboch prípadoch teda $x \in F$. Ak napokon ide o pravidlo $\sigma \to c$, je $x = ucv$, pričom $\#_a(u) = \#_a(v)$; opäť teda $x \in F$.

$\supseteq$: Dokážme najprv, že pre všetky $x, y \in \{a,b\}^*$ a $i, j \in \mathbb{N}$ je

$$x\sigma y \Rightarrow^* xb^i\sigma b^j y. \tag{1}$$

Indukciou na $i+j$. Pre $i+j = 0$ je $i = j = 0$, pričom $x\sigma y \Rightarrow^0 x\sigma y = xb^0\sigma b^0 y$. Predpokladajme teda, že tvrdenie platí pre $i + j = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme $i, j \in \mathbb{N}$ také, že $i + j = k + 1$. V takom prípade nutne $i > 0$ alebo $j > 0$. Ak $i > 0$, z indukčného predpokladu dostávame $x\sigma y \Rightarrow^* xb^{i-1}\sigma b^j y \Rightarrow xb^i\sigma b^j y$, kde v poslednom kroku odvodenia sme použili pravidlo $\sigma \to b\sigma$. Ak $j > 0$, je z indukčného predpokladu $x\sigma y \Rightarrow^* xb^i\sigma b^{j-1} y \Rightarrow xb^i\sigma b^j y$, kde v poslednom kroku odvodenia sme použili pravidlo $\sigma \to \sigma b$.

Môžeme teraz dokázať, že pre všetky $u, v \in \{a,b\}^*$ také, že $\#_a(u) = \#_a(v)$ je $\sigma \Rightarrow^* u\sigma v$. Indukciou vzhľadom na $\#_a(u) = \#_a(v)$. Ak $\#_a(u) = \#_a(v) = 0$, existujú $i, j \in \mathbb{N}$ také, že $u = b^i$ a $v = b^j$; vďaka (1) je potom $\sigma \Rightarrow^* b^i\sigma b^j = u\sigma v$. Predpokladajme platnosť tvrdenia pre $\#_a(u) = \#_a(v) = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme slová $u, v \in \{a,b\}^*$ také, že $\#_a(u) = \#_a(v) = k+1$. Potom $u = xab^i$ a $v = b^j ay$ pre nejaké $i, j \in \mathbb{N}$ a slová $x, y \in \{a,b\}^*$ také, že $\#_a(x) = \#_a(y) = k$. Z indukčného predpokladu teda $\sigma \Rightarrow^* x\sigma y \Rightarrow xa\sigma ay$, kde v poslednom kroku odvodenia sme použili pravidlo $\sigma \to a\sigma a$. Vďaka (1) ďalej $xa\sigma ay \Rightarrow^* xab^i\sigma b^j ay = u\sigma v$ a spojením oboch odvodení dostávame $\sigma \Rightarrow^* u\sigma v$.

Zostáva napokon dokázať, že pre všetky $u, v \in \{a,b\}^*$ také, že $\#_a(u) = \#_a(v)$ je aj $\sigma \Rightarrow^* ucv$. Z dokázaného ale pre každé takéto u, v dostávame $\sigma \Rightarrow^* u\sigma v \Rightarrow ucv$, kde v poslednom kroku odvodenia sme použili pravidlo $\sigma \to c$. $\square$

Úloha 2. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika v „bezepsilonovom" normálnom tvare. Poriadne (matematickou indukciou) dokážte, že pre všetky $x, y \in (N \cup T)^*$ také, že $x \Rightarrow_G^* y$ musí platiť $|x| \leq |y|$.

Riešenie. „Bezepsilonovosť" gramatiky G znamená, že pre všetky $\xi \to u \in P$ je $|u| \geq 1$.

Nech $x, y \in (N \cup T)^*$ sú dané. Zrejme stačí pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dokázať, že $|x| \leq |y|$ kedykoľvek $x \Rightarrow^n y$. Indukciou vzhľadom na n.

Pre $n = 0$ je nutne $y = x$, a teda $|x| \leq |y|$. Predpokladajme teda platnosť tvrdenia pre $n = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme $n = k + 1$. Ak $x \Rightarrow^{k+1} y$, existuje $z \in (N \cup T)^*$ také, že $x \Rightarrow^k z \Rightarrow y$. Vďaka indukčnému predpokladu je $|z| \geq |x|$. Keďže $z \Rightarrow y$, existujú slová $z_1, z_2, u \in (N \cup T)^*$ a neterminál $\xi \in N$ také, že $z = z_1 \xi z_2$, $y = z_1 u z_2$ a $\xi \to u \in P$. Z „bezepsilonovosti" gramatiky G potom

$$|y| = |z_1| + |u| + |z_2| \geq |z_1| + 1 + |z_2| = |z_1| + |\xi| + |z_2| = |z| \geq |x|,$$

čo bolo treba dokázať. $\square$