Riešenia druhej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

14. apríla 2025

Úloha 1. Zistite, či sú nasledujúce problémy rozhodnuteľné:

a) Pre deterministický konečný automat A rozhodnúť, či je jazyk $L(A)$ bezprefixový.

b) Pre lineárnu gramatiku G s abecedou terminálov Σ rozhodnúť, či $L(G) = \Sigma^*$.

c) Pre lineárnu gramatiku G rozhodnúť, či $L(G)$ obsahuje aspoň jeden palindróm.

d) Pre dvojicu bezkontextových gramatík G_1, G_2 rozhodnúť, či $L(G_2)$ obsahuje aspoň jeden palindróm, ktorý nie je v jazyku $L(G_1)$.

e) Pre bezkontextovú gramatiku G rozhodnúť, či je jazyk $\sqrt{L(G)}$ bezkontextový.

f) Pre zásobníkový automat A rozhodnúť, či $L(A) \in \mathscr{L}_{detCF}$.

g) Pre deterministický zásobníkový automat A nad abecedou Σ a homomorfizmus $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ daný obrazmi písmen rozhodnúť, či $h(L(A)) \in \mathscr{L}_{detCF}$.

h) Pre deterministický konečný automat A a lineárne ohraničený automat B rozhodnúť, či

$$L(A)/L(B) \in \mathscr{R}.$$

i) Pre lineárne ohraničený automat A a deterministický konečný automat B rozhodnúť, či

$$L(A)/L(B) \in \mathscr{L}_{ECS}.$$

Svoje tvrdenia dokážte.

Riešenie.

a) *Problém je rozhodnuteľný.* Jazyk $L(A)$ akceptovaný deterministickým konečným automatom $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *nie je* bezprefixový práve vtedy, keď existujú slová $u \in \Sigma^*$, $v \in \Sigma^+$ a stavy $p, q \in F$ také, že $(q_0, uv) \vdash_A^* (p, v) \vdash^* (q, \varepsilon)$. To zjavne nastane práve vtedy, keď existujú stavy $p, q \in F$ spĺňajúce nasledujúce podmienky:

   (i) Stav p je dosiahnuteľný – existuje teda $u \in \Sigma^*$ také, že $(q_0, u) \vdash^* (p, \varepsilon)$.

   (ii) Existuje slovo $v \in \Sigma^+$ také, že $(p, v) \vdash^* (q, \varepsilon)$.

   Podmienka (i) je splnená práve vtedy, keď je neprázdny jazyk $L(A_{q_0,p})$ akceptovaný deterministickým konečným automatom $A_{q_0,p} = (K, \Sigma, \delta, q_0, \{p\})$; podmienka (ii) je splnená práve vtedy, keď je pre automat $A_{p,q} = (K, \Sigma, \delta, p, \{q\})$ neprázdny jazyk $L(A_{p,q}) \cap \Sigma^+$. Neprázdnosť týchto jazykov možno rozhodnúť algoritmicky; na rozhodnutie bezprefixovosti jazyka $L(A)$ tak stačí urobiť pre všetky dvojice stavov $p, q \in F$.

b) *Problém je nerozhodnuteľný.* Pre ľubovoľný prípad (Δ, f, g) Postovho korešpondenčného problému a k nemu prislúchajúce jazyky L_X, L_Y možno evidentne algoritmicky skonštruovať lineárnu gramatiku generujúcu jazyk $L_X^C \cup L_Y^C$. Univerzálnosť jazyka $L_X^C \cup L_Y^C$ je pritom ekvivalentná prázdnosti prieniku $L_X \cap L_Y$, a teda aj existencii riešenia prípadu (Δ, f, g).

c) *Problém je nerozhodnuteľný.* Nech (Δ, f, g) je prípad PKP nad abecedou Σ takou, že $\# \notin \Sigma$. Lineárna gramatika $G = (\{\sigma\}, \Sigma \cup \{\#\}, P, \sigma)$ s

$$P = \{\sigma \to f(d)\sigma g(d)^R \mid d \in \Delta\} \cup \{\sigma \to f(d)\#g(d)^R \mid d \in \Delta\}$$

   potom evidentne generuje jazyk $L(G) = \{f(x)\#g(x)^R \mid x \in \Delta^+\}$. Tento jazyk obsahuje palindróm práve vtedy, keď existuje $x \in \Delta^+$ také, že $f(x) = g(x)$ – čiže práve vtedy, keď existuje riešenie prípadu (Δ, f, g).

d) *Problém je nerozhodnuteľný.* Možno naň napríklad redukovať problém z predchádzajúcej podúlohy: stačí za G_2 vziať lineárnu gramatiku G a za G_1 ľubovoľnú pevne danú bezkontextovú gramatiku takú, že $L(G_1) = \emptyset$.

e) *Problém je nerozhodnuteľný.* Nech (Δ, f, g) je prípad PKP nad nejakou abecedou Σ takou, že $\#, a, b, c \notin \Sigma$; uvažujme ďalej bezkontextové jazyky L_X a L_Y prislúchajúce k prípadu (Δ, f, g). Ľahko potom algoritmicky skonštruujeme bezkontextovú gramatiku G generujúcu jazyk

$$L(G) = \{ua^ib^ic^jva^jb^kc^k \mid u \in L_X;\ v \in L_Y;\ i, j, k \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$$

Je zrejmé, že

$$\sqrt{L(G)} = \{wa^nb^nc^n \mid w \in L_X \cap L_Y;\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$$

V prípade, že neexistuje žiadne riešenie prípadu (Δ, f, g), je jazyk $\sqrt{L(G)}$ očividne prázdny, a teda bezkontextový. Ak naopak existuje aspoň jedno riešenie $x \in \Delta^+$ tohto prípadu, jazyk $\sqrt{L(G)}$ nemôže byť bezkontextový, pretože jedným z jeho homomorfných obrazov je jazyk $\{a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$. Bezkontextovosť jazyka $\sqrt{L(G)}$ je teda ekvivalentná neexistencii riešenia prípadu (Δ, f, g).

f) *Problém je nerozhodnuteľný.* Nech (Δ, f, g) je prípad PKP nad abecedou Σ takou, že $\# \notin \Sigma$; uvažujme jazyk L_{XY} prislúchajúci k prípadu (Δ, f, g), ako aj jazyk

$$L_{sym} = \{u\#x\#x^R\#u^R \mid u \in \Sigma^+;\ x \in \Delta^+\}.$$

Ľahko algoritmicky skonštruujeme bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk $L_{XY}^C \cup L_{sym}^C$ – a tým pádom aj zásobníkový automat, ktorý tento jazyk akceptuje. V prípade, že neexistuje riešenie prípadu (Δ, f, g), je $L_{XY}^C \cup L_{sym}^C = (\Sigma \cup \Delta \cup \{\#\})^* \in \mathscr{L}_{detCF}$. Ak naopak riešenie prípadu (Δ, f, g) existuje, nutne $L_{XY}^C \cup L_{sym}^C \notin \mathscr{L}_{detCF}$, pretože v opačnom prípade by musel byť deterministický bezkontextový aj jazyk $(L_{XY}^C \cup L_{sym}^C)^C = L_{XY} \cap L_{sym}$; o tomto jazyku je ale známe, že v prípade existencie riešenia prípadu (Δ, f, g) nie je ani len bezkontextový. Neexistencia riešenia prípadu (Δ, f, g) je teda ekvivalentná deterministickej bezkontextovosti jazyka $L_{XY}^C \cup L_{sym}^C$.

g) *Problém je nerozhodnuteľný.* V opačnom prípade by bolo možné pre dvojicu deterministických zásobníkových automatov A_1, A_2 rozhodnúť príslušnosť zjednotenia $L(A_1) \cup L(A_2)$ do $\mathscr{L}_{detCF}$. Ak totiž $L(A_1), L(A_2) \subseteq \Sigma^*$ a $a \notin \Sigma$, môžeme skonštruovať deterministický zásobníkový automat A akceptujúci označené zjednotenie $aL(A_1) \cup L(A_2)$. Potom $L(A_1) \cup L(A_2) = h(L(A))$ pre homomorfizmus h vymazávajúci symbol a a zobrazujúci ostatné symboly na seba samé.

Príslušnosť zjednotenia dvoch deterministických bezkontextových jazykov do $\mathscr{L}_{detCF}$ je nerozhodnuteľná, pretože v opačnom prípade by bola vďaka De Morganovým zákonom a efektívnej uzavretosti triedy $\mathscr{L}_{detCF}$ na komplement rozhodnuteľná aj príslušnosť prieniku dvoch deterministických bezkontextových jazykov do $\mathscr{L}_{detCF}$.

h) *Problém je triviálne rozhodnuteľný*, pretože jazyky uvedeného tvaru sú vždy regulárne. Pre každý deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je v skutočnosti dokonca $L(A)/L' \in \mathscr{R}$ pre *ľubovoľný* jazyk L': jazyk $L(A)/L'$ je akceptovaný deterministickým konečným automatom $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F')$, kde $F' = \{p \in K \mid \exists q \in F\ \exists w \in L' : (p, w) \vdash_A^* (q, \varepsilon)\}$.

i) *Problém je nerozhodnuteľný.* Nech $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ je deterministický Turingov stroj a $\bullet, \# \notin \Gamma$. Na základe kódu tohto stroja možno algoritmicky skonštruovať kód lineárne ohraničeného automatu A akceptujúceho nejaký jazyk

$$L(A) = \{w \bullet \#^k \mid w \in L(M);\ k \in \mathbb{N};\ k \geq n_w\},$$

kde pre každé $w \in L(M)$ je $n_w \in \mathbb{N}$ konštanta prislúchajúca k slovu w. Ľahko ďalej zostrojíme deterministický konečný automat B taký, že $L(B) = \bullet\#^*$. Evidentne $L(A)/L(B) = L(M)$. Keby sme teda vedeli rozhodovať problém zo zadania, vedeli by sme rozhodovať aj príslušnosť rekurzívne vyčísliteľných jazykov do $\mathscr{L}_{ECS}$; tento problém je ale nerozhodnuteľný (napríklad vďaka prvej Riceovej vete). $\square$