Riešenia štvrtej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

24. novembra 2022

Úloha 1. Nech Σ je abeceda a $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk. *Prefixovou redukciou* jazyka L nazveme jazyk $\mathrm{pref}^{\downarrow}(L)$ obsahujúci práve všetky slová w z jazyka L také, že aj všetky prefixy slova w patria do L – čiže

$$\mathrm{pref}^{\downarrow}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \forall u \in \Sigma^* : (\exists v \in \Sigma^* : w = uv) \Rightarrow u \in L\}.$$

Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na prefixovú redukciu. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že trieda $\mathscr{R}$ *je uzavretá* na prefixovú redukciu. Nech $L \in \mathscr{R}$. Ak $\varepsilon \notin L$, evidentne $\mathrm{pref}^{\downarrow}(L) = \emptyset \in \mathscr{R}$. V opačnom prípade uvažujme deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že $L(A) = L$ – keďže $\varepsilon \in L$, nutne $q_0 \in F$. Automat A je deterministický a slovo $w \in \Sigma^*$ tak patrí do $\mathrm{pref}^{\downarrow}(L)$ práve vtedy, keď (jediný) výpočet automatu A na slove w prechádza iba cez stavy množiny F.[1]

Nech teda $A' = (F, \Sigma, \delta', q_0, F)$ je *nedeterministický* konečný automat taký, že pre všetky $q \in F$ a $c \in \Sigma$ je $\delta'(q, c) = \{\delta(q, c)\} \cap F$ a $\delta'(q, \varepsilon) = \emptyset$. Diagram takéhoto automatu teda získame z diagramu automatu A zmazaním všetkých neakceptačných stavov a s nimi incidentných prechodov.

Indukciou by sme ľahko dokázali, že pre všetky $q \in F$ a $w \in \Sigma^*$ je $(q_0, w) \vdash_{A'}^* (q, \varepsilon)$ práve vtedy, keď $(q_0, w) \vdash_A^* (q, \varepsilon)$ a pre všetky prefixy u slova w existuje stav $p_u \in F$ taký, že $(q_0, u) \vdash_A^* (p_u, \varepsilon)$. Automat A' teda akceptuje práve všetky slová w z jazyka L také, že aj všetky prefixy u slova w patria do L – čiže $L(A') = \mathrm{pref}^{\downarrow}(L)$. $\square$

Úloha 2. Nech Σ je k-prvková abeceda a $w \in \Sigma^*$ slovo. Definujme $\mathrm{sort}(w)$ ako *jazyk* všetkých možných „utriedení“ slova w vzhľadom na úplné usporiadania na abecede Σ:

$$\mathrm{sort}(w) = \{a_1^{\#_{a_1}(w)} a_2^{\#_{a_2}(w)} \ldots a_k^{\#_{a_k}(w)} \mid a_1, \ldots, a_k \in \Sigma;\ \forall i, j \in [k] : i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j\}.$$

Napríklad teda

$$\mathrm{sort}(abbac) = \{aabbc, aacbb, bbaac, bbcaa, caabb, cbbaa\}.$$

Pre jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ ďalej položme

$$\mathrm{sort}(L) = \bigcup_{w \in L} \mathrm{sort}(w).$$

Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na operáciu sort. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že trieda $\mathscr{R}$ na túto operáciu *nie je uzavretá.* Uvažujme regulárny jazyk

$$(ab)^* = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ evidentne $\mathrm{sort}((ab)^n) = \{a^n b^n, b^n a^n\}$, z čoho

$$\mathrm{sort}((ab)^*) = \bigcup_{w \in (ab)^*} \mathrm{sort}(w) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{sort}((ab)^n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a^n b^n, b^n a^n\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Tento jazyk nie je regulárny – v opačnom prípade by totiž vďaka uzavretosti triedy $\mathscr{R}$ na prienik musel byť regulárny aj jazyk

$$\mathrm{sort}((ab)^*) \cap a^* b^* = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\};$$

o tomto jazyku je ale z prednášky známe, že regulárny nie je. $\square$

[1] Keby totiž pre nejaké $u, v \in \Sigma^*$ bolo $w = uv$ a súčasne $(q_0, uv) \vdash^* (p, v) \vdash^* (q, \varepsilon)$ pre $p \in K - F$, dostali by sme $u \notin L$, a teda $w = uv \notin \mathrm{pref}^{\downarrow}(L)$. Ak naopak pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ s $w = uv$ je $(q_0, uv) \vdash^* (p, v) \vdash^* (q, \varepsilon)$ pre nejaký akceptačný stav p, patria všetky prefixy u slova w do jazyka L, a teda $w \in \mathrm{pref}^{\downarrow}(L)$.