Riešenia piatej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

8. decembra 2022

Nech Σ je abeceda. Nech $w = a_1 a_2 \ldots a_n$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma$. *Roztrúseným podslovom* slova w nazveme ľubovoľné slovo $x = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ sú indexy také, že $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. Ak teda slová chápeme ako konečné postupnosti znakov, zodpovedajú roztrúsené podslová bežne chápaným podpostupnostiam.

Napríklad slovo $w = abab$ tak má práve nasledujúce roztrúsené podslová:

$$\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aab, aba, abb, bab, abab.$$

Pre dvojicu slov $x, w \in \Sigma^*$ budeme písať $x \sqsubseteq w$, ak x je roztrúseným podslovom slova w. Pre jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ navyše položme

$$L^{\downarrow} = \{x \in \Sigma^* \mid \exists w \in L : x \sqsubseteq w\}.$$

Ide teda o jazyk všetkých slov nad abecedou Σ, ktoré sú roztrúseným podslovom aspoň jedného slova z jazyka L.

Úloha 1. Zistite, či je trieda $\mathscr{L}_{CF}$ uzavretá na operáciu $\downarrow$. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že trieda $\mathscr{L}_{CF}$ *je uzavretá* na túto operáciu. Nech $L \in \mathscr{L}_{CF}$ a $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika *v Chomského normálnom tvare* taká, že $L(G) = L$. Zostrojíme bezkontextovú gramatiku G' takú, že $L(G') = L^{\downarrow}$.

Gramatika G' bude mať okrem všetkých pravidiel gramatiky G k dispozícii aj pravidlá, ktoré jej umožnia „nevygenerovať niektoré symboly výsledného slova“ – pre každé pravidlo $\xi \to c \in P$, kde $\xi \in N$ a $c \in T$, tak bude obsahovať aj pravidlo $\xi \to \varepsilon$. Ku každému odvodeniu slova $x \in T^*$ v gramatike G' potom ľahko nájdeme odvodenie nejakého slova $w \in L$ v gramatike G, v ktorom sa namiesto každého *novopridaného* pravidla typu $\xi \to \varepsilon$ použije pravidlo $\xi \to c$ pre nejaké $c \in T$; ľahko pritom vidieť, že slovo x musí byť roztrúseným podslovom slova w. Ak naopak $w \in L$, môžeme každé jeho roztrúsené podslovo x gramatikou G' vygenerovať tak, že v ľubovoľnom odvodení slova w v G nahradíme niektoré použitia pravidiel $\xi \to c$ pre $\xi \in N$ a $c \in T$ použitím pravidla $\xi \to \varepsilon$.

Formálne teda $G' = (N, T, P', \sigma)$, kde $P' = P \cup \{\xi \to \varepsilon \mid \xi \in N;\ \exists c \in T : \xi \to c \in P\}$. □

Úloha 2. Zistite, či je trieda $\mathscr{L}_{RE}$ uzavretá na operáciu $\downarrow$. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Trieda $\mathscr{L}_{RE}$ *je uzavretá* na operáciu $\downarrow$. Nech $L \in \mathscr{L}_{RE}$ a A je deterministický Turingov stroj taký, že $L(A) = L$. *Nedeterministický* Turingov stroj A' akceptujúci jazyk $L^{\downarrow}$ môže pracovať tak, že pre každé vstupné slovo $x = a_1 \ldots a_n$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$, „nedeterministicky uhádne“ slová $u_0, \ldots, u_n \in \Sigma^*$, obsah pásky prerobí na $w = u_0 a_1 u_1 a_2 u_2 \ldots u_{n-1} a_n u_n$ (až na prípadné „falošné blanky“ okolo tohto slova) a následne odsimuluje výpočet stroja A na slove w. Je zrejmé, že takýto Turingov stroj akceptuje slovo x práve vtedy, keď *existujú nejaké* slová $u_0, \ldots, u_n \in \Sigma^*$, pre ktoré je $u_0 a_1 u_1 a_2 u_2 \ldots u_{n-1} a_n u_n \in L$. To je zjavne ekvivalentné podmienke $x \in L^{\downarrow}$. □