Greibachovej normálny tvar

Peter Kostolányi

4. marca 2025

Ku každej bezkontextovej gramatike existuje až na ε ekvivalentná bezkontextová gramatika, v ktorej sa všetky pravé strany pravidiel začínajú terminálom – o takýchto gramatikách budeme hovoriť, že sú v *Greibachovej normálnom tvare*. V každom kroku odvodenia gramatiky v Greibachovej normálnom tvare sa tak vygeneruje aspoň jeden terminálny symbol výsledného slova. Keďže sa navyše terminály generujú zľava, možno Greibachovej normálny tvar použiť na dôkaz, že ku každému zásobníkovému automatu akceptujúcemu prázdnym zásobníkom resp. stavom existuje až na ε resp. plne ekvivalentný automat rovnakého druhu neobsahujúci prechody na prázdne slovo ε.

So štandardným algoritmom na prevod bezkontextovej gramatiky do Greibachovej normálneho tvaru je spojená požiadavka eliminácie *reťazových pravidiel* typu $\xi \to \eta$, kde ξ, η sú neterminály. Najprv sa preto zameriame na štandardnú konštrukciu, pomocou ktorej možno všetky takéto pravidlá z bezkontextovej gramatiky bez väčšej ujmy odstrániť.

1 Odstránenie reťazových pravidiel

Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. *Reťazovým pravidlom* (angl. „*chain rule*“) gramatiky G rozumieme ľubovoľné pravidlo $\xi \to \eta \in P$ s práve jedným neterminálom na jeho pravej strane; ide teda o ľubovoľné pravidlo z $P \cap (N \times N)$.

Ukážeme, že reťazových pravidiel sa dá „zbaviť“ – každú bezkontextovú gramatiku G možno previesť do normálneho tvaru bez reťazových pravidiel. Budeme sa pritom snažiť prísť s konštrukciou, ktorá zachováva „bezepsilonovosť“ pôvodnej gramatiky; bez tejto požiadavky by išlo o triviálnu záležitosť.

Veta 1. *Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Potom existuje bezkontextová gramatika $G' = (N, T, P', \sigma)$ taká, že $L(G') = L(G)$ a $P' \cap (N \times N) = \emptyset$.*

Vstupom nasledujúceho algoritmu na odstránenie reťazových pravidiel je ľubovoľná bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$. Výstupom je ekvivalentná gramatika $G' = (N, T, P', \sigma)$ bez reťazových pravidiel, ktorá sa od gramatiky G líši iba v množine prepisovacích pravidiel P'. Každá pravá strana pravidla z P' ale bude aj pravou stranou pravidla z P, čo okrem iného zaručí splnenie spomínanej požiadavky na zachovanie „bezepsilonovosti“ gramatiky.

1. Inicializuj $P' := \emptyset$.
2. Zostroj orientovaný graf D s množinou vrcholov N, v ktorom z vrcholu ξ do vrcholu η vedie hrana práve vtedy, keď $\xi \to \eta \in P$.
3. Opakuj pre každý neterminál $\xi \in N$:
   - 3.1. Nájdi množinu vrcholov $A(\xi)$ dosiahnuteľných v grafe D z vrcholu ξ.
   - 3.2. Pre každý neterminál $\eta \in A(\xi)$ a pre každé pravidlo $\eta \to x \in P$ také, že $x \notin N$ pridaj do P' pravidlo $\xi \to x$.

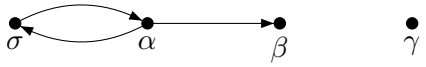
Pre každé $\xi \in N$ je $\xi \in A(\xi)$, preto množina pravidiel P' obsahuje okrem iného aj všetky pravidlá z P, ktoré nie sú reťazové. Ak gramatika G obsahuje pre nejaký neterminál ξ pravidlo $\xi \to \xi$, obsahuje graf D slučku vo vrchole ξ. Výsledná množina pravidiel P' je ale rovnaká ako v prípade, keď graf D takúto slučku neobsahuje – pravidlá $\xi \to \xi$ teda možno pri implementácii algoritmu ignorovať.

Príklad 1. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika, kde $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{&\sigma \to a\alpha \mid \alpha \mid aa \\ &\alpha \to \sigma \mid \beta \mid b \\ &\beta \to a\sigma \mid b\beta \mid \gamma a \\ &\gamma \to b\alpha \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Nájdime ekvivalentnú gramatiku $G' = (N, T, P', \sigma)$ bez reťazových pravidiel.

Graf D zodpovedajúci gramatike G je znázornený na obrázku 1. Zrejme je $A(\sigma) = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $A(\alpha) = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $A(\beta) = \{\beta\}$ a $A(\gamma) = \{\gamma\}$.



Obr. 1: Orientovaný graf D zodpovedajúci gramatike G.

Výsledná gramatika $G' = (N, T, P', \sigma)$ má preto množinu pravidiel P' danú ako

$$\begin{aligned} P' = \{&\sigma \to a\alpha \mid aa \mid b \mid a\sigma \mid b\beta \mid \gamma a \\ &\alpha \to a\alpha \mid aa \mid b \mid a\sigma \mid b\beta \mid \gamma a \\ &\beta \to a\sigma \mid b\beta \mid \gamma a \\ &\gamma \to b\alpha \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

2 Greibachovej normálny tvar bezkontextovej gramatiky

Definícia 1. Hovoríme, že bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ je v *Greibachovej normálnom tvare*, ak $P \subseteq N \times T(N \cup T)^*$.

Pomenovanie „normálny tvar“ je odôvodnené nasledujúcou vetou, ktorej detailný dôkaz možno nájsť v knihe Hopcrofta a Ullmana [1].

Veta 2. *Nech G je bezkontextová gramatika. Potom existuje bezkontextová gramatika G' v Greibachovej normálnom tvare taká, že $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$.*

Poznámka 1. Greibachovej normálny tvar sa často definuje prostredníctvom o niečo silnejšej požiadavky $P \subseteq N \times TN^*$. Každú gramatiku v tvare z definície 1 možno do tejto podoby previesť zavedením nového neterminálu ξ_c s pravidlom $\xi_c \to c$ pre všetky terminály c a nahradením iných ako začiatočných terminálov na pravých stranách pôvodných pravidiel neterminálom ξ_c.

Niekde tiež možno naraziť na definíciu, pri ktorej sa v Greibachovej normálnom tvare povoľuje pravidlo $\sigma \to \varepsilon$ za predpokladu, že sa σ nevyskytuje na pravej strane žiadneho pravidla; takéto gramatiky dokážu vygenerovať aj prázdne slovo.

3 Greibachovej normálny tvar: štandardná konštrukcia

Vstupom nasledujúceho algoritmu na prevod bezkontextovej gramatiky do Greibachovej normálneho tvaru je „bezepsilonová“ bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ *bez reťazových pravidiel.* Predpokladajme, že je dané očíslovanie neterminálov gramatiky G; čiže $N = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ pre nejaké $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

1. Opakuj pre $k = 1, \ldots, n$:

   1.1. Opakuj pre $j = 1, \ldots, k-1$:

      1.1.1. Opakuj pre všetky pravidlá $\xi_k \to \xi_j w$, kde w je slovo:

         1.1.1a. Pre každé pravidlo $\xi_j \to u$, kde u je slovo, pridaj pravidlo $\xi_k \to uw$.

         1.1.1b. Odober pravidlo $\xi_k \to \xi_j w$.

   1.2. Pridaj nový neterminál ξ_{k-n}.

   1.3. Opakuj pre všetky pravidlá $\xi_k \to \xi_k w$, kde w je slovo:

      1.3a. Pridaj pravidlá $\xi_{k-n} \to w\xi_{k-n}$ a $\xi_{k-n} \to w$.

      1.3b. Odober pravidlo $\xi_k \to \xi_k w$.

   1.4. Pre všetky pravidlá $\xi_k \to u$, kde u je slovo, pridaj pravidlo $\xi_k \to u\xi_{k-n}$.

2. Opakuj pre $k = n-1, \ldots, -(n-1)$:

   2.1. Opakuj pre $j = n, \ldots, k+1$:

      2.1.1. Opakuj pre všetky pravidlá $\xi_k \to \xi_j w$, kde w je slovo:

         2.1.1a. Pre každé pravidlo $\xi_j \to u$, kde u je slovo, pridaj pravidlo $\xi_k \to uw$.

         2.1.1b. Odober pravidlo $\xi_k \to \xi_j w$.

Korektnosť uvedeného algoritmu je založená na nasledujúcich pozorovaniach.

- Po vykonaní kroku 1 pre $k = s$ je gramatika ekvivalentná pôvodnej a všetky pravé strany pravidiel z neterminálov $\xi_1, \ldots, \xi_s$ sa začínajú buď terminálom, alebo neterminálom s väčším indexom.
- Všetky pravidlá vedúce z neterminálov $\xi_{-(n-1)}, \ldots, \xi_0$ pridaných v rámci kroku 1 majú na pravej strane slovo začínajúce buď terminálom, alebo neterminálom s kladným indexom.
- Po vykonaní celého kroku 1 je tak gramatika ekvivalentná pôvodnej a pre všetky pravidlá $\xi_i \to \xi_j w$, kde $i, j \in \{-(n-1), \ldots, n\}$, je $i < j$. Špeciálne sa už teda všetky pravé strany pravidiel z ξ_n musia začínať terminálom.
- Po vykonaní kroku 2 pre $k = s$ je gramatika ekvivalentná pôvodnej a terminálom sa začínajú všetky pravé strany pravidiel z neterminálov $\xi_s, \ldots, \xi_n$.
- Po vykonaní celého kroku 2 je tak gramatika ekvivalentná pôvodnej a terminálom sa musia začínať všetky pravé strany pravidiel – gramatika je v Greibachovej normálnom tvare.

3.1 Riešená úloha

Úloha 1. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{&\sigma \to \sigma a \mid \alpha\alpha \\ &\alpha \to \sigma\sigma \mid \alpha\alpha \mid b\}. \end{aligned}$$

Štandardnou konštrukciou preveďte gramatiku G do Greibachovej normálneho tvaru.

Riešenie. Po zavedení očíslovania $\sigma =: \xi_1$, $\alpha =: \xi_2$ dostávame gramatiku $G'' = (N'', T, P'', \xi_1)$, kde $N'' = \{\xi_1, \xi_2\}$ a

$$\begin{aligned} P'' = \{&\xi_1 \to \xi_1 a \mid \xi_2\xi_2 \\ &\xi_2 \to \xi_1\xi_1 \mid \xi_2\xi_2 \mid b\}. \end{aligned}$$

Táto gramatika zrejme spĺňa všetky predpoklady na vstup štandardného algoritmu opísaného vyššie. Výpočet algoritmu bude prebiehať nasledujúcim spôsobom.

- Krok 1, $k = 1$. V rámci kroku 1.1 iterujeme cez prázdnu množinu, preto ostane gramatika nezmenená. V kroku 1.2 pridáme neterminál ξ_{-1}. V kroku 1.3 pridáme pravidlá $\xi_{-1} \to a\xi_{-1}$, $\xi_{-1} \to a$ a odoberieme pravidlo $\xi_1 \to \xi_1 a$. V kroku 1.4 následne pridáme pravidlo $\xi_1 \to \xi_2\xi_2\xi_{-1}$. Výsledná sada pravidiel je

$$\begin{aligned} \xi_{-1} &\to a\xi_{-1} \mid a \\ \xi_1 &\to \xi_2\xi_2 \mid \xi_2\xi_2\xi_{-1} \\ \xi_2 &\to \xi_1\xi_1 \mid \xi_2\xi_2 \mid b. \end{aligned}$$

- Krok 1, $k = 2$. V kroku 1.1 pridáme pravidlá $\xi_2 \to \xi_2\xi_2\xi_1$, $\xi_2 \to \xi_2\xi_2\xi_{-1}\xi_1$ a odoberieme pravidlo $\xi_2 \to \xi_1\xi_1$. Výsledná sada pravidiel je

$$\begin{aligned} \xi_{-1} &\to a\xi_{-1} \mid a \\ \xi_1 &\to \xi_2\xi_2 \mid \xi_2\xi_2\xi_{-1} \\ \xi_2 &\to \xi_2\xi_2 \mid b \mid \xi_2\xi_2\xi_1 \mid \xi_2\xi_2\xi_{-1}\xi_1. \end{aligned}$$

  V rámci kroku 1.2 pridáme neterminál ξ_0. V kroku 1.3 pridáme pravidlá $\xi_0 \to \xi_2\xi_0$, $\xi_0 \to \xi_2$, $\xi_0 \to \xi_2\xi_1\xi_0$, $\xi_0 \to \xi_2\xi_1$, $\xi_0 \to \xi_2\xi_{-1}\xi_1\xi_0$, $\xi_0 \to \xi_2\xi_{-1}\xi_1$ a odoberieme pravidlá $\xi_2 \to \xi_2\xi_2$, $\xi_2 \to \xi_2\xi_2\xi_1$ a $\xi_2 \to \xi_2\xi_2\xi_{-1}\xi_1$. V kroku 1.4 pridáme pravidlo $\xi_2 \to b\xi_0$. Výsledná sada pravidiel je

$$\begin{aligned} \xi_{-1} &\to a\xi_{-1} \mid a \\ \xi_0 &\to \xi_2\xi_0 \mid \xi_2 \mid \xi_2\xi_1\xi_0 \mid \xi_2\xi_1 \mid \xi_2\xi_{-1}\xi_1\xi_0 \mid \xi_2\xi_{-1}\xi_1 \\ \xi_1 &\to \xi_2\xi_2 \mid \xi_2\xi_2\xi_{-1} \\ \xi_2 &\to b \mid b\xi_0. \end{aligned}$$

Pravidlá z neterminálu ξ_2 sú už teraz požadovaného tvaru. Vykonávanie algoritmu pokračuje krokom 2.

- Krok 2, $k = 1$. Pridáme pravidlá $\xi_1 \to b\xi_2$, $\xi_1 \to b\xi_0\xi_2$, $\xi_1 \to b\xi_2\xi_{-1}$ a $\xi_1 \to b\xi_0\xi_2\xi_{-1}$. Odoberieme pravidlá $\xi_1 \to \xi_2\xi_2$ a $\xi_1 \to \xi_2\xi_2\xi_{-1}$. Výsledná sada pravidiel je

$$\begin{aligned} \xi_{-1} &\to a\xi_{-1} \mid a \\ \xi_0 &\to \xi_2\xi_0 \mid \xi_2 \mid \xi_2\xi_1\xi_0 \mid \xi_2\xi_1 \mid \xi_2\xi_{-1}\xi_1\xi_0 \mid \xi_2\xi_{-1}\xi_1 \\ \xi_1 &\to b\xi_2 \mid b\xi_0\xi_2 \mid b\xi_2\xi_{-1} \mid b\xi_0\xi_2\xi_{-1} \\ \xi_2 &\to b \mid b\xi_0. \end{aligned}$$

- Krok 2, $k = 0$. Pridáme prepisovacie pravidlá $\xi_0 \to b\xi_0$, $\xi_0 \to b\xi_0\xi_0$, $\xi_0 \to b$, $\xi_0 \to b\xi_0$, $\xi_0 \to b\xi_1\xi_0$, $\xi_0 \to b\xi_0\xi_1\xi_0$, $\xi_0 \to b\xi_1$, $\xi_0 \to b\xi_0\xi_1$, $\xi_0 \to b\xi_{-1}\xi_1\xi_0$, $\xi_0 \to b\xi_0\xi_{-1}\xi_1\xi_0$, $\xi_0 \to b\xi_{-1}\xi_1$ a $\xi_0 \to b\xi_0\xi_{-1}\xi_1$. Odoberieme všetkých šesť pôvodných pravidiel z neterminálu ξ_0. Výsledná sada pravidiel (po odstránení duplikátov) je

$$\begin{aligned} \xi_{-1} &\to a\xi_{-1} \mid a \\ \xi_0 &\to b\xi_0 \mid b\xi_0\xi_0 \mid b \mid b\xi_1\xi_0 \mid b\xi_0\xi_1\xi_0 \mid b\xi_1 \mid b\xi_0\xi_1 \mid b\xi_{-1}\xi_1\xi_0 \mid b\xi_0\xi_{-1}\xi_1\xi_0 \mid b\xi_{-1}\xi_1 \mid b\xi_0\xi_{-1}\xi_1 \\ \xi_1 &\to b\xi_2 \mid b\xi_0\xi_2 \mid b\xi_2\xi_{-1} \mid b\xi_0\xi_2\xi_{-1} \\ \xi_2 &\to b \mid b\xi_0. \end{aligned}$$

- Krok 2, $k = -1$. Keďže iterujeme cez prázdnu množinu pravidiel, gramatika ostane nezmenená.

Môžeme teda uzavrieť, že gramatika G je ekvivalentná gramatike $G' = (N', T, P', \xi_1)$ v Greibachovej normálnom tvare, kde $N' = \{\xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2\}$ a

$$\begin{aligned} P' = \{ &\xi_{-1} \to a\xi_{-1} \mid a \\ &\xi_0 \to b\xi_0 \mid b\xi_0\xi_0 \mid b \mid b\xi_1\xi_0 \mid b\xi_0\xi_1\xi_0 \mid b\xi_1 \mid b\xi_0\xi_1 \mid b\xi_{-1}\xi_1\xi_0 \mid b\xi_0\xi_{-1}\xi_1\xi_0 \mid b\xi_{-1}\xi_1 \mid b\xi_0\xi_{-1}\xi_1 \\ &\xi_1 \to b\xi_2 \mid b\xi_0\xi_2 \mid b\xi_2\xi_{-1} \mid b\xi_0\xi_2\xi_{-1} \\ &\xi_2 \to b \mid b\xi_0\}. \end{aligned}$$

□

4 „Bezepsilonové“ zásobníkové automaty

Ľahko vidieť, že ak ku gramatike v Greibachovej normálnom tvare zostrojíme pomocou štandardnej konštrukcie ekvivalentný zásobníkový automat, tak ľubovoľná jeho konfigurácia s neterminálom na vrchu zásobníka môže byť nasledovaná iba konfiguráciou, v ktorej je na vrchu zásobníka terminálny symbol. Ak upravíme prechodovú funkciu tohto automatu tak, aby tieto terminály čítal zo vstupu vždy už v predchádzajúcom kroku výpočtu, získame ekvivalentný automat neobsahujúci prechody na prázdne slovo.

Veta 3. *Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika v Greibachovej normálnom tvare. Potom existuje zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ taký, že $N(A) = L(G)$ a pre všetky $q \in K$ a $Z \in \Gamma$ je $\delta(q, \varepsilon, Z) = \emptyset$.*

Dôkaz. Automat A zostrojíme nasledovne: $K = \{q_0\}$, $\Sigma = T$, $\Gamma = N \cup T$, $Z_0 = \sigma$, $F = \emptyset$, pričom pre všetky $\xi \in N$, $c \in T$ a $x \in (N \cup T)^*$ také, že $\xi \to cx \in P$ je $(q_0, x^R) \in \delta(q_0, c, \xi)$ a pre všetky $c \in T$ je $(q_0, \varepsilon) \in \delta(q_0, c, c)$. Automat A nemá definované žiadne ďalšie prechody. Dôkaz tvrdenia $N(A) = L(G)$ prenechávame čitateľovi. $\square$

Zásobníkové automaty $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ spĺňajúce pre všetky $q \in K$ a $Z \in \Gamma$ podmienku $\delta(q, \varepsilon, Z) = \emptyset$ môžeme nazvať „bezepsilonovými“. Nasledujúci dôsledok hovorí, že pri akceptácii prázdnym zásobníkom ide až na ε o normálny tvar zásobníkových automatov.

Dôsledok 1. *Ku každému bezkontextovému jazyku L existuje „bezepsilonový“ zásobníkový automat taký, že $N(A) = L - \{\varepsilon\}$.*

V prípade akceptácie stavom ide dokonca o plnohodnotný normálny tvar zásobníkových automatov – pre všetky bezkontextové jazyky L existuje „bezepsilonový“ zásobníkový automat A taký, že $L(A) = L$. Dôkaz tohto tvrdenia je náplňou jednej z úloh na nasledujúce cvičenie.

Literatúra

[1] Hopcroft, J. E., Ullman, J. D.: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation.* Reading : Addison-Wesley, 1979. ISBN 0-201-02988-X.