Riešenia úloh z malej písomky

Peter Kostolányi

7. novembra 2022

Úloha 1. Pre abecedu Σ a jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ definujeme *prefixový uzáver* jazyka L ako jazyk

$$\mathrm{pref}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : uv \in L\}.$$

Nech teraz Σ je abeceda a $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jazyky. Porovnajte jazyky

$$\mathrm{pref}(L_1 \cap L_2) \text{ a } \mathrm{pref}(L_1) \cap \mathrm{pref}(L_2).$$

Svoje tvrdenia dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že $\mathrm{pref}(L_1 \cap L_2) \subseteq \mathrm{pref}(L_1) \cap \mathrm{pref}(L_2)$, kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

$\subseteq$: Nech $u \in \mathrm{pref}(L_1 \cap L_2)$. Existuje teda $v \in \Sigma^*$ také, že $uv \in L_1 \cap L_2$. Potom $uv \in L_1$, z čoho $u \in \mathrm{pref}(L_1)$. Súčasne $uv \in L_2$, a teda $u \in \mathrm{pref}(L_2)$. V dôsledku toho $u \in \mathrm{pref}(L_1) \cap \mathrm{pref}(L_2)$.

$\not\supseteq$: Nech $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$. Potom $\mathrm{pref}(L_1 \cap L_2) = \mathrm{pref}(\emptyset) = \emptyset$. Ďalej $\mathrm{pref}(L_1) = \{\varepsilon, a\}$ a $\mathrm{pref}(L_2) = \{\varepsilon, b\}$, z čoho $\mathrm{pref}(L_1) \cap \mathrm{pref}(L_2) = \{\varepsilon\}$. Teda $\varepsilon \in \mathrm{pref}(L_1) \cap \mathrm{pref}(L_2)$, ale $\varepsilon \notin \mathrm{pref}(L_1 \cap L_2)$. □

Úloha 2. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk $L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$. Správnosť svojej konštrukcie dokážte poriadnou matematickou indukciou.

Riešenie. Dokážeme, že $L = L(G)$ pre gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{\sigma, \alpha\}$, $T = \{a, b, c\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to a\sigma c \mid \alpha \\ \alpha &\to b\alpha c \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že slovo $x \in (N \cup T)^*$ je vetnou formou gramatiky G práve vtedy, keď patrí do jazyka F obsahujúceho práve

(*i*) všetky slová $a^i \sigma c^i$, kde $i \in \mathbb{N}$

(*ii*) a všetky slová $a^i b^j s c^{i+j}$, kde $i, j \in \mathbb{N}$ a $s \in \{\alpha, \varepsilon\}$.

Keďže evidentne $F \cap T^* = L$, vyplynie z tohto pozorovania aj rovnosť $L(G) = L$.

$\subseteq$: Nech $x \in (N \cup T)^*$ je vetnou formou gramatiky G – pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ teda $\sigma \Rightarrow^n x$. Indukciou vzhľadom na n dokážeme, že $x \in F$.

Pre $n = 0$ je $x = \sigma$, čo je slovo tvaru (*i*). Predpokladajme teda platnosť tvrdenia pre $n = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme $n = k + 1$. Ak $\sigma \Rightarrow^{k+1} x$, musí existovať slovo $y \in (N \cup T)^*$ také, že $\sigma \Rightarrow^k y \Rightarrow x$. Z indukčného predpokladu potom vyplýva, že slovo y je tvaru (*i*) alebo (*ii*).

Ak $y = a^i \sigma c^i$ pre nejaké $i \in \mathbb{N}$, vyplýva zo vzťahu $y \Rightarrow x$, že slovo x musí vzniknúť z y použitím niektorého z pravidiel $\sigma \to a\sigma c$ a $\sigma \to \alpha$ na jediný výskyt neterminálu σ v slove y. V prípade použitia pravidla $\sigma \to a\sigma c$ je $x = a^{i+1}\sigma c^{i+1}$, čo je slovo tvaru (*i*). Pre pravidlo $\sigma \to \alpha$ dostávame $x = a^i \alpha c^i$, čo je slovo tvaru (*ii*). V oboch prípadoch teda $x \in F$.

Ak $y = a^i b^j s c^{i+j}$ pre $i, j \in \mathbb{N}$ a $s \in \{\alpha, \varepsilon\}$, môže $y \Rightarrow x$ platiť iba v prípade, že $s = \alpha$; slovo x ďalej musí vzniknúť z y použitím niektorého z pravidiel $\alpha \to b\alpha c$ alebo $\alpha \to \varepsilon$ na tento jediný výskyt neterminálu α. Pre prvé z týchto pravidiel dostávame $x = a^i b^{j+1} \alpha c^{i+j+1}$, čo je slovo tvaru (*ii*); pre druhé z nich je $x = a^i b^j c^{i+j}$, čo je opäť slovo tvaru (*ii*). Aj tu teda nutne $x \in F$.

$\supseteq$: Indukciou vzhľadom na i najprv dokážeme, že sú v gramatike G odvoditeľné všetky slová $a^i \sigma c^i$ pre $i \in \mathbb{N}$. Pre $i = 0$ je triviálne $\sigma \Rightarrow^* \sigma = a^0 \sigma c^0$. Predpokladajme teda platnosť tvrdenia pre $i = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme $i = k + 1$. Z indukčného predpokladu potom $\sigma \Rightarrow^* a^k \sigma c^k \Rightarrow a^{k+1} \sigma c^{k+1}$, kde v poslednom kroku odvodenia sme použili pravidlo $\sigma \to a\sigma c$.

Indukciou na j teraz dokážme, že pre všetky $i, j \in \mathbb{N}$ je v gramatike G odvoditeľné slovo $a^i b^j \alpha c^{i+j}$. Pre $j = 0$ z dokázaného dostávame $\sigma \Rightarrow^* a^i \sigma c^i \Rightarrow a^i \alpha c^i = a^i b^0 \alpha c^{i+0}$; v poslednom kroku odvodenia sme tu použili pravidlo $\sigma \to \alpha$. Nech teda tvrdenie platí pre $j = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme $j = k + 1$. Z indukčného predpokladu potom $\sigma \Rightarrow^* a^i b^k \alpha c^{i+k} \Rightarrow a^i b^{k+1} \alpha c^{i+k+1}$, kde v poslednom kroku odvodenia sme použili pravidlo $\alpha \to b\alpha c$.

Zostáva dokázať, že sú v gramatike G odvoditeľné všetky slová $a^i b^j c^{i+j}$ pre $i, j \in \mathbb{N}$. Z dokázaného ale $\sigma \Rightarrow^* a^i b^j \alpha c^{i+j} \Rightarrow a^i b^j c^{i+j}$, kde v poslednom kroku sme použili pravidlo $\alpha \to \varepsilon$. $\square$

Úloha 3. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je regulárna gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P' = \{\sigma &\to ab\sigma \mid b\alpha \mid aba \\ \alpha &\to a\alpha \mid \beta \mid \varepsilon \\ \beta &\to a\beta \mid b\}. \end{aligned}$$

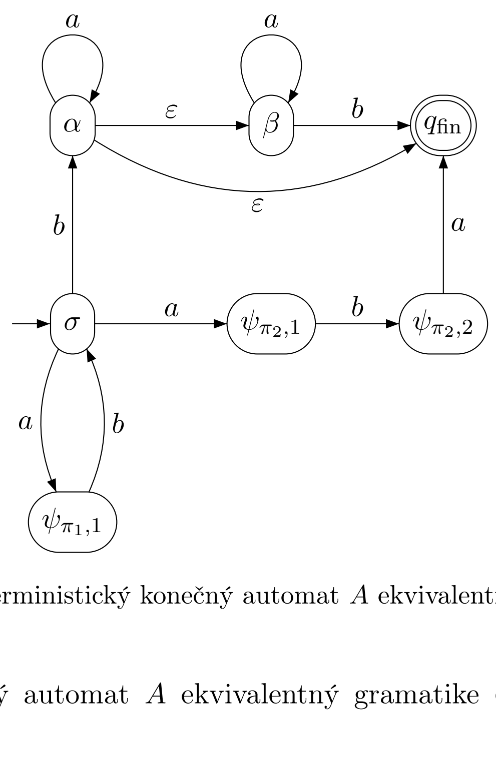
Zostrojte nedeterministický konečný automat A taký, že $L(A) = L(G)$. Túto rovnosť nie je potrebné dokazovať v prípade použitia štandardnej konštrukcie; v opačnom prípade je dôkaz nutný.

Riešenie. Skonštruujeme najprv regulárnu gramatiku $G' = (N', T, P', \sigma)$ ekvivalentnú gramatike G takú, že $P' \subseteq N' \times (TN' \cup N' \cup T \cup \{\varepsilon\})$. Za týmto účelom zaveďme nasledujúce označenia pravidiel:

$$\begin{aligned} \pi_1 &:= (\sigma \to ab\sigma), \\ \pi_2 &:= (\sigma \to aba). \end{aligned}$$

Potom $N' = \{\sigma, \alpha, \beta, \psi_{\pi_1,1}, \psi_{\pi_2,1}, \psi_{\pi_2,2}\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to a\psi_{\pi_1,1} \mid b\alpha \mid a\psi_{\pi_2,1} \\ \alpha &\to a\alpha \mid \beta \mid \varepsilon \\ \beta &\to a\beta \mid b \\ \psi_{\pi_1,1} &\to b\sigma \\ \psi_{\pi_2,1} &\to b\psi_{\pi_2,2} \\ \psi_{\pi_2,2} &\to a\}. \end{aligned}$$



Obr. 1: Nedeterministický konečný automat A ekvivalentný gramatike G.

Nedeterministický konečný automat A ekvivalentný gramatike G je potom daný diagramom na obrázku 1. $\square$

Úloha 4 (Bonus)**.** Nech Σ je abeceda. Dokážte, že ak pre slová $u, v \in \Sigma^*$ platí $uv = vu$, tak pre nejaké $x \in \Sigma^*$ a $m, n \in \mathbb{N}$ musí byť $u = x^m$ a $v = x^n$.

Riešenie. Indukciou vzhľadom na $|uv|$. Ak $|uv| = 0$, nutne $u = v = \varepsilon$ a možno zvoliť napríklad $x = \varepsilon$ a $m = n = 1$. Predpokladajme teda, že tvrdenie platí pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ s $|uv| \leq k$ a uvažujme ľubovoľnú dvojicu slov $u, v \in \Sigma^*$ takých, že $|uv| = k + 1$.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $|u| \geq |v|$. Ak $v = \varepsilon$, môžeme priamo položiť $x = u$, $m = 1$ a $n = 0$. V opačnom prípade je $|u| \leq k$, pričom z rovnosti $uv = vu$ dostávame $u = vz$ pre nejaké $z \in \Sigma^*$. Opäť z rovnosti $uv = vu$ potom $vzv = vu$, z čoho $zv = u$. Čiže $vz = zv$, pričom $|vz| \leq k$. Z indukčného predpokladu teda dostávame existenciu slova $x \in \Sigma^*$ takého, že pre nejaké $i, j \in \mathbb{N}$ je $v = x^i$ a $z = x^j$. Pre $m = i + j$ a $n = i$ ale potom $u = vz = x^m$ a $v = x^n$. $\square$