Riešenia úloh z malej písomky

Peter Kostolányi

2. apríla 2025

Úloha 1. Uvažujme jazyky $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a $L_2 = \{(a^n b)^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Zistite, či existuje a-prekladač M taký, že:

a) $M(L_1) = L_2$;

b) $M(L_2) = L_1$.

Svoje tvrdenia dokážte.

Riešenie.

a) Takýto a-prekladač neexistuje, keďže $L_1 \in \mathscr{L}_{CF}$, $L_2 \notin \mathscr{L}_{CF}$ a trieda $\mathscr{L}_{CF}$ je uzavretá na zobrazenie a-prekladačom. Skutočnosť $L_2 \notin \mathscr{L}_{CF}$ vyplýva napríklad z existencie a-prekladača M' takého, že $M'(L_2) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, daného napríklad ako $M' = (K, \Sigma, \Sigma_2, H, q_0, F)$, kde $K = \{a, b, c, \circ\}$, $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$, $q_0 = a$, $F = \{\circ\}$ a

$$H = \{(a, a, a, a), (a, b, \varepsilon, b), (b, a, b, b), (b, b, \varepsilon, c), (c, a, c, c), (c, b, \varepsilon, \circ)\}.$$

b) Takýto a-prekladač existuje a môže byť daný napríklad ako $M = (K, \Sigma, \Sigma, H, q_0, F)$, kde $K = \{a, b, \circ\}$, $q_0 = a$, $F = \{\circ\}$ a

$$H = \{(a, a, a, a), (a, b, \varepsilon, b), (b, a, b, b), (b, b, \varepsilon, \circ)\}.$$

□

Úloha 2. Nech $\Sigma = \{a, b\}$ a $n \in \mathbb{N}$. Nájdite minimálny deterministický konečný automat rozoznávajúci jazyk

$$L_n = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = n \ \wedge \ \#_b(w) \equiv 0 \pmod 2\}.$$

Minimálnosť nájdeného automatu dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že hľadaným minimálnym automatom je deterministický konečný automat $A_n = (K_n, \Sigma, \delta_n, q_{0,n}, F_n)$, kde $K_n = (\{0, \ldots, n\} \times \mathbb{Z}_2) \cup \{\times\}$, $q_{0,n} = [0, 0]$, $F_n = \{[n, 0]\}$ a prechodová funkcia δ_n je daná nasledovne:

$$\begin{aligned}
\delta_n([k, d], a) &= [k + 1, d] && \text{pre všetky } k \in \{0, \ldots, n - 1\} \text{ a } d \in \mathbb{Z}_2,\\
\delta_n([n, d], a) &= \times && \text{pre všetky } d \in \mathbb{Z}_2,\\
\delta_n([k, d], b) &= [k, d + 1] && \text{pre všetky } k \in \{0, \ldots, n\} \text{ a } d \in \mathbb{Z}_2,\\
\delta_n(\times, a) &= \times,\\
\delta_n(\times, b) &= \times.
\end{aligned}$$

Evidentne $L(A_n) = L_n$. Zostáva teda dokázať minimálnosť zostrojeného automatu; keďže má automat A_n presne $2n + 3$ stavov, stačí ukázať, že pravá syntaktická ekvivalencia $\equiv_{L_n}$ musí byť indexu aspoň $2n + 3$.

Uvažujme najprv ľubovoľnú dvojicu slov $u = a^k b^d$, $v = a^\ell b^e$ pre $k, \ell \in \{0, \ldots, n\}$ a $d, e \in \{0, 1\}$ takú, že $[k, d] \neq [\ell, e]$. Pre $z = a^{n-k} b^d$ potom $uz = a^k b^d a^{n-k} b^d$, pričom zrejme $\#_a(uz) = n$ a $\#_b(uz) = d + d \equiv 0 \pmod 2$ – takže $uz \in L_n$. Na druhej strane ale $vz = a^\ell b^e a^{n-k} b^d$, pričom $\#_a(uz) = n + \ell - k$ a $\#_b(uz) = d + e$ – za predpokladu $[k, d] \neq [\ell, e]$ teda nutne $vz \notin L_n$. Pre $u = a^k b^d$ s $k \in \{0, \ldots, n\}$ a $d \in \{0, 1\}$ a slovo z ako vyššie ďalej $uz \in L_n$, kým $a^{n+1} z \notin L_n$. V dôsledku toho teda žiadne dve rôzne slová z jazyka

$$W_n = \{a^k b^d \mid k \in \{0, \ldots, n\};\ d \in \{0, 1\}\} \cup \{a^{n+1}\}$$

nie sú v relácii pravej syntaktickej ekvivalencie $\equiv_{L_n}$. Keďže $|W_n| = 2n + 3$, musí byť aj relácia $\equiv_{L_n}$ indexu najmenej $2n + 3$. □

Úloha 3. Nech Σ je abeceda a $L \subseteq \Sigma^*$ jazyk. Pripomeňme si, že *prefixovým uzáverom* jazyka L nazývame jazyk

$$\mathrm{pref}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : uv \in L\}.$$

Hovoríme, že trieda jazykov $\mathscr{L}$ je *prefixovo uzavretá*, ak $\mathrm{pref}(L) \in \mathscr{L}$ kedykoľvek $L \in \mathscr{L}$.

Zistite, či je trieda $\mathscr{L}_{ECS}$ prefixovo uzavretá. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Trieda $\mathscr{L}_{ECS}$ *nie je prefixovo uzavretá.* Uvažujme ľubovoľný jazyk $L' \in \mathscr{L}_{RE} - \mathscr{L}_{ECS}$ nad abecedou Σ takou, že $\# \notin \Sigma$. Pre všetky $w \in L'$ potom existuje $n_w \in \mathbb{N}$ také, že

$$L = \{w\#^k \mid w \in L';\ k \in \mathbb{N};\ k \geq n_w\} \in \mathscr{L}_{ECS}.$$

Dokážeme, že

$$\mathrm{pref}(L) \notin \mathscr{L}_{ECS}.$$

Za účelom sporu predpokladajme opak; v takom prípade musí byť v triede $\mathscr{L}_{ECS}$ aj jazyk

$$\mathrm{pref}(L) \cap \Sigma^*\# = \{w\# \mid w \in L'\} = L'\#.$$

Lineárne ohraničený automat akceptujúci tento jazyk ale ľahko upravíme na lineárne ohraničený automat akceptujúci jazyk L' – stačí koncový symbol pásky \$ „interpretovať ako dva po sebe idúce symboly“ # a \$. V dôsledku toho teda $L' \in \mathscr{L}_{ECS}$, čo je v spore s naším pôvodným predpokladom. $\square$

Úloha 4 (Bonus)**.** Nech Σ, Γ sú abecedy a $\tau\colon \Sigma^* \to 2^{\Gamma^*}$ je substitúcia. Pre všetky jazyky $L \subseteq \Gamma^*$ potom kladieme

$$\tau^{-1}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \tau(w) \cap L \neq \emptyset\}.$$

Nech $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ sú triedy jazykov. Hovoríme, že trieda $\mathscr{L}_1$ je uzavretá na *inverznú $\mathscr{L}_2$-substitúciu*, ak pre všetky jazyky $L \in \mathscr{L}_1$ nad nejakou abecedou Γ a všetky $\mathscr{L}_2$-substitúcie[1] $\tau\colon \Sigma^* \to 2^{\Gamma^*}$ je $\tau^{-1}(L) \in \mathscr{L}_1$.

Nájdite najväčšiu triedu jazykov $\mathscr{L}$ takú, že trieda všetkých regulárnych jazykov $\mathscr{R}$ je uzavretá na inverznú $\mathscr{L}$-substitúciu.

Riešenie. Dokážeme, že hľadanou triedou $\mathscr{L}$ je *trieda všetkých jazykov.* Skutočne: nech $L \subseteq \Gamma^*$ je regulárny jazyk a $\tau\colon \Sigma^* \to 2^{\Gamma^*}$ je ľubovoľná substitúcia. Jazyk L musí byť rozoznávaný nejakým deterministickým konečným automatom $A = (K, \Gamma, \delta, q_0, F)$. Pre všetky $c \in \Sigma$ a $p \in K$ teraz položme

$$\Delta_{p,c} = \{q \in K \mid \exists w \in \tau(c) : (p, w) \vdash_A^* (q, \varepsilon)\};$$

táto množina stavov je síce vo všeobecnosti nevypočítateľná, ale vždy dobre definovaná. Jazyk $\tau^{-1}(L)$ je potom akceptovaný deterministickým konečným automatom $A' = (2^K, \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$, kde $F' = \{Q \subseteq K \mid Q \cap F \neq \emptyset\}$ a kde pre všetky $P \subseteq K$ a $c \in \Sigma$ je

$$\delta'(P, c) = \bigcup_{p \in P} \Delta_{p,c}.$$

Indukciou na $|u|$ ľahko dokážeme, že pre všetky $u \in \Sigma^*$ je

$$(\{q_0\}, u) \vdash_{A'}^* (Q, \varepsilon)$$

práve vtedy, keď

$$Q = \{q \in K \mid \exists w \in \tau(u) : (q_0, w) \vdash_A^* (q, \varepsilon)\}.$$

Slovo $u \in \Sigma^*$ teda dočítame v akceptačnom stave automatu A' práve vtedy, keď existuje $w \in \tau(u)$ také, že $(q_0, w) \vdash_A^* (q, \varepsilon)$ pre nejaké $q \in F$ – takže $u \in L(A')$ práve vtedy, keď $\tau(u) \cap L \neq \emptyset$, čo nastane práve vtedy, keď $u \in \tau^{-1}(L)$. Naozaj teda $L(A') = \tau^{-1}(L)$. $\square$

[1] Pripomeňme si, že substitúcia $\tau\colon \Sigma^* \to 2^{\Gamma^*}$ je $\mathscr{L}$-substitúcia pre nejakú triedu jazykov $\mathscr{L}$, ak pre všetky $c \in \Sigma$ je $\tau(c) \in \mathscr{L}$.