Riešenia úloh z veľkej písomky

Peter Kostolányi

12. decembra 2022

Úloha 1. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to aa\sigma\beta \mid b\alpha \mid \alpha \\ \alpha &\to \alpha a\alpha \mid aa \\ \beta &\to \beta\beta \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Preveďte gramatiku G do Chomského normálneho tvaru. Ekvivalenciu výslednej gramatiky s pôvodnou netreba dokazovať v prípade použitia štandardnej konštrukcie; pri použití akejkoľvek inej konštrukcie je dôkaz jej správnosti nutný.

Riešenie. Pre všetky $c \in T$ zaveďme nový neterminál ξ_c a pravidlo $\xi_c \to c$; následne nahraďme všetky terminály c na pravých stranách pôvodných pravidiel neterminálom ξ_c. Po tejto transformácii dostaneme gramatiku s pravidlami

$$\begin{aligned} \sigma &\to \xi_a\xi_a\sigma\beta \mid \xi_b\alpha \mid \alpha, \\ \alpha &\to \alpha\xi_a\alpha \mid \xi_a\xi_a, \\ \beta &\to \beta\beta \mid \varepsilon, \\ \xi_a &\to a, \\ \xi_b &\to b. \end{aligned}$$

Zaveďme ďalej nový neterminál ξ_ε s pravidlom $\xi_\varepsilon \to \varepsilon$ a predĺžme neterminálom ξ_ε „príliš krátku" pravú stranu pravidla $\sigma \to \alpha$. Získame tak gramatiku s pravidlami

$$\begin{aligned} \sigma &\to \xi_a\xi_a\sigma\beta \mid \xi_b\alpha \mid \alpha\xi_\varepsilon, \\ \alpha &\to \alpha\xi_a\alpha \mid \xi_a\xi_a, \\ \beta &\to \beta\beta \mid \varepsilon, \\ \xi_a &\to a, \\ \xi_b &\to b, \\ \xi_\varepsilon &\to \varepsilon. \end{aligned}$$

Zaveďme napokon označenia

$$\begin{aligned} \pi_1 &:= (\sigma \to \xi_a\xi_a\sigma\beta), \\ \pi_2 &:= (\alpha \to \alpha\xi_a\alpha) \end{aligned}$$

a „rozbime" príliš dlhé pravé strany týchto dvoch pravidiel pomocou nových neterminálov, čím dostaneme bezkontextovú gramatiku $G' = (N', T, P', \sigma)$ s $N' = \{\sigma, \alpha, \beta, \xi_a, \xi_b, \xi_\varepsilon, \psi_{\pi_1,1}, \psi_{\pi_1,2}, \psi_{\pi_2,1}\}$ a

$$\begin{aligned} P' = \{\sigma &\to \xi_a\psi_{\pi_1,1} \mid \xi_b\alpha \mid \alpha\xi_\varepsilon \\ \alpha &\to \alpha\psi_{\pi_2,1} \mid \xi_a\xi_a \\ \beta &\to \beta\beta \mid \varepsilon, \\ \psi_{\pi_1,1} &\to \xi_a\psi_{\pi_1,2} \\ \psi_{\pi_1,2} &\to \sigma\beta \\ \psi_{\pi_2,1} &\to \xi_a\alpha \\ \xi_a &\to a \\ \xi_b &\to b \\ \xi_\varepsilon &\to \varepsilon\}. \end{aligned}$$

□

Úloha 2. Zostrojte (deterministický alebo nedeterministický) konečný automat akceptujúci jazyk

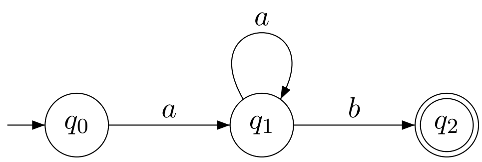
$$L = a^+b.$$

Správnosť svojej konštrukcie dokážte poriadnou matematickou indukciou.

Riešenie. Jazyk L je akceptovaný nedeterministickým konečným automatom $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_2\}$ a

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, a) = \{q_1\}, & \delta(q_1, a) = \{q_1\}, & \delta(q_2, a) = \emptyset, \\ \delta(q_0, b) = \emptyset, & \delta(q_1, b) = \{q_2\}, & \delta(q_2, b) = \emptyset, \\ \delta(q_0, \varepsilon) = \emptyset, & \delta(q_1, \varepsilon) = \emptyset, & \delta(q_2, \varepsilon) = \emptyset. \end{array}$$

Prechodový diagram automatu A je na obrázku 1.



Obr. 1: Prechodový diagram nedeterministického konečného automatu A.

Pre stavy automatu A dokážeme nasledujúce invarianty:

$$\begin{aligned} I_0 &: \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^* (q_0, \varepsilon) \iff w = \varepsilon \\ I_1 &: \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^* (q_1, \varepsilon) \iff w \in a^+, \\ I_2 &: \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^* (q_2, \varepsilon) \iff w \in a^+b. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Matematickou indukciou vzhľadom na n dokážeme, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_0' &: \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^n (q_0, \varepsilon) \Rightarrow w = \varepsilon, \\ I_1' &: \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^n (q_1, \varepsilon) \Rightarrow w \in a^+, \\ I_2' &: \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^n (q_2, \varepsilon) \Rightarrow w \in a^+b. \end{aligned}$$

Pre $n = 0$ môže byť ľavá strana pravdivá iba pri implikácii I_0'. V takom prípade tiež nutne $w = \varepsilon$.

Predpokladajme teda pravdivosť uvedených implikácií pre $n = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme $n = k + 1$.

I_0': Pre $w \in \Sigma^*$ spĺňajúce $(q_0, w) \vdash^{k+1} (q_0, \varepsilon)$ musia existovať $q \in K$, $u \in \Sigma^*$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $w = uz$ a $(q_0, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (q_0, \varepsilon)$ – a teda $q_0 \in \delta(q, z)$. Do stavu q_0 však v automate A nevedie žiaden prechod. Ľavá strana implikácie I_0' tak pre $n = k + 1$ nemôže byť splnená a implikácia ako celok je teda pravdivá.

I_1': Nech $w \in \Sigma^*$ je slovo také, že $(q_0, w) \vdash^{k+1} (q_1, \varepsilon)$. Potom $(q_0, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (q_1, \varepsilon)$ pre nejaké $q \in K$, $u \in \Sigma^*$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $w = uz$.

Nutne teda $q_1 \in \delta(q, z)$ a z definície prechodovej funkcie δ ľahko vidieť, že $z = a$, pričom $q = q_0$ alebo $q = q_1$. V prvom prípade je z indukčného predpokladu $u = \varepsilon$, z čoho $w = ua = a \in a^+$; v zostávajúcom prípade je z indukčného predpokladu $u \in a^+$, a teda aj $w = ua \in a^+$.

I_2': Nech $w \in \Sigma^*$ je slovo také, že $(q_0, w) \vdash^{k+1} (q_2, \varepsilon)$. Potom $(q_0, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (q_2, \varepsilon)$ pre nejaké $q \in K$, $u \in \Sigma^*$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $w = uz$.

Keďže nutne $q_2 \in \delta(q, z)$, z definície prechodovej funkcie δ vyplýva, že $z = b$ a $q = q_1$. Z indukčného predpokladu teda dostávame $u \in a^+$, z čoho $w = ub \in a^+b$.

$\Leftarrow$: Nech $w \in \Sigma^*$. Implikácia

$$I_0'' \colon w = \varepsilon \Rightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_0, \varepsilon)$$

je triviálne pravdivá. Dokážeme teraz implikáciu

$$I_1'' \colon w \in a^+ \Rightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_1, \varepsilon).$$

Každé $w \in a^+$ možno zapísať ako $w = a^n$ pre nejaké $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Implikáciu tak môžeme dokázať indukciou vzhľadom na takéto n. Pre $n = 1$ je $(q_0, a^1) \vdash (q_1, \varepsilon)$, pretože $q_1 \in \delta(q_0, a)$. Ak teraz pre $n = k \in \mathbb{N} - \{0\}$ platí $(q_0, a^k) \vdash^* (q_1, \varepsilon)$, tak aj pre $n = k+1$ zisťujeme, že $(q_0, a^{k+1}) \vdash^* (q_1, a) \vdash (q_1, \varepsilon)$, keďže $q_1 \in \delta(q_1, a)$. Implikácia

$$I_2'' \colon w \in a^+ b \Rightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_2, \varepsilon)$$

je napokon bezprostredným dôsledkom predchádzajúcej implikácie: ak $w \in a^+ b$, existuje $u \in a^+$ také, že $w = ub$. Podľa I_1'' potom $(q_0, u) \vdash^* (q_1, \varepsilon)$, z čoho $(q_0, ub) \vdash^* (q_1, b) \vdash (q_2, \varepsilon)$, keďže $q_2 \in \delta(q_1, b)$.

Keďže je q_2 jediným akceptačným stavom automatu A, slovo $w \in \Sigma^*$ patrí do $L(A)$ práve vtedy, keď $(q_0, w) \vdash^* (q_2, \varepsilon)$. To vďaka invariantu I_2 nastane práve vtedy, keď $w \in a^+ b$. Skutočne teda $L(A) = L$. $\square$

Úloha 3. Preverte pravdivosť nasledujúcich tvrdení a svoje odpovede vyznačte krížikmi do príslušných políčok. Zdôvodnenia odpovedí nie sú potrebné.

		áno	**nie**
1.	Pre všetky $L \subseteq \Sigma^*$ a homomorfizmy $h\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ je $h^{-1}(h(L)) \subseteq L$.		$\times$
2.	Trieda všetkých konečných jazykov je uzavretá na zjednotenie a zreťazenie – je preto uzavretá aj na iteráciu.		$\times$
3.	Ak je komplement jazyka L konečný, je jazyk L regulárny.	$\times$	
4.	Ak $L \subseteq a^*$ a $L \notin \mathscr{R}$, tak $La^* \notin \mathscr{R}$.		$\times$
5.	Nech $L \in \mathscr{R}$. Podľa pumpovacej lemy potom existuje $p \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $w \in L$ s $\|w\| \geq p$, všetky slová u, x, v spĺňajúce $w = uxv$ a všetky $i \in \mathbb{N}$ je $ux^iv \in L$.		$\times$
6.	Každý bezkontextový jazyk je nekonečný.		$\times$
7.	Komplement bezkontextového jazyka nemôže byť bezkontextový.		$\times$
8.	Pre všetky dvojice jazykov $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$ existuje deterministický Turingov stroj A taký, že $L(A) = L_1 \cap L_2$.	$\times$	
9.	$\mathscr{L}_{rec} \subsetneq \mathscr{L}_{RE}$.	$\times$	
10.	Ak $L_1 \notin \mathscr{L}_{RE}$, nemôže existovať žiaden jazyk $L_2 \in \mathscr{L}_{RE}$ taký, že $L_1 \subseteq L_2$.		$\times$

Riešenie.

1. **Nie**. Napríklad pre $\Sigma = \{a, b\}$, homomorfizmus $h\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ daný ako $h(a) = h(b) = a$ a $L = \{a\}$ je $h^{-1}(h(L)) = \{a, b\} \not\subseteq L$.

2. **Nie**. Napríklad jazyk $L = \{a\}$ je konečný, ale jazyk $L^* = a^*$ konečný nie je.

3. **Áno**. Ak je L^C konečný, nutne $L^C \in \mathscr{R}$ a z uzavretosti triedy $\mathscr{R}$ na komplement aj $L = (L^C)^C \in \mathscr{R}$.

4. **Nie**. Napríklad pre $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathscr{R}$ je $La^* = a^* \in \mathscr{R}$.

5. **Nie**. Nech $L = (ab)^* \in \mathscr{R}$. Predpokladajme, že $p \in \mathbb{N}$ z uvedeného tvrdenia pre tento jazyk existuje. Nech $w = (ab)^{p+1}$ – evidentne $w \in L$ a $|w| \geq p$. Potom napríklad pre $u = \varepsilon$, $x = a$ a $v = b(ab)^p$ je $w = uxv$, ale $ux^2v = a(ab)^{p+1} \notin L$.

6. **Nie**. Každý konečný jazyk je regulárny, a teda aj bezkontextový.

7. **Nie**. Napríklad jazyky $\emptyset$ a a^* nad abecedou $\Sigma = \{a\}$ sú obidva bezkontextové.

8. **Áno**. Vyplýva z inklúzie $\mathscr{L}_{CF} \subseteq \mathscr{L}_{RE}$ a uzavretosti triedy $\mathscr{L}_{RE}$ na prienik.

9. **Áno**. Priamo z definície týchto tried jazykov vyplýva $\mathscr{L}_{rec} \subseteq \mathscr{L}_{RE}$, pričom napríklad pre diagonálny jazyk je $L_D \in \mathscr{L}_{RE} - \mathscr{L}_{rec}$.

10. **Nie**. Napríklad $L_D^C \subseteq \{0, 1\}^*$, pričom $L_D^C \notin \mathscr{L}_{RE}$ a $\{0, 1\}^* \in \mathscr{R} \subseteq \mathscr{L}_{RE}$. □

Úloha 4. Zistite, či je jazyk $L = \{ucv \mid u, v \in \{a,b\}^*;\ \#_a(u) = \#_b(v)\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a,b,c\}$ regulárny. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že jazyk L *nie je* regulárny. Sporom, nech $L \in \mathscr{R}$ a $p \in \mathbb{N}$ je konštanta prislúchajúca jazyku L podľa pumpovacej lemy. Zvoľme $w = a^p c b^p$ – evidentne $w \in L$ a $|w| \geq p$. Existujú teda slová $u, x, v \in \Sigma^*$, pre ktoré sú splnené podmienky (i) až (iv) pumpovacej lemy.

Podľa (i) je $w = uxv$. Z (ii) a (iii) ďalej vyplýva, že pre nejaké $r \in \mathbb{N}$ a $s \in \mathbb{N} - \{0\}$ je $u = a^r$, $x = a^s$ a $v = a^{p-r-s} c b^p$. Podľa (iv) pre $i = 2$ napokon $ux^2v = a^{p+s} c b^s \in L$ – čo je spor, pretože $\#_a(a^{p+s}) = p + s > p = \#_b(b^s)$. $\square$

Úloha 5. Nech Σ je abeceda a $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ sú jazyky. *Vložením* jazyka L_2 do jazyka L_1 nazveme jazyk

$$L_1 \leftarrow L_2 = \{uxv \mid u, v \in \Sigma^*;\ uv \in L_1;\ x \in L_2\}.$$

Zistite, či je trieda $\mathscr{L}_{CF}$ uzavretá na vloženie: musí pre ľubovoľné $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$ byť aj $L_1 \leftarrow L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$? Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že trieda $\mathscr{L}_{CF}$ *je uzavretá* na operáciu vloženia. Nech $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$ sú ľubovoľné. Nech $A_1 = (K_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_{0,1}, Z_{0,1}, F_1)$ a $A_2 = (K_2, \Sigma_2, \Gamma_2, \delta_2, q_{0,2}, Z_{0,2}, F_2)$ sú zásobníkové automaty také, že $N(A_1) = L_1$ a $N(A_2) = L_2$. Skonštruujeme zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ taký, že $N(A) = L_1 \leftarrow L_2$.

Automat A pre dané vstupné slovo w „nedeterministicky uhádne“ jeho faktorizáciu $w = uxv$ a následne bude zisťovať, či $uv \in L_1$ a $x \in L_2$ – v takom prípade bude príslušný výpočet akceptačný. Vstupné slovo w teda bude automatom A akceptované práve vtedy, keď existuje aspoň jedna takáto jeho faktorizácia – čiže práve vtedy, keď $w \in L_1 \leftarrow L_2$.

Overenie podmienok $uv \in L_1$ a $x \in L_2$ bude automat A realizovať nasledujúcim spôsobom: na prefixe u vstupného slova w bude simulovať výpočet automatu A_1 až do momentu, keď sa rozhodne čítať vložený faktor x. Vtedy „zakonzervuje“ obsah zásobníka pridaním nového symbolu $\Box$ na jeho vrch a následne odsimuluje výpočet automatu A_2 na faktore x. V tejto časti výpočtu bude využívaná iba časť zásobníka nad pridaným symbolom $\Box$, ktorý tu zohráva úlohu „umelého dna“. V prípade, že sa teda symbol $\Box$ znova objaví na vrchu zásobníka, muselo byť slovo x automatom A_2 akceptované prázdnym zásobníkom – čiže $x \in L_2$. V takom prípade automat A z vrchu zásobníka symbol $\Box$ odoberie a vráti sa do konfigurácie zodpovedajúcej konfigurácii automatu A_1 po prečítaní prefixu u. Na overenie, či $uv \in L_1$, teda už len stačí pokračovať v simulácii tohto načatého výpočtu automatu A_1 na zvyšku vstupného slova w, ktorý zodpovedá faktoru v.

Pri implementácii takéhoto automatu je potrebné myslieť na jeden detail: ak $v = \varepsilon$, môže automat A_1 vyprázdniť svoj zásobník už počas výpočtu na slove u – a aj v takom prípade musí automat A vedieť začať so simuláciou automatu A_2 na slove x. Na dno zásobníka preto na začiatku celej simulácie pridáme nový symbol Z_0, ktorý odoberieme až na samom konci výpočtu – t. j. po prečítaní faktora v.

Formálne teda položíme $K = \{q_0\} \cup (K_1 \times \{1\}) \cup (K_1 \times K_2 \times \{2\}) \cup (K_1 \times \{3\})$ pre nový stav q_0, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ a $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\Box, Z_0\}$, pričom bez ujmy na všeobecnosti predpokladáme, že $\Box$ a Z_0 nie sú prvkami $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Prechodovú funkciu automatu A definujeme nasledovne:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) &= \{([q_{0,1}, 1], Z_0 Z_{0,1})\} && \\
\delta([p,1], c, Z) &= \{([q,1], \gamma) \mid (q, \gamma) \in \delta_1(p, z, Z)\} && \forall p \in K_1\ \forall c \in \Sigma_1\ \forall Z \in \Gamma_1, \\
\delta([p,1], \varepsilon, Z) &= \{([q,1], \gamma) \mid (q, \gamma) \in \delta_1(p, \varepsilon, Z)\} \cup && \\
&\quad \cup \{([p, q_{0,2}, 2], Z\Box Z_{0,2})\} && \forall p \in K_1\ \forall Z \in \Gamma_1, \\
\delta([p,1], \varepsilon, Z_0) &= \{([p, q_{0,2}, 2], Z_0 \Box Z_{0,2})\} && \forall p \in K_1, \\
\delta([p_1, p_2, 2], z, Z) &= \{([p_1, q_2, 2], \gamma) \mid (q_2, \gamma) \in \delta_2(p_2, z, Z)\} && \forall p_1 \in K_1\ \forall p_2 \in K_2\ \forall z \in \Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}\ \forall Z \in \Gamma_2, \\
\delta([p_1, p_2, 2], \varepsilon, \Box) &= \{([p_1, 3], \varepsilon)\} && \forall p_1 \in K_1\ \forall p_2 \in K_2, \\
\delta([p,3], z, Z) &= \{([q,3], \gamma) \mid (q, \gamma) \in \delta_1(p, z, Z)\} && \forall p \in K_1\ \forall z \in \Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}\ \forall Z \in \Gamma_1, \\
\delta([p,3], \varepsilon, Z_0) &= \{([p,3], \varepsilon)\} && \forall p \in K_1
\end{aligned}$$

a $\delta(q, z, Z) = \emptyset$ pre všetky ostatné $(q, z, Z) \in K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \cup \Gamma$. Nakoniec už len položme $F = \emptyset$. $\Box$

Úloha 6. Uvažujme rozhodovací problém daný nasledovne:

> **Vstup:** Kód $\langle A \rangle$ deterministického Turingovho stroja A nad abecedou $\{0,1\}$; slová $u, v \in \{0,1\}^*$.
>
> **Výstup:** „Áno“ práve vtedy, keď $u \in L(A)$ a zároveň $v \in L(A)$.

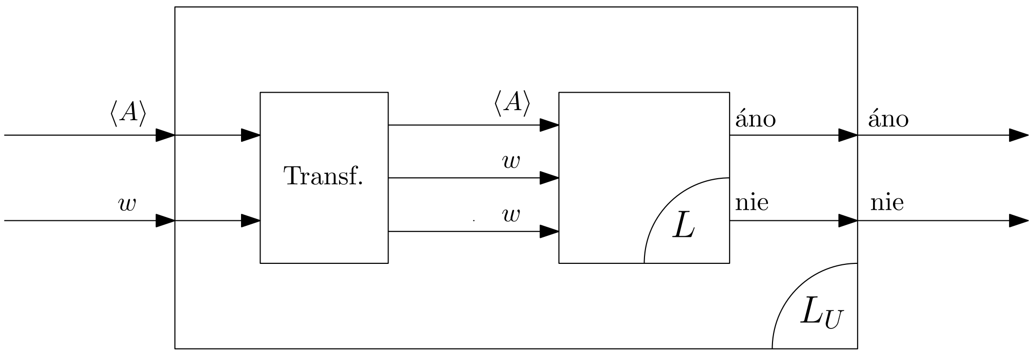
Je tento problém rozhodnuteľný? Ak nie, je rekurzívne vyčísliteľný? Svoje tvrdenia dokážte.

Riešenie. Označme jazyk prislúchajúci k problému zo zadania ako L. To znamená, že

$$L = \{\langle A \rangle \# u \# v \mid A \text{ je det. TS nad abecedou } \{0,1\};\ u, v \in \{0,1\}^*;\ u \in L(A) \ \wedge \ v \in L(A)\}.$$

Problém *je rekurzívne vyčísliteľný* – čiže $L \in \mathscr{L}_{RE}$. Turingov stroj akceptujúci L totiž môže simulovať univerzálny Turingov stroj na vstupe $\langle A \rangle \# u$ a po prípadnom zastavení tohto výpočtu aj na vstupe $\langle A \rangle \# v$. V prípade, že sa obidva tieto simulované výpočty zastavia v akceptačnom stave, môže stroj svoj vstup akceptovať.

Problém ale *nie je rozhodnuteľný* – čiže $L \notin \mathscr{L}_{rec}$ – čo dokážeme redukciou univerzálneho problému na problém zo zadania. Za účelom sporu predpokladajme, že problém zo zadania je rozhodnuteľný – existuje teda deterministický Turingov stroj akceptujúci L, ktorý sa na každom svojom vstupe zastaví. V takom prípade by sme ale vedeli rozhodovať aj univerzálny problém, o ktorom vieme, že rozhodnuteľný nie je: vstup $\langle A \rangle \# w$ by sme totiž mohli transformovať na $\langle A \rangle \# w \# w$ a na tomto vstupe by sme mohli spustiť stroj rozhodujúci problém zo zadania (zodpovedajúci jazyku L). Vstup $\langle A \rangle \# w \# w$ je ale strojom pre L akceptovaný práve vtedy, keď $w \in L(A)$ a zároveň $w \in L(A)$ – čiže práve vtedy, keď $w \in L(A)$. Výstup stroja pre L teda možno priamo použiť ako výstup stroja rozhodujúceho univerzálny problém. Schéma redukcie je na obrázku 2.



Obr. 2: Schéma redukcie univerzálneho problému na problém zo zadania.

□

Úloha 7 (Bonus)**.** Regulárny jazyk L nazveme *R-triviálnym*, ak $L = L(A)$ pre nejaký deterministický konečný automat A neobsahujúci cyklus rôzny od slučky. Musí teda byť akceptovaný deterministickým konečným automatom $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takým, že pre všetky $p, q \in K$ a $u, v \in \Sigma^*$ spĺňajúce

$$(p, uv) \vdash^* (q, v) \vdash^* (p, \varepsilon)$$

je $p = q$. Zistite, či existuje regulárny jazyk, ktorý *nie je* R-triviálny. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že regulárny jazyk $L = (aa)^*$ nie je R-triviálny. Sporom: predpokladajme, že tento jazyk R-triviálny je, a teda $L = L(A)$ pre nejaký deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že pre všetky $p, q \in K$ a $u, v \in \Sigma^*$ platí

$$(p, uv) \vdash^* (q, v) \vdash^* (p, \varepsilon) \Rightarrow p = q. \tag{1}$$

V takom prípade zrejme $a \in \Sigma$.

Nech $|K| = n$ a $w = a^{2n}$. Evidentne $w \in L$, a teda existuje stav $q_{\text{fin}} \in F$ taký, že

$$(q_0, w) \vdash^* (q_{\text{fin}}, \varepsilon).$$

Keďže ale $|w| \geq n$, musí sa v tomto výpočte aspoň raz zopakovať niektorý stav $p \in K$ – existujú teda slová $u, x, v \in a^*$ také, že $w = uxv$, $|x| \geq 1$ a

$$(q_0, uxv) \vdash^* (p, xv) \vdash^+ (p, v) \vdash^* (q_{\text{fin}}, \varepsilon).$$

Ak teda $x = ay$ pre nejaké $y \in a^*$, podľa (1) nutne

$$(q_0, uayv) \vdash^* (p, ayv) \vdash (p, yv) \vdash^* (p, v) \vdash^* (q_{\text{fin}}, \varepsilon),$$

z čoho

$$(q_0, uaayv) \vdash^* (p, aayv) \vdash (p, ayv) \vdash (p, yv) \vdash^* (p, v) \vdash^* (q_{\text{fin}}, \varepsilon),$$

a teda $uaayv = uaxv = a^{2n+1} \in L$. To očividne odporuje definícii jazyka L. □