Riešenie prvej prémiovej úlohy

Peter Kostolányi

10. novembra 2022

Úloha 1. Nech Σ je abeceda, $L \subseteq \Sigma^*$ jazyk a $x \in \Sigma^*$ slovo. *Ľavým kvocientom* jazyka L podľa slova x nazveme jazyk

$$x \backslash L = \{w \in \Sigma^* \mid xw \in L\}.$$

Dokážte, že ak je pre jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ množina jazykov $\{x \backslash L \mid x \in \Sigma^*\}$ konečná, je jazyk L regulárny.

Riešenie. V prvom rade si všimnime, že pre všetky $x, y \in \Sigma^*$ je $(xy) \backslash L = y \backslash (x \backslash L)$. Skutočne: $w \in (xy) \backslash L$ práve vtedy, keď $xyw \in L$. To nastane práve vtedy, keď $yw \in x \backslash L$, čo je napokon ekvivalentné tomu, že $w \in y \backslash (x \backslash L)$.

Uvažujme teraz ľubovoľný jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ taký, že množina $\{x \backslash L \mid x \in \Sigma^*\}$ je konečná. Skonštruujeme deterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že $L(A) = L$: vezmime $K = \{x \backslash L \mid x \in \Sigma^*\}$, $q_0 = \varepsilon \backslash L = L$, $F = \{x \backslash L \mid x \in \Sigma^*;\ \varepsilon \in x \backslash L\}$ a pre všetky $x \in \Sigma^*$ položme

$$\delta(x \backslash L, c) = (xc) \backslash L.$$

Táto definícia je korektná: ak totiž pre nejaké $x, y \in \Sigma^*$ je $x \backslash L = y \backslash L$, tak

$$(xc) \backslash L = c \backslash (x \backslash L) = c \backslash (y \backslash L) = (yc) \backslash L.$$

Matematickou indukciou ľahko dokážeme, že pre všetky $w \in \Sigma^*$ je $(q_0, w) \vdash^* (w \backslash L, \varepsilon)$: pre $w = \varepsilon$ totiž evidentne $(q_0, w) = (\varepsilon \backslash L, \varepsilon) \vdash^0 (\varepsilon \backslash L, \varepsilon)$. Ak teraz tvrdenie platí pre nejaké $w \in \Sigma^*$, tak aj pre ľubovoľné $c \in \Sigma$ dostávame $(q_0, wc) \vdash^* (w \backslash L, c) \vdash ((wc) \backslash L, \varepsilon)$.

Keďže je automat deterministický, platí dokonca o niečo silnejšie tvrdenie: $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$ práve vtedy, keď $q = w \backslash L$. Z toho vďaka definícii množiny F vyplýva, že $w \in L(A)$ práve vtedy, keď $\varepsilon \in w \backslash L$. To ale nastane práve vtedy, keď $w \in L$. Skutočne teda $L(A) = L$. $\square$