# Riešenie prvej prémiovej úlohy

Peter Kostolányi

14. apríla 2025

**Úloha 1.** Nech $\Sigma$ je ľubovoľná abeceda. Zistite, či existuje a-prekladač $M$ taký, že pre všetky jazyky $L \subseteq \Sigma^*$ je $M(L) = \mathrm{MIN}(L)$.

*Riešenie.* Takýto a-prekladač *neexistuje* nad žiadnou abecedou $\Sigma$. Nech $a \in \Sigma$ je ľubovoľný symbol. A-prekladač $M$ s vlastnosťou zo zadania by potom musel spĺňať $M(a) = \{a\}$ a $M(aa) = \{aa\}$. Avšak v takom prípade je

$$M(\{a, aa\}) = M(a) \cup M(aa) = \{a, aa\} \neq \mathrm{MIN}(\{a, aa\}) :$$

spor. $\square$

*Iné riešenie.* Skutočnosť, že požadovaný a-prekladač *vo všeobecnosti* neexistuje, možno dokázať aj pomocou uzáverových vlastností triedy $\mathscr{L}_{CF}$ – v opačnom prípade by totiž vďaka uzavretosti triedy $\mathscr{L}_{CF}$ na zobrazenie a-prekladačom muselo pre všetky $L \in \mathscr{L}_{CF}$ byť aj $\mathrm{MIN}(L) \in \mathscr{L}_{CF}$. Dokážeme ale, že trieda $\mathscr{L}_{CF}$ nie je uzavretá na operáciu MIN.

Uvažujme jazyk $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} - \{0\};\ k \geq i \ \vee\ k \geq j\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$. Keďže

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} - \{0\};\ k \geq i\} \cup \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} - \{0\};\ k \geq j\},$$

je jazyk $L$ evidentne bezkontextový. Je tiež zrejmé, že

$$\mathrm{MIN}(L) = \{a^i b^j c^{\min\{i,j\}} \mid i, j \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$$

Dokážeme, že tento jazyk nie je bezkontextový. Sporom: nech $\mathrm{MIN}(L) \in \mathscr{L}_{CF}$ a nech $p \in \mathbb{N}$ je konštanta prislúchajúca k tomuto jazyku podľa pumpovacej lemy pre bezkontextové jazyky. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $p \geq 1$ a uvažujme slovo $w = a^p b^p c^p$ – evidentne $w \in \mathrm{MIN}(L)$ a $|w| \geq p$. Podľa pumpovacej lemy pre bezkontextové jazyky teda existujú slová $x, u, y, v, z \in \Sigma^*$ také, že $w = xuyvz$, $|uyv| \leq p$, $|uv| \geq 1$ a pre všetky $i \in \mathbb{N}$ je $xu^i yv^i z \in \mathrm{MIN}(L)$. Keby pritom niektoré zo slov $u, v$ obsahovalo výskyty dvoch rôznych písmen abecedy $\Sigma$, dostali by sme $xu^2yv^2z \notin a^*b^*c^*$, čo je v spore s predpokladom $xu^2yv^2z \in \mathrm{MIN}(L)$. Určite teda nastane niektorý z nasledujúcich prípadov:

a) Je $u = a^r$ a $v = a^s$ pre nejaké $r, s \in \mathbb{N}$ také, že $1 \leq r + s \leq p$. Pre $i = 0$ potom dostávame $xu^0yv^0z = a^{p-r-s}b^pc^p$, pričom $\min\{p - r - s, p\} = p - r - s < p$. Toto slovo teda nemôže patriť do $\mathrm{MIN}(L)$: spor.

b) Je $u = a^r$ a $v = b^s$ pre nejaké $r, s \in \mathbb{N}$ také, že $1 \leq r + s \leq p$. Pre $i = 0$ je potom $xu^0yv^0z = a^{p-r}b^{p-s}c^p$, pričom $\min\{p - r, p - s\} < p$. Toto slovo teda opäť nepatrí do $\mathrm{MIN}(L)$: spor.

c) Je $u = b^r$ a $v = b^s$ pre nejaké $r, s \in \mathbb{N}$ také, že $1 \leq r + s \leq p$. Pre $i = 0$ je potom $xu^0yv^0z = a^pb^{p-r-s}c^p$, pričom $\min\{p, p - r - s\} = p - r - s < p$. Slovo teda nepatrí do $\mathrm{MIN}(L)$: spor.

d) Je $u = b^r$ a $v = c^s$ pre nejaké $r, s \in \mathbb{N}$ také, že $1 \leq r + s \leq p$. Ak $r > 0$ a $s = 0$, pre $i = 0$ dostávame $xu^0yv^0z = a^pb^{p-r}c^p$, pričom $\min\{p, p - r\} = p - r < p$. Ak $s > 0$, pre $i = 2$ dostávame $xu^2yv^2z = a^pb^{p+r}c^{p+s}$, pričom $\min\{p, p + r\} = p < p + s$. V oboch prípadoch teda slovo nepatrí do $\mathrm{MIN}(L)$: spor.

e) Je $u = c^r$ a $v = c^s$ pre nejaké $r, s \in \mathbb{N}$ také, že $1 \leq r + s \leq p$. Pre $i = 0$ je potom $xu^0yv^0z = a^pb^pc^{p-r-s}$, pričom $\min\{p, p\} = p > p - r - s$. Slovo teda ani v tomto prípade nepatrí do $\mathrm{MIN}(L)$: spor. $\square$