Riešenie druhej prémiovej úlohy

Peter Kostolányi

8. decembra 2022

Zadanie. Nech Σ je abeceda a $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk. Pripomeňme si, že *prefixovou redukciou* jazyka L rozumieme jazyk $\mathrm{pref}^{\downarrow}(L)$ obsahujúci práve všetky slová w z jazyka L také, že aj všetky prefixy slova w patria do L – čiže

$$\mathrm{pref}^{\downarrow}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \forall u \in \Sigma^* : (\exists v \in \Sigma^* : w = uv) \Rightarrow u \in L\}.$$

Zistite, či je trieda $\mathscr{L}_{CF}$ uzavretá na prefixovú redukciu. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že trieda $\mathscr{L}_{CF}$ *nie je uzavretá* na prefixovú redukciu. Uvažujme jazyk

$$L = \{\varepsilon\} \cup \{a, b\}^* a \cup a^* b \cup \{a^n b a^n b \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^k b a^n b a^n b \mid k, n \in \mathbb{N}\}.$$

Evidentne $L \in \mathscr{L}_{CF}$. Za účelom sporu predpokladajme, že je bezkontextový aj jazyk $\mathrm{pref}^{\downarrow}(L)$. Vďaka uzavretosti triedy $\mathscr{L}_{CF}$ na prienik s regulárnym jazykom potom musí byť

$$\mathrm{pref}^{\downarrow}(L) \cap a^* b a^* b a^* b \in \mathscr{L}_{CF}. \tag{1}$$

Slovo $w \in \{a, b\}^*$ ale patrí do jazyka $\mathrm{pref}^{\downarrow}(L) \cap a^* b a^* b a^* b$ práve vtedy, keď $w = a^i b a^j b a^k b$ pre nejaké $i, j, k \in \mathbb{N}$ a súčasne sú všetky prefixy tohto slova v jazyku L. Pre ľubovoľné takéto slovo w sú v L všetky jeho prefixy nekončiace písmenom b, pretože tie patria do jazyka $\{\varepsilon\} \cup \{a, b\}^* a \subseteq L$; rovnako je v L aj jeho prefix $a^i b \in a^* b \subseteq L$. Zisťujeme teda, že $w \in \mathrm{pref}^{\downarrow}(L) \cap a^* b a^* b a^* b$ práve vtedy, keď $a^i b a^j b \in L$ a zároveň $a^i b a^j b a^k b \in L$. Avšak zjavne $a^i b a^j b \in L$ práve vtedy, keď $i = j$ a $a^i b a^j b a^k b \in L$ práve vtedy, keď $j = k$.

Jazyk $\mathrm{pref}^{\downarrow}(L) \cap a^* b a^* b a^* b$ teda pozostáva z práve všetkých $w = a^i b a^j b a^k b$ takých, že $i, j, k \in \mathbb{N}$ a $i = j = k$. Preto

$$\mathrm{pref}^{\downarrow}(L) \cap a^* b a^* b a^* b = \{a^n b a^n b a^n b \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathscr{L}_{CF},$$

ako by sme ľahko dokázali napríklad pomocou pumpovacej lemy. To je spor s (1). $\square$