Riešenie druhej prémiovej úlohy

Peter Kostolányi

14. apríla 2025

Úloha 1. Zistite, či pre každú pevne danú abecedu Σ existuje algoritmus, ktorý pre ľubovoľnú dvojicu nedeterministických konečných automatov A_1, A_2 nad abecedou Σ rozhodne existenciu slova $w \in \Sigma^*$ takého, že počet akceptačných výpočtov oboch automatov na slove w je ten istý. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Redukciou Postovho korešpondenčného problému na problém zo zadania dokážeme, že *takýto algoritmus neexistuje.*

Nech $\Sigma = \{0, 1\}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ položme

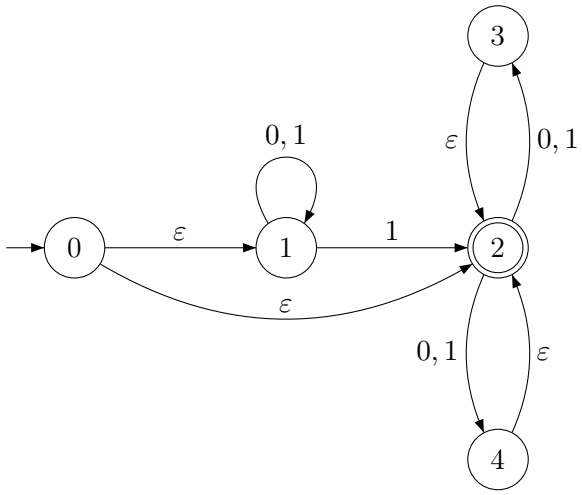
$$\mathrm{num}(a_1 \ldots a_n) := \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{n-k};$$

to znamená, že pre všetky $w \in \Sigma^*$ je $\mathrm{num}(w)$ prirodzené číslo s binárnou reprezentáciou w.

Všimnime si najprv existenciu nedeterministického konečného automatu A takého, že $L(A) = \Sigma^*$ a pre všetky $w = a_1 \ldots a_n$ s $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ existuje práve

$$\mathrm{num}(1w) = 2^n + \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{n-k}$$

akceptačných výpočtov automatu A na slove w. Takýto automat môže byť daný napríklad diagramom na obrázku 1.



Obr. 1: Nedeterministický konečný automat A, v ktorom existuje na každom slove $w \in \Sigma^*$ práve $\mathrm{num}(1w)$ akceptačných výpočtov.

Akceptačný výpočet automatu A na slove w vždy vedie zo stavu 0 do stavu 2. Takýto výpočet pritom môže byť dvoch druhov: buď sa hneď na začiatku použije prechod na ε do stavu 2, alebo sa tento výpočet začína prechodom na ε do stavu 1. Zrejme existuje presne 2^n akceptačných výpočtov prvého druhu. Pre každý z akceptačných výpočtov druhého druhu existuje práve jeden index $k \in [n]$ taký, že $a_k = 1$ a automat A prejde zo stavu 1 do stavu 2 pri čítaní k-teho bitu vstupného slova. Je zrejmé, že pre každé dané $k \in [n]$ s $a_k = 1$ je jednoznačne určený začiatok výpočtu automatu A na prefixe $a_1 \ldots a_k$, pričom existuje práve 2^{n-k} možných pokračovaní takéhoto výpočtu na sufixe $a_{k+1} \ldots a_n$. Z uvedeného teda vyplýva, že celkový počet akceptačných výpočtov automatu A na slove w je skutočne daný ako

$$2^n + \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{n-k} = \mathrm{num}(1w).$$

Nech teraz Δ je ľubovoľná abeceda a $h\colon \Delta^* \to \Sigma^*$ nevymazávajúci homomorfizmus. Nie je ťažké nahliadnuť, že v takom prípade existuje nedeterministický konečný automat A_h taký, že $L(A_h) = \Delta^*$ a počet akceptačných výpočtov automatu A_h na ľubovoľnom slove $x \in \Delta^*$ je rovný počtu akceptačných výpočtov automatu A na slove $h(x)$ – čiže $\mathrm{num}(1h(x))$.

Takýto automat A_h môže napríklad pozostávať zo stavov $0, 1, 2$ zodpovedajúcich príslušným stavom automatu A a z niekoľkých pomocných stavov; akceptačnými budú stavy 0 a 2. Pre všetky $p, q \in \{0, 1, 2\}$ a každé $d \in \Delta$ bude navyše automat A_h vedieť prejsť na písmeno d zo stavu p do stavu q práve toľkými spôsobmi, koľkými spôsobmi môže zo stavu p do stavu q prejsť automat A pri prečítaní slova $h(d)$ – to sa môže zabezpečiť napríklad príslušným počtom prechodov na d vedúcich zo stavu p do vhodných pomocných stavov, z ktorých povedú prechody na ε do stavu q.

Uvažujme teraz prípad Postovho korešpondenčného problému (Δ, f, g) a príslušné automaty A_f, A_g. Automat A_g upravme tak, aby neakceptoval slovo ε – a označme výsledný automat ako A'_g. Pre všetky $x \in \Delta^+$ potom existuje práve

$$\mathrm{num}(1f(x))$$

akceptačných výpočtov automatu A_f na slove x a práve

$$\mathrm{num}(1g(x))$$

akceptačných výpočtov automatu A'_g na slove x. Navyše existuje práve jeden akceptačný výpočet automatu A_f na slove ε a žiaden akceptačný výpočet automatu A'_g na slove ε.

Slovo $x \in \Delta^*$ také, že počet akceptačných výpočtov automatov A_f a A'_g na slove x je ten istý, potom existuje práve vtedy, keď existuje $x \in \Delta^+$ spĺňajúce

$$\mathrm{num}(1f(x)) = \mathrm{num}(1g(x)),$$

čo vďaka vedúcemu bitu 1 nastane vtedy a len vtedy, keď $f(x) = g(x)$. Existencia takéhoto slova x je ale ekvivalentná existencii riešenia prípadu (Δ, f, g). Keby sme teda vedeli rozhodovať problém zo zadania, vedeli by sme rozhodovať aj Postov korešpondenčný problém: spor. $\square$