

## Riešené úlohy: jazyky a operácie na nich

Peter Kostolányi

29. októbra 2026

Nech  $\Sigma$  je abeceda a  $L \subseteq \Sigma^*$  jazyk. *Prefixovým uzáverom* jazyka  $L$  nazveme jazyk

$$\text{pref}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : uv \in L\}.$$

**Úloha 1.** Nech  $\Sigma$  je abeceda a  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  jazyky. Porovnajte jazyky

$$\text{pref}(L_1 \cap L_2) \quad \text{a} \quad \text{pref}(L_1) \cap \text{pref}(L_2).$$

Svoje tvrdenia dokážte.

*Riešenie.* Dokážeme, že  $\text{pref}(L_1 \cap L_2) \subseteq \text{pref}(L_1) \cap \text{pref}(L_2)$ , kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

$\subseteq$ : Nech  $u \in \text{pref}(L_1 \cap L_2)$ . Existuje teda  $v \in \Sigma^*$  také, že  $uv \in L_1 \cap L_2$ . Potom  $uv \in L_1$ , z čoho  $u \in \text{pref}(L_1)$ . Súčasne  $uv \in L_2$ , a teda  $u \in \text{pref}(L_2)$ . V dôsledku toho  $u \in \text{pref}(L_1) \cap \text{pref}(L_2)$ .

$\not\subseteq$ : Nech  $L_1 = \{a\}$  a  $L_2 = \{b\}$ . Potom  $\text{pref}(L_1 \cap L_2) = \text{pref}(\emptyset) = \emptyset$ . Ďalej  $\text{pref}(L_1) = \{\varepsilon, a\}$  a  $\text{pref}(L_2) = \{\varepsilon, b\}$ , z čoho  $\text{pref}(L_1) \cap \text{pref}(L_2) = \{\varepsilon\}$ . Teda  $\varepsilon \in \text{pref}(L_1) \cap \text{pref}(L_2)$ , ale  $\varepsilon \notin \text{pref}(L_1 \cap L_2)$ .  $\square$

**Úloha 2.** Nech  $\Sigma, \Gamma$  sú abecedy,  $h: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  homomorfizmus a  $L \subseteq \Sigma^*$  jazyk. Porovnajte jazyky  $h(\text{pref}(L))$  a  $\text{pref}(h(L))$ .

*Riešenie.* Dokážeme, že  $h(\text{pref}(L)) \subseteq \text{pref}(h(L))$ , kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

$\subseteq$ : Nech  $w \in h(\text{pref}(L))$ . Potom existuje  $u \in \text{pref}(L)$  také, že  $w = h(u)$ . Keďže  $u \in \text{pref}(L)$ , pre nejaké  $v \in \Sigma^*$  musí byť  $uv \in L$ . Potom ale  $h(uv) \in h(L)$ , pričom súčasne  $h(uv) = h(u)h(v)$ . Teda  $h(u)h(v) \in h(L)$ , z čoho  $w = h(u) \in \text{pref}(h(L))$ .

$\not\subseteq$ : Uvažujme napríklad abecedy  $\Sigma = \Gamma = \{a\}$ , homomorfizmus  $h: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  daný ako  $h(a) = aa$  a jazyk  $L = \{a\}$ . Potom  $\text{pref}(L) = \{\varepsilon, a\}$  a  $h(\text{pref}(L)) = \{\varepsilon, aa\}$ . Na druhej strane  $h(L) = \{aa\}$ , a teda  $\text{pref}(h(L)) = \{\varepsilon, a, aa\}$ . Vidíme teda, že  $a \in \text{pref}(h(L))$ , ale  $a \notin h(\text{pref}(L))$ .  $\square$

Nech  $\Sigma$  je abeceda a  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  sú jazyky. Vložením jazyka  $L_2$  do jazyka  $L_1$  nazveme jazyk

$$L_1 \leftarrow L_2 = \{uxv \mid u, v \in \Sigma^*; uv \in L_1; x \in L_2\}.$$

**Úloha 3.** Nech  $\Sigma$  je abeceda a  $L_1, L'_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  sú jazyky. Porovnajte jazyky

$$(L_1 \cap L'_1) \leftarrow L_2 \quad \text{a} \quad (L_1 \leftarrow L_2) \cap (L'_1 \leftarrow L_2).$$

Svoje tvrdenia dokážte.

*Riešenie.* Dokážeme, že  $(L_1 \cap L'_1) \leftarrow L_2 \subseteq (L_1 \leftarrow L_2) \cap (L'_1 \leftarrow L_2)$ , kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

$\subseteq$ : Nech  $w \in (L_1 \cap L'_1) \leftarrow L_2$ . Potom  $w = uxy$  pre nejaké  $u, v, x \in \Sigma^*$  také, že  $uv \in L_1 \cap L'_1$  a  $x \in L_2$ . Z  $uv \in L_1 \cap L'_1$  dostávame  $uv \in L_1$  a zároveň  $uv \in L'_1$ . Keďže  $w = uxy$ , kde  $uv \in L_1$  a  $x \in L_2$ , je  $w \in L_1 \leftarrow L_2$ ; keďže navyše  $w = uxy$  pre  $uv \in L'_1$  a  $x \in L_2$ , je  $w \in L'_1 \leftarrow L_2$ . Súčasne teda  $w \in L_1 \leftarrow L_2$  a  $w \in L'_1 \leftarrow L_2$ , z čoho  $w \in (L_1 \leftarrow L_2) \cap (L'_1 \leftarrow L_2)$ .

$\not\subseteq$ : Uvažujme napríklad abecedu  $\Sigma = \{a\}$  a jazyky  $L_1 = \{\varepsilon\}$ ,  $L'_1 = \{a\}$  a  $L_2 = \{\varepsilon, a\}$ . Potom  $a \in L_1 \leftarrow L_2$ , pretože  $a = uxy$  pre  $u = \varepsilon$ ,  $x = a$  a  $v = \varepsilon$ , pričom  $uv = \varepsilon \in L_1$  a  $x = a \in L_2$ . Súčasne  $a \in L'_1 \leftarrow L_2$ , lebo  $a = uxy$  pre  $u = a$ ,  $x = \varepsilon$  a  $v = \varepsilon$ , pričom  $uv = a \in L'_1$  a  $x = \varepsilon \in L_2$ . To znamená, že  $a \in (L_1 \leftarrow L_2) \cap (L'_1 \leftarrow L_2)$ . Na druhej strane ale neexistujú žiadne  $u, x, v \in \Sigma^*$  také, že  $a = uxy$  pre  $uv \in L_1 \cap L'_1 = \emptyset$  a  $x \in L_2$  – teda  $a \notin (L_1 \cap L'_1) \leftarrow L_2$ .  $\square$

Nech  $\Sigma$  je abeceda,  $L \subseteq \Sigma^*$  jazyk a  $x \in \Sigma^*$  slovo. *Ľavým kvocientom* jazyka  $L$  slovom  $x$  nazveme jazyk

$$x \backslash L = \{w \in \Sigma^* \mid xw \in L\}$$

a *pravým kvocientom* jazyka  $L$  slovom  $x$  nazveme jazyk

$$L/x = \{w \in \Sigma^* \mid wx \in L\}.$$

Pre ľubovoľný jazyk  $L' \subseteq \Sigma^*$  ďalej nazveme *ľavým kvocientom* jazyka  $L$  jazykom  $L'$  jazyk

$$L' \backslash L = \bigcup_{x \in L'} (x \backslash L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in L' : xw \in L\}$$

a *pravým kvocientom* jazyka  $L$  jazykom  $L'$  nazveme jazyk

$$L/L' = \bigcup_{x \in L'} (L/x) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in L' : wx \in L\}.$$

**Úloha 4.** Nech  $\Sigma$  je abeceda a  $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$  jazyky. Porovnajte jazyky

$$L_1 \backslash (L_2 \cup L_3) \quad \text{a} \quad (L_1 \backslash L_2) \cup (L_1 \backslash L_3).$$

*Riešenie.* Dokážeme, že  $L_1 \backslash (L_2 \cup L_3) = (L_1 \backslash L_2) \cup (L_1 \backslash L_3)$ .

$\subseteq$ : Nech  $w \in L_1 \backslash (L_2 \cup L_3)$ . Potom existuje  $x \in L_1$ , pre ktoré je  $xw \in L_2 \cup L_3$ . To znamená, že  $xw \in L_2$  alebo  $xw \in L_3$ . Ak  $xw \in L_2$ , je  $w \in L_1 \backslash L_2$ , a teda aj  $w \in (L_1 \backslash L_2) \cup (L_1 \backslash L_3)$ . Ak  $xw \in L_3$ , je  $w \in L_1 \backslash L_3$ , a teda opäť  $w \in (L_1 \backslash L_2) \cup (L_1 \backslash L_3)$ .

$\supseteq$ : Nech  $w \in (L_1 \backslash L_2) \cup (L_1 \backslash L_3)$ . Potom  $w \in L_1 \backslash L_2$  alebo  $w \in L_1 \backslash L_3$ . Ak  $w \in L_1 \backslash L_2$ , musí existovať  $x \in L_1$  také, že  $xw \in L_2$ . Potom ale tiež  $xw \in L_2 \cup L_3$ , z čoho  $w \in L_1 \backslash (L_2 \cup L_3)$ . Podobne pre  $w \in L_1 \backslash L_3$  existuje  $x \in L_1$  také, že  $xw \in L_3$  – z toho  $xw \in L_2 \cup L_3$ , a teda  $w \in L_1 \backslash (L_2 \cup L_3)$ .  $\square$

**Úloha 5.** Nech  $\Sigma$  je abeceda a  $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$  jazyky. Porovnajete jazyky

$$(L_1 \cap L_2) \setminus L_3 \quad \text{a} \quad (L_1 \setminus L_3) \cap (L_2 \setminus L_3).$$

*Riešenie.* Dokážeme, že  $(L_1 \cap L_2) \setminus L_3 \subseteq (L_1 \setminus L_3) \cap (L_2 \setminus L_3)$ , kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

$\subseteq$ : Nech  $w \in (L_1 \cap L_2) \setminus L_3$ . Potom existuje  $x \in L_1 \cap L_2$  také, že  $xw \in L_3$ . Z príslušnosti slova  $x$  do jazyka  $L_1 \cap L_2$  dostávame  $x \in L_1$  a súčasne  $x \in L_2$ . Keďže  $x \in L_1$  a  $xw \in L_3$ , je  $w \in L_1 \setminus L_3$ ; podobne z  $x \in L_2$  a  $xw \in L_3$  vyplýva  $w \in L_2 \setminus L_3$ . Zisťujeme teda, že  $w \in L_1 \setminus L_3$  a zároveň  $w \in L_2 \setminus L_3$  – čiže  $w \in (L_1 \setminus L_3) \cap (L_2 \setminus L_3)$ .

$\not\subseteq$ : Uvažujme abecedu  $\Sigma = \{a\}$  a jazyky  $L_1 = \{\varepsilon\}$ ,  $L_2 = \{a\}$  a  $L_3 = \{\varepsilon, a\}$ . Potom

$$(L_1 \cap L_2) \setminus L_3 = \emptyset \setminus \{\varepsilon, a\} = \emptyset$$

a

$$(L_1 \setminus L_3) \cap (L_2 \setminus L_3) = \{\varepsilon, a\} \cap \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\},$$

takže  $(L_1 \cap L_2) \setminus L_3 \not\subseteq (L_1 \setminus L_3) \cap (L_2 \setminus L_3)$ . □

Nech  $\Sigma$  je abeceda a  $L \subseteq \Sigma^*$  jazyk. Ako  $\text{MAX}(L)$  potom označujeme jazyk

$$\text{MAX}(L) = \{w \in L \mid \forall x \in \Sigma^+ : wx \notin L\}$$

pozostávajúci z práve všetkých slov  $w$  z jazyka  $L$ , ktoré nie sú *vlastným* prefixom žiadneho iného slova z jazyka  $L$ .

**Úloha 6.** Nech  $\Sigma$  je abeceda a  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  jazyky. Porovnajte jazyky

$$\text{MAX}(L_1 \cup L_2) \quad \text{a} \quad \text{MAX}(L_1) \cup \text{MAX}(L_2).$$

Svoje tvrdenia dokážte.

*Riešenie.* Dokážeme, že  $\text{MAX}(L_1 \cup L_2) \subseteq \text{MAX}(L_1) \cup \text{MAX}(L_2)$ , kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

$\subseteq$ : Nech  $w \in \text{MAX}(L_1 \cup L_2)$ . Potom  $w \in L_1 \cup L_2$  a pre všetky  $x \in \Sigma^+$  je  $wx \notin L_1 \cup L_2$ . Keďže  $w \in L_1 \cup L_2$ , je  $w \in L_1$  alebo  $w \in L_2$ . Ak  $w \in L_1$ , z  $wx \notin L_1 \cup L_2$  pre všetky  $x \in \Sigma^+$  vyplýva aj  $wx \notin L_1$ , z čoho  $w \in \text{MAX}(L_1)$ , a teda aj  $w \in \text{MAX}(L_1) \cup \text{MAX}(L_2)$ . Podobne ak  $w \in L_2$ , z  $wx \notin L_1 \cup L_2$  pre všetky  $x \in \Sigma^+$  máme aj  $wx \notin L_2$ , z čoho  $w \in \text{MAX}(L_2)$ , a teda aj  $w \in \text{MAX}(L_1) \cup \text{MAX}(L_2)$ .

$\not\subseteq$ : Nech  $\Sigma = \{a\}$ ,  $L_1 = \{a\}$  a  $L_2 = \{aa\}$ . Potom  $a \in \text{MAX}(L_1)$ , z čoho  $a \in \text{MAX}(L_1) \cup \text{MAX}(L_2)$ . Na druhej strane ale  $a \notin \text{MAX}(L_1 \cup L_2) = \text{MAX}(\{a, aa\}) = \{aa\}$ .  $\square$

## Úloha 7.

- a) Nech  $\Sigma, \Gamma$  sú abecedy,  $L \subseteq \Sigma^*$  jazyk a  $h: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  homomorfizmus. Porovnajte jazyky  $h(\text{MAX}(L))$  a  $\text{MAX}(h(L))$ .
- b) Ako by sa zmenilo riešenie predchádzajúcej podúlohy, ak by sme navyše predpokladali nevymazávajúcosť homomorfizmu  $h$ ?

*Riešenie.*

- a) Dokážeme, že vo všeobecnosti *nemusí platiť ani jedna* z inklúzií  $h(\text{MAX}(L)) \subseteq \text{MAX}(h(L))$  a  $h(\text{MAX}(L)) \supseteq \text{MAX}(h(L))$ .

⊄: Uvažujme napríklad abecedy  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{a\}$ , jazyk  $L = a^*b$  a homomorfizmus  $h: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  daný ako  $h(a) = h(b) = a$ . Keďže zrejme  $\text{MAX}(L) = L$  a  $\text{MAX}(a^+) = \emptyset$ , je

$$h(\text{MAX}(L)) = h(L) = a^+$$

a

$$\text{MAX}(h(L)) = \text{MAX}(a^+) = \emptyset,$$

takže  $h(\text{MAX}(L)) \not\subseteq \text{MAX}(h(L))$ .

⊈: Uvažujme napríklad abecedy  $\Sigma = \Gamma = \{a\}$ , jazyk  $L = a^*$  a homomorfizmus  $h: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  daný ako  $h(a) = \varepsilon$ . Potom

$$h(\text{MAX}(L)) = h(\emptyset) = \emptyset$$

a

$$\text{MAX}(h(L)) = \text{MAX}(\{\varepsilon\}) = \{\varepsilon\},$$

takže  $h(\text{MAX}(L)) \not\supseteq \text{MAX}(h(L))$ .

- b) Dokážeme, že za predpokladu nevymazávajúcosťi uvažovaného homomorfizmu  $h: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  je vždy  $h(\text{MAX}(L)) \supseteq \text{MAX}(h(L))$ , kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

⊇: Homomorfizmus použitý v kontrapríklad z podúlohy a) je nevymazávajúci.

⊇: Nech  $w \in \text{MAX}(h(L))$ . Potom špeciálne  $w \in h(L)$ , a teda existuje slovo  $u \in L$  také, že  $w = h(u)$ . Neexistuje navyše žiadne  $x \in \Gamma^+$  také, že  $wx \in h(L)$ .

Uvažujme teraz slovo  $u \in L$ ; dokážeme, že v skutočnosti  $u \in \text{MAX}(L)$ . Za účelom sporu predpokladajme, že  $u \notin \text{MAX}(L)$  – existuje teda  $y \in \Sigma^+$  také, že  $uy \in L$ . Potom  $wh(y) = h(u)h(y) = h(uy) \in h(L)$ . Ak teda vezmeme  $x = h(y)$ , je  $wx \in h(L)$ , pričom z nevymazávajúcosťi homomorfizmu  $h$  vyplýva, že  $x = h(y) \in \Gamma^+$ : spor s neexistenciou takéhoto slova  $x$  pozorovanou vyššie.

Nutne teda  $u \in \text{MAX}(L)$ , z čoho  $w = h(u) \in h(\text{MAX}(L))$ . □