

Riešené úlohy: bezkontextové gramatiky

Peter Kostolányi

29. októbra 2026

Úloha 1. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk

$$L = \{a^{2i}cv \mid i \in \mathbb{N}; v \in \{a, b\}^*; |v| = i\}$$

nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$. Správnosť svojej konštrukcie dokážte poriadnou matematickou indukciou.

Riešenie. Dokážeme, že jazyk L je generovaný bezkontextovou gramatikou $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{\sigma\}$, $T = \{a, b, c\}$ a

$$P = \{\sigma \rightarrow aa\sigma a \mid aa\sigma b \mid c\}.$$

Namiesto rovnosti $L(G) = L$ dokážeme silnejšie tvrdenie $F(G) = F$, kde

$$F = \{a^{2i}sv \mid i \in \mathbb{N}; v \in \{a, b\}^*; |v| = i; s \in \{\sigma, c\}\}.$$

Zrejme pritom $F \cap T^* = L$, takže z rovnosti $F(G) = F$ naozaj vyplynie aj $L(G) = L$.

$\subseteq$: Nech $x \in F(G)$, čiže $\sigma \Rightarrow^n x$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Indukciou vzhľadom na n dokážeme, že $x \in F$.

Pre $n = 0$ je $x = \sigma = a^{2i}sv$ pre $i = 0$, $s = \sigma$ a $v = \varepsilon$, pričom v takom prípade je aj $|v| = |\varepsilon| = 0 = i$; preto $x \in F$.

Nech teraz tvrdenie platí pre $n = k$; uvažujme $n = k + 1$. Odvodenie $\sigma \Rightarrow^{k+1} x$ vieme v takom prípade prepísať ako $\sigma \Rightarrow^k y \Rightarrow x$, kde na odvodenie $\sigma \Rightarrow^k y$ sa vzťahuje indukčný predpoklad. To znamená, že $y = a^{2j}tu$ pre nejaké $j \in \mathbb{N}$, $u \in \{a, b\}^*$ také, že $|u| = j$ a $t \in \{\sigma, c\}$.

Keďže $y \Rightarrow x$, musí slovo y obsahovať aspoň jeden neterminál – nutne teda $t = \sigma$. Slovo x musí vzniknúť zo slova y použitím niektorého z pravidiel $\sigma \rightarrow aa\sigma a$, $\sigma \rightarrow aa\sigma b$ alebo $\sigma \rightarrow c$ na jediný výskyt neterminálu σ v slove y . V prvom prípade dostávame $x = a^{2j+2}\sigma au$; stačí teda vziať $i = j + 1$, $s = \sigma$, $v = au$ a zisťujeme, že $x = a^{2i}sv \in F$. Podobne v druhom prípade je $x = a^{2j+2}\sigma bu$, takže môžeme vziať $i = j + 1$, $s = \sigma$, $v = bu$ a $x = a^{2i}sv \in F$. V zostávajúcom prípade je $x = a^{2j}cu$, takže pre $i = j$, $s = c$, $v = u$ je opäť $x = a^{2i}sv \in F$.

$\supseteq$: Dokážeme, že všetky slová v jazyku F – čiže všetky slová $x = a^{2i}sv$ pre $i \in \mathbb{N}$, $v \in \{a, b\}^*$ také, že $|v| = i$ a $s \in \{\sigma, c\}$ – sú vetnými formami v gramatike G . Indukciou vzhľadom na i .

Pre $i = 0$ je buď $x = \sigma$, alebo $x = c$. Súčasne ale $\sigma \Rightarrow^0 \sigma$ a vďaka existencii pravidla $\sigma \rightarrow c$ aj $\sigma \Rightarrow c$; v oboch prípadoch teda $x \in F(G)$.

Nech teraz tvrdenie platí pre $i = k$; uvažujme $i = k + 1$ a ľubovoľné $x = a^{2(k+1)}sv$ pre $v \in \{a, b\}^*$ také, že $|v| = k + 1$ a $s \in \{\sigma, c\}$. Nech $v = du$ pre nejaké $d \in \{a, b\}$ a $u \in \{a, b\}^k$. Z indukčného predpokladu potom $\sigma \Rightarrow^* a^{2k}\sigma u$, z čoho použitím pravidla $\sigma \rightarrow aa\sigma d \in P$ dostávame

$$\sigma \Rightarrow^* a^{2k}\sigma u \Rightarrow a^{2k}aa\sigma du = a^{2(k+1)}\sigma v.$$

Indukčný krok je teda už dokázaný v prípade, že $s = \sigma$. Pre $s = c$ napokon použitím pravidla $\sigma \rightarrow c$ z uvedeného dostávame

$$\sigma \Rightarrow^* a^{2(k+1)}\sigma v \Rightarrow a^{2(k+1)}cv,$$

takže naozaj $x \in F(G)$. □

Úloha 2. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk

$$L = \{a^{i+j}ba^i ba^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

(nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$). Správnosť svojej konštrukcie dokážte poriadnou matematickou indukciou.

Riešenie. Dokážeme, že $L = L(G)$ pre gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{\sigma, \alpha\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$P = \{\sigma \rightarrow a\sigma a \mid \alpha b \\ \alpha \rightarrow a\alpha a \mid b\}.$$

Ukážeme, že slovo $x \in (N \cup T)^*$ je vetnou formou gramatiky G práve vtedy, keď patrí do jazyka F obsahujúceho práve

(i) všetky slová $a^j \sigma a^j$, kde $j \in \mathbb{N}$

(ii) a všetky slová $a^{i+j} s a^i b a^j$, kde $i, j \in \mathbb{N}$ a $s \in \{\alpha, b\}$.

Keďže evidentne $F \cap T^* = L$, vyplynie z tohto pozorovania aj rovnosť $L(G) = L$.

$\subseteq$: Nech $x \in (N \cup T)^*$ je vetnou formou gramatiky G – pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ teda $\sigma \Rightarrow^n x$. Indukciou vzhľadom na n dokážeme, že $x \in F$.

Pre $n = 0$ je $x = \sigma$, čo je slovo tvaru (i). Predpokladajme teda platnosť tvrdenia pre $n = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme $n = k + 1$. Ak $\sigma \Rightarrow^{k+1} x$, musí existovať slovo $y \in (N \cup T)^*$ také, že $\sigma \Rightarrow^k y \Rightarrow x$. Z indukčného predpokladu potom vyplýva, že slovo y je tvaru (i) alebo (ii).

Ak $y = a^j \sigma a^j$ pre nejaké $j \in \mathbb{N}$, vyplýva zo vzťahu $y \Rightarrow x$, že slovo x musí vzniknúť z y použitím niektorého z pravidiel $\sigma \rightarrow a\sigma a$ alebo $\sigma \rightarrow \alpha b$ na jediný výskyt neterminálu σ v slove y . V prípade použitia pravidla $\sigma \rightarrow a\sigma a$ je $x = a^{j+1} \sigma a^{j+1}$, čo je slovo tvaru (i). Pre pravidlo $\sigma \rightarrow \alpha b$ je $x = a^j \alpha b a^j = a^{0+j} \alpha a^0 b a^j$, čo je slovo tvaru (ii). V oboch prípadoch teda $x \in F$.

Ak $y = a^{i+j} s a^i b a^j$ pre $i, j \in \mathbb{N}$ a $s \in \{\alpha, b\}$, môže $y \Rightarrow x$ platiť iba v prípade, že $s = \alpha$; slovo x ďalej musí vzniknúť z y použitím pravidla $\alpha \rightarrow a\alpha a$ alebo $\alpha \rightarrow b$ na tento jediný výskyt neterminálu α . Pre prvé z týchto pravidiel dostávame $x = a^{i+j} a \alpha a a^i b a^j = a^{(i+1)+j} \alpha a^{i+1} b a^j$, čo je slovo tvaru (ii); pre druhé z nich je $x = a^{i+j} b a^i b a^j$, čo je opäť slovo tvaru (ii). Aj tu teda nutne $x \in F$.

$\supseteq$: Indukciou na j najprv dokážeme, že sú v gramatike G odvoditeľné všetky slová $a^j \sigma a^j$ pre $j \in \mathbb{N}$. Pre $j = 0$ je triviálne $\sigma \Rightarrow^* \sigma = a^0 \sigma a^0$. Predpokladajme teda platnosť tvrdenia pre $j = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme $j = k + 1$. Z indukčného predpokladu potom $\sigma \Rightarrow^* a^k \sigma a^k \Rightarrow a^{k+1} \sigma a^{k+1}$, kde v poslednom kroku odvodenia sme použili pravidlo $\sigma \rightarrow a\sigma a$.

Indukciou na i teraz dokážme, že pre všetky $i, j \in \mathbb{N}$ je v gramatike G odvoditeľné slovo $a^{i+j} \alpha a^i b a^j$. Pre $i = 0$ z dokázaného dostávame $\sigma \Rightarrow^* a^j \sigma a^j \Rightarrow a^j \alpha b a^j = a^{0+j} \alpha a^0 b a^j$; v poslednom kroku odvodenia sme tu použili pravidlo $\sigma \rightarrow \alpha b$. Nech teda tvrdenie platí pre $i = k \in \mathbb{N}$ a uvažujme $i = k + 1$. Z indukčného predpokladu potom $\sigma \Rightarrow^* a^{k+j} \alpha a^k b a^j \Rightarrow a^{(k+1)+j} \alpha a^{k+1} b a^j$, kde v poslednom kroku odvodenia sme použili pravidlo $\alpha \rightarrow a\alpha a$.

Zostáva dokázať, že sú v gramatike G odvoditeľné aj všetky slová $a^{i+j} b a^i b a^j$ pre $i, j \in \mathbb{N}$. Z dokázaného ale $\sigma \Rightarrow^* a^{i+j} \alpha a^i b a^j \Rightarrow a^{i+j} b a^i b a^j$, kde v poslednom kroku sme použili pravidlo $\alpha \rightarrow b$. $\square$

Úloha 3. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk

$$L = \{uca^i cb^j cv \mid u, v \in \{a, b\}^*; i, j \in \mathbb{N}; \#_a(u) = i; \#_b(v) = j\}$$

(nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$). Správnosť svojej konštrukcie dokážte poriadnou matematickou indukciou.

Riešenie. Dokážeme, že jazyk L je generovaný bezkontextovou gramatikou $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b, c\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{ & \sigma \rightarrow \alpha c \beta \\ & \alpha \rightarrow a \alpha a \mid b \alpha \mid c \\ & \beta \rightarrow b \beta b \mid \beta a \mid c \}. \end{aligned}$$

Namiesto rovnosti $L(G) = L$ dokážeme silnejšie tvrdenie $F(G) = F$, kde jazyk F je daný ako

$$F = \{\sigma\} \cup \{usa^i cb^j tv \mid u, v \in \{a, b\}^*; i, j \in \mathbb{N}; s \in \{\alpha, c\}; t \in \{\beta, c\}; \#_a(u) = i; \#_b(v) = j\}.$$

Zrejme $F \cap T^* = L$, takže z rovnosti $F(G) = F$ naozaj vyplynie aj $L(G) = L$.

$\subseteq$: Nech $x \in F(G)$, čiže $\sigma \Rightarrow^n x$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Indukciou vzhľadom na n dokážeme, že $x \in F$.

Pre $n = 0$ je $x = \sigma$, a teda $x \in F$. Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre $n = k$ a uvažujme $n = k + 1$. Nech $\sigma \Rightarrow^{k+1} x$. Pre nejaké $y \in (N \cup T)^*$ potom $\sigma \Rightarrow^k y \Rightarrow x$, pričom na odvodenie $\sigma \Rightarrow^k y$ sa vzťahuje indukčný predpoklad. To znamená, že $y \in F$.

Ak $y = \sigma$, musí slovo x vzniknúť zo slova y použitím pravidla $\sigma \rightarrow \alpha c \beta$, a teda $x = \alpha c \beta \in F$.

V opačnom prípade $y = usa^i cb^j tv$ pre nejaké $i, j \in \mathbb{N}$, $s \in \{\alpha, c\}$, $t \in \{\beta, c\}$ a $u, v \in \{a, b\}^*$ také, že $\#_a(u) = i$ a $\#_b(v) = j$. Keďže $y \Rightarrow x$, musí nastať jedna z dvoch nasledujúcich situácií:

- Je $s = \alpha$ a slovo x vznikne zo slova y použitím niektorého z pravidiel na jediný výskyt neterminálu α v slove y . V prípade, že ide o pravidlo $\alpha \rightarrow a \alpha a$, je $x = ua \alpha a^{i+1} cb^j tv$, pričom $\#_a(ua) = \#_a(u) + 1 = i + 1$ a $\#_b(v) = j$; to znamená, že $x \in F$. V prípade použitia pravidla $\alpha \rightarrow b \alpha$ je $x = ub \alpha a^i cb^j tv$, pričom $\#_a(ub) = \#_a(u) = i$ a $\#_b(v) = j$; opäť teda $x \in F$. Použitím pravidla $\alpha \rightarrow c$ napokon dostaneme $x = uca^i cb^j tv$, kde $\#_a(u) = i$ a $\#_b(v) = j$ – čiže takisto $x \in F$.
- Je $t = \beta$ a slovo x vznikne zo slova y použitím niektorého pravidla na jediný výskyt neterminálu β v slove y . V prípade použitia pravidla $\beta \rightarrow b \beta b$ je $x = usa^i cb^{j+1} \beta bv$, pričom $\#_a(u) = i$ a $\#_b(bv) = \#_b(v) + 1 = j + 1$; v dôsledku toho $x \in F$. Použitím pravidla $\beta \rightarrow \beta a$ dostávame $x = usa^i cb^j \beta av$, pričom $\#_a(u) = i$ a $\#_b(av) = \#_b(v) = j$ – opäť teda $x \in F$. Pri použití pravidla $\beta \rightarrow c$ napokon dostávame $x = usa^i cb^j cv$, kde $\#_a(u) = i$ a $\#_b(v) = j$ a aj v tomto prípade zisťujeme, že $x \in F$.

$\supseteq$: Dokážeme, že všetky slová x v jazyku F sú vetnými formami v gramatike G .

Ak $x = \sigma$, je $\sigma \Rightarrow^0 \sigma = x$, a teda aj $\sigma \Rightarrow^* x$.

Indukciou vzhľadom na i ďalej dokážme, že pre všetky $i \in \mathbb{N}$ sú vetnými formami v G všetky slová $x = u \alpha a^i c \beta$, kde $i \in \mathbb{N}$ a $u \in \{a, b\}^*$ je slovo také, že $\#_a(u) = i$. Pre $i = 0$ je $x = b^\ell \alpha c \beta$ pre nejaké $\ell \in \mathbb{N}$ a indukciou vzhľadom na ℓ ľahko dokážeme, že $\sigma \Rightarrow^* x$: pre $\ell = 0$ je $\sigma \Rightarrow \alpha c \beta = x$; ak ďalej predpokladáme platnosť tvrdenia pre $\ell = m$, pre $\ell = m + 1$ z indukčného predpokladu dostávame $\sigma \Rightarrow^* b^m \alpha c \beta \Rightarrow b^{m+1} \alpha c \beta = x$, kde v poslednom kroku sme použili pravidlo $\alpha \rightarrow b \alpha$. Predpokladajme teraz, že dokazované tvrdenie platí pre $i = k$ a uvažujme $i = k + 1$. V takom prípade je $x = u \alpha a^{k+1} c \beta$, kde $u \in \{a, b\}^*$ je také, že $\#_a(u) = k + 1$. Nutne potom $u = u' a b^\ell$ pre nejaké $\ell \in \mathbb{N}$ a $u' \in \{a, b\}^*$ také, že $\#_a(u') = k$. Z indukčného predpokladu dostávame $\sigma \Rightarrow^* u' \alpha a^k c \beta$ a indukciou vzhľadom na ℓ tak môžeme dokázať $\sigma \Rightarrow^* u' a b^\ell \alpha a^{k+1} c \beta = x$. Pre $\ell = 0$ z dokázaného skutočne vyplýva $\sigma \Rightarrow^* u' \alpha a^k c \beta \Rightarrow u' a \alpha a^{k+1} c \beta$, kde v poslednom kroku bolo použité pravidlo $\alpha \rightarrow a \alpha a$; ak ďalej

pre $\ell = m$ je $\sigma \Rightarrow^* u'ab^m\alpha a^{k+1}c\beta$, tak aj pre $\ell = m + 1$ použitím pravidla $\alpha \rightarrow b\alpha$ dostávame $\sigma \Rightarrow^* u'ab^m\alpha a^{k+1}c\beta \Rightarrow u'ab^{m+1}\alpha a^{k+1}c\beta$.

Indukciou vzhľadom na j teraz dokážme, že pre všetky $i, j \in \mathbb{N}$ a všetky slová $u, v \in \{a, b\}^*$ spĺňajúce $\#_a(u) = i$ a $\#_b(v) = j$ je slovo $x = u\alpha a^i cb^j \beta v$ vetnou formou v G . Pre $j = 0$ je $x = u\alpha a^i c\beta a^\ell$ pre nejaké $i \in \mathbb{N}$, $u \in \{a, b\}^*$ s $\#_a(u) = i$ a $\ell \in \mathbb{N}$; indukciou vzhľadom na ℓ dokážeme, že $\sigma \Rightarrow^* x$. Pre $\ell = 0$ už máme dokázané $\sigma \Rightarrow^* u\alpha a^i c\beta$; ak teraz predpokladáme platnosť tvrdenia pre $\ell = m$, pre $\ell = m + 1$ z indukčného predpokladu dostávame $\sigma \Rightarrow^* u\alpha a^i c\beta a^m \Rightarrow u\alpha a^i c\beta a^{m+1}$, kde v poslednom kroku bolo použité pravidlo $\beta \rightarrow \beta a$. Nech teraz dokazované tvrdenie platí pre $j = k$; uvažujme $j = k + 1$. Nech $x = u\alpha a^i cb^{k+1} \beta v$ pre nejaké $v \in \{a, b\}^*$ také, že $\#_b(v) = k + 1$. Potom $v = a^\ell b v'$ pre nejaké $\ell \in \mathbb{N}$ a $v' \in \{a, b\}^*$ také, že $\#_b(v') = k$. Z indukčného predpokladu potom $\sigma \Rightarrow^* u\alpha a^i cb^k \beta v'$ a indukciou vzhľadom na ℓ môžeme dokázať aj $\sigma \Rightarrow^* x$: pre $\ell = 0$ je $\sigma \Rightarrow^* u\alpha a^i cb^k \beta v' \Rightarrow u\alpha a^i cb^{k+1} \beta b v' = x$, kde v poslednom kroku bolo použité pravidlo $\beta \rightarrow b\beta b$; ak tvrdenie platí pre $\ell = m$, pre $\ell = m + 1$ z indukčného predpokladu dostávame $\sigma \Rightarrow^* u\alpha a^i cb^{k+1} \beta a^m b v' \Rightarrow u\alpha a^i cb^{k+1} \beta a^{m+1} b v' = x$, kde v poslednom kroku bolo použité pravidlo $\beta \rightarrow \beta a$.

Pre všetky $i, j \in \mathbb{N}$ a $u, v \in \{a, b\}^*$ s $\#_a(u) = i$ a $\#_b(v) = j$ napokon s použitím dokázaného a pravidiel $\alpha \rightarrow c$ resp. $\beta \rightarrow c$ dostávame

$$\begin{aligned}\sigma &\Rightarrow^* u\alpha a^i cb^j \beta v \Rightarrow uca^i cb^j \beta v, \\ \sigma &\Rightarrow^* u\alpha a^i cb^j \beta v \Rightarrow u\alpha a^i cb^j cv, \\ \sigma &\Rightarrow^* u\alpha a^i cb^j \beta v \Rightarrow uca^i cb^j \beta v \Rightarrow uca^i cb^j cv,\end{aligned}$$

takže všetky slová z jazyka F sú skutočne vetnými formami v gramatike G . □

Úloha 4. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{ & \sigma \rightarrow a\alpha b\beta \mid b\gamma \mid \gamma\gamma \\ & \alpha \rightarrow \beta b \mid \varepsilon \\ & \beta \rightarrow a\beta \mid \beta\beta \\ & \gamma \rightarrow a\gamma \mid b\}. \end{aligned}$$

Preveďte gramatiku G do redukovaného normálneho tvaru. Ekvivalenciu výslednej gramatiky s pôvodnou netreba dokazovať v prípade použitia štandardnej konštrukcie; pri použití akejkoľvek inej konštrukcie je dôkaz jej správnosti nutný.

Riešenie. Gramatika G neobsahuje žiadne pravidlo $\xi \rightarrow \xi$ pre $\xi \in N$. Môžeme preto pristúpiť k nájdaniu množiny „terminujúcich“ neterminálov S :

1. $S_0 = \{\alpha, \gamma\}$,
2. $S_1 = S_0 \cup \{\sigma, \alpha, \gamma\} = \{\sigma, \alpha, \gamma\}$,
3. $S_2 = S_1 \cup \{\sigma, \alpha, \gamma\} = \{\sigma, \alpha, \gamma\} = S_1$.

Máme teda $S = S_2 = \{\sigma, \alpha, \gamma\}$. Po odstránení „neterminujúcich“ neterminálov (v tomto prípade iba β) a pravidiel, ktoré ich obsahujú, dostávame gramatiku s prepisovacími pravidlami

$$\begin{aligned} & \sigma \rightarrow b\gamma \mid \gamma\gamma \\ & \alpha \rightarrow \varepsilon \\ & \gamma \rightarrow a\gamma \mid b. \end{aligned}$$

Nájdeme teraz množinu dosiahnuteľných neterminálov H :

1. $H_0 = \{\sigma\}$,
2. $H_1 = H_0 \cup \{\gamma\} = \{\sigma, \gamma\}$,
3. $H_2 = H_1 \cup \{\gamma\} = \{\sigma, \gamma\} = H_1$.

Teda $H = H_2 = \{\sigma, \gamma\}$. Po odstránení nedosiahnuteľných neterminálov (v tomto prípade iba α) dostávame gramatiku $G' = (N', T', P', \sigma')$ s $N' = \{\sigma, \gamma\}$, $T' = \{a, b\}$, $\sigma' = \sigma$ a

$$\begin{aligned} P = \{ & \sigma \rightarrow b\gamma \mid \gamma\gamma \\ & \gamma \rightarrow a\gamma \mid b\}. \end{aligned}$$

Gramatika G' je v redukovanom normálnom tvare. □

Úloha 5. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$P = \{\sigma \rightarrow aa\sigma\beta \mid b\alpha \mid \alpha \\ \alpha \rightarrow \alpha a\alpha \mid aa \\ \beta \rightarrow \beta\beta \mid \varepsilon\}.$$

Preveďte gramatiku G do Chomského normálneho tvaru. Ekvivalenciu výslednej gramatiky s pôvodnou netreba dokazovať v prípade použitia štandardnej konštrukcie; pri použití akejkoľvek inej konštrukcie je dôkaz jej správnosti nutný.

Riešenie. Pre všetky $c \in T$ zaveďme nový neterminál ξ_c a pravidlo $\xi_c \rightarrow c$; následne nahraďme všetky terminály c na pravých stranách pôvodných pravidiel neterminálom ξ_c . Po tejto transformácii dostaneme gramatiku s pravidlami

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \xi_a \xi_a \sigma \beta \mid \xi_b \alpha \mid \alpha, \\ \alpha &\rightarrow \alpha \xi_a \alpha \mid \xi_a \xi_a, \\ \beta &\rightarrow \beta \beta \mid \varepsilon, \\ \xi_a &\rightarrow a, \\ \xi_b &\rightarrow b. \end{aligned}$$

Zaveďme ďalej nový neterminál ξ_ε s pravidlom $\xi_\varepsilon \rightarrow \varepsilon$ a predĺžme neterminálom ξ_ε „príliš krátku“ pravú stranu pravidla $\sigma \rightarrow \alpha$. Získame tak gramatiku s pravidlami

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \xi_a \xi_a \sigma \beta \mid \xi_b \alpha \mid \alpha \xi_\varepsilon, \\ \alpha &\rightarrow \alpha \xi_a \alpha \mid \xi_a \xi_a, \\ \beta &\rightarrow \beta \beta \mid \varepsilon, \\ \xi_a &\rightarrow a, \\ \xi_b &\rightarrow b, \\ \xi_\varepsilon &\rightarrow \varepsilon. \end{aligned}$$

Zaveďme napokon označenia

$$\begin{aligned} \pi_1 &:= (\sigma \rightarrow \xi_a \xi_a \sigma \beta), \\ \pi_2 &:= (\alpha \rightarrow \alpha \xi_a \alpha) \end{aligned}$$

a „rozbíme“ príliš dlhé pravé strany týchto dvoch pravidiel pomocou nových neterminálov, čím dostaneme bezkontextovú gramatiku $G' = (N', T, P', \sigma)$ s $N' = \{\sigma, \alpha, \beta, \xi_a, \xi_b, \xi_\varepsilon, \psi_{\pi_1,1}, \psi_{\pi_1,2}, \psi_{\pi_2,1}\}$ a

$$\begin{aligned} P' &= \{\sigma \rightarrow \xi_a \psi_{\pi_1,1} \mid \xi_b \alpha \mid \alpha \xi_\varepsilon \\ &\quad \alpha \rightarrow \alpha \psi_{\pi_2,1} \mid \xi_a \xi_a \\ &\quad \beta \rightarrow \beta \beta \mid \varepsilon, \\ &\quad \psi_{\pi_1,1} \rightarrow \xi_a \psi_{\pi_1,2} \\ &\quad \psi_{\pi_1,2} \rightarrow \sigma \beta \\ &\quad \psi_{\pi_2,1} \rightarrow \xi_a \alpha \\ &\quad \xi_a \rightarrow a \\ &\quad \xi_b \rightarrow b \\ &\quad \xi_\varepsilon \rightarrow \varepsilon\}. \end{aligned}$$

□

Úloha 6. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{ & \sigma \rightarrow \alpha\beta a\beta \mid \alpha\beta \mid ab\gamma \\ & \alpha \rightarrow a\beta\beta \mid b\sigma b\gamma \mid a \\ & \beta \rightarrow a\beta \mid \varepsilon \\ & \gamma \rightarrow b\beta\beta \mid \beta\beta \mid a\}. \end{aligned}$$

Preveďte gramatiku G do „bezepsilónového“ normálneho tvaru. Ekvivalenciu výslednej gramatiky s pôvodnou netreba dokazovať v prípade použitia štandardnej konštrukcie; pri použití akejkoľvek inej konštrukcie je dôkaz jej správnosti nutný.

Riešenie. Nájdeme najprv množinu vymazávajúcich neterminálov E :

1. $E_0 = \{\beta\}$,
2. $E_1 = E_0 \cup \{\beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma\}$,
3. $E_2 = E_1 \cup \{\beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma\} = E_1$.

Teda $E = E_2 = \{\beta, \gamma\}$. Z pravidiel gramatiky G následne získame nasledujúce nové pravidlá:

$$\begin{array}{lll} \sigma \rightarrow \alpha\beta a\beta & \rightsquigarrow & \sigma \rightarrow \alpha\beta a\beta \mid \alpha\beta a \mid \alpha a\beta \mid \alpha a, \\ \sigma \rightarrow \alpha\beta & \rightsquigarrow & \sigma \rightarrow \alpha\beta \mid \alpha, \\ \sigma \rightarrow ab\gamma & \rightsquigarrow & \sigma \rightarrow ab\gamma \mid ab, \\ \alpha \rightarrow a\beta\beta & \rightsquigarrow & \alpha \rightarrow a\beta\beta \mid a\beta \mid a, \\ \alpha \rightarrow b\sigma b\gamma & \rightsquigarrow & \alpha \rightarrow b\sigma b\gamma \mid b\sigma b, \\ \alpha \rightarrow a & \rightsquigarrow & \alpha \rightarrow a, \\ \beta \rightarrow a\beta & \rightsquigarrow & \beta \rightarrow a\beta \mid a, \\ \beta \rightarrow \varepsilon & \rightsquigarrow & \beta \rightarrow \varepsilon, \\ \gamma \rightarrow b\beta\beta & \rightsquigarrow & \gamma \rightarrow b\beta\beta \mid b\beta \mid b, \\ \gamma \rightarrow \beta\beta & \rightsquigarrow & \gamma \rightarrow \beta\beta \mid \beta \mid \varepsilon, \\ \gamma \rightarrow a & \rightsquigarrow & \gamma \rightarrow a. \end{array}$$

Po odstránení duplikátov a pravidiel s prázdnyim slovom na pravej strane tak dostávame výslednú gramatiku $G' = (N, T, P', \sigma)$ s

$$\begin{aligned} P' = \{ & \sigma \rightarrow \alpha\beta a\beta \mid \alpha\beta a \mid \alpha a\beta \mid \alpha a \mid \alpha\beta \mid \alpha \mid ab\gamma \mid ab \\ & \alpha \rightarrow a\beta\beta \mid a\beta \mid a \mid b\sigma b\gamma \mid b\sigma b \\ & \beta \rightarrow a\beta \mid a \\ & \gamma \rightarrow b\beta\beta \mid b\beta \mid b \mid \beta\beta \mid \beta \mid a\}. \end{aligned}$$

□