

Sada úloh na cvičenie č. 2

Všetky vyslovené tvrdenia, ktoré nie sú známe z prednášky, je potrebné formálne dokázať.

- Nájdite jazyk $\{\varepsilon, a, ab\}^R \cdot \{\varepsilon, b\}^2$ – zapíšte ho ako množinu *vymenovaním všetkých prvkov*.
- Zistite, či platia nasledujúce rovnosti medzi jazykmi:
 - $\{a, b\}^* = \{u \in \{a, b\}^* \mid u = u^R\}^*$,
 - $\{a, b\}^* = \{u \in \{a, b\}^* \mid u \neq u^R\}^*$,
 - $\{a, b\}^* = \{uv \mid u, v \in \{a, b\}^*; u = u^R\}$.
- Nech L je jazyk. Nájdite (vzhľadom na množinovú inklúziu) *najmenší* jazyk L' s nasledujúcimi vlastnosťami:
 - $L \subseteq L'$,
 - ak $u, v \in L'$, tak aj $uv \in L'$.(Pod „nájdenním“ jazyka L' rozumieme jeho vyjadrenie v bežnej množinovej notácii s prípadným použitím operácií na jazykoch známych z prednášky.)

V nasledujúcich úlohách sa pod porovnaním dvojice jazykov vždy myslí overenie *obidvoch* inklúzií \subseteq a \supseteq ; nestačí sa teda len napríklad uspokojiť s konštatovaním, že sa daná dvojica jazykov nemusí rovnať. Toto overenie je pritom potrebné urobiť *vo všeobecnosti* – cieľom je zistiť, či inklúzie platia *pre všetky* jazyky L (úlohy 4 a 5) resp. *pre všetky* dvojice jazykov L_1, L_2 (úlohy 6 až 9). Na dôkaz niektorej z inklúzií teda nemožno o týchto jazykoch predpokladať nič špeciálne. Na vyvrátenie inklúzie naopak stačí nájsť konkrétne príklady jazykov, pre ktoré inklúzia nie je splnená.

- Nech L je jazyk. Porovnajte jazyky L^+ a $L^* - \{\varepsilon\}$.
- Nech L je jazyk. Porovnajte jazyky L^* a $(L^*)^*$.
- Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajte jazyky $(L_1 \cap L_2)^*$ a $L_1^* \cap L_2^*$.
- Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajte jazyky $(L_1 \cdot L_2)^*$ a $L_1^* \cdot L_2^*$.
- Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajte jazyky $(L_1 \cdot L_2)^*$ a $\{\varepsilon\} \cup L_1 \cdot (L_2 \cdot L_1)^* \cdot L_2$.
- Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajte jazyky $(L_1 \cup L_2)^R$ a $L_1^R \cup L_2^R$.

Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk nad abecedou Σ . *Komutatívnym uzáverom* jazyka L nazveme jazyk

$$[L] = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in L \forall c \in \Sigma : \#_c(u) = \#_c(v)\}.$$

Jazyk $[L]$ tak obsahuje všetky slová u nad abecedou Σ , z ktorých možno vhodným „poprehadzovaním“ písmen získať nejaké slovo v z jazyka L . Keby sme teda písmenám dovolili navzájom komutovať a slová líšiace sa iba poradím písmen by sme považovali za ekvivalentné, pozostával by jazyk $[L]$ z práve všetkých slov ekvivalentných niektorému slovu z L . Odtiaľ pomenovanie „komutatívny uzáver“.

- Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajte jazyky $[L_1 \cup L_2]$ a $[L_1] \cup [L_2]$.