Sada úloh na cvičenie č. 3

Všetky vyslovené tvrdenia, ktoré nie sú známe z prednášky, je potrebné formálne dokázať.

1. Nech $\Sigma = \{a, b\}$ a $h\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ je homomorfizmus daný ako $h(a) = ab$ a $h(b) = a$. Uvažujme jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$. Nájdite jazyky $h^{-1}(L)$ a $h(h^{-1}(L))$ – vyjadrite ich pomocou množinovej notácie bez použitia homomorfizmov.

2. Nech Σ, Γ sú abecedy a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ homomorfizmus. Minule sme videli, že pre všetky $L \subseteq \Gamma^*$ je $h(h^{-1}(L)) \subseteq L$ a pre všetky $L \subseteq \Sigma^*$ je $h^{-1}(h(L)) \supseteq L$, kým opačné inklúzie vo všeobecnosti neplatia. Charakterizujte homomorfizmy $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ také, že pre všetky jazyky $L \subseteq \Gamma^*$ je $h(h^{-1}(L)) = L$ a homomorfizmy $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ také, že pre všetky $L \subseteq \Sigma^*$ je $h^{-1}(h(L)) = L$.

3. Nech Σ, Γ sú abecedy, $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jazyky a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ homomorfizmus. Porovnajte jazyky $h(L_1 \cap L_2)$ a $h(L_1) \cap h(L_2)$.

4. Nech Σ, Γ sú abecedy, $L \subseteq \Sigma^*$ jazyk a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ homomorfizmus. Porovnajte jazyky $h(L^*)$ a $(h(L))^*$.

5. Nech Σ, Γ sú abecedy, $L_1, L_2 \subseteq \Gamma^*$ jazyky a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ homomorfizmus. Porovnajte jazyky $h^{-1}(L_1 \cup L_2)$ a $h^{-1}(L_1) \cup h^{-1}(L_2)$.

6. Nech Σ, Γ sú abecedy, $L_1, L_2 \subseteq \Gamma^*$ jazyky a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ homomorfizmus. Porovnajte jazyky $h^{-1}(L_1 \cap L_2)$ a $h^{-1}(L_1) \cap h^{-1}(L_2)$.

7. Nech Σ, Γ sú abecedy, $L \subseteq \Gamma^*$ jazyk a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ homomorfizmus. Porovnajte jazyky $h^{-1}(L^*)$ a $(h^{-1}(L))^*$.

Operácia „*shuffle*“ je pre ľubovoľnú dvojicu slov $u, v \in \Sigma^*$ definovaná nasledovne:

$$u \sqcup\!\sqcup\, v = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots u_n v_n \mid n \in \mathbb{N};\ u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \Sigma^*;\ u = u_1 \ldots u_n;\ v = v_1 \ldots v_n\}.$$

Symbol $u \sqcup\!\sqcup\, v$ teda označuje *jazyk* všetkých možných „premiešaní“ slov u a v zachovávajúcich relatívne poradie symbolov v slovách u, v: pre ľubovoľné faktorizácie $u = u_1 u_2 \ldots u_n$, $v = v_1 v_2 \ldots v_n$ slov u a v, kde $u_1, \ldots, u_n$ a $v_1, \ldots, v_n$ sú *slová*, patrí slovo $u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots u_n v_n$ do jazyka $u \sqcup\!\sqcup\, v$. Niektoré z podslov u_i resp. v_i pritom môžu byť aj prázdne. Napríklad teda $aa \sqcup\!\sqcup\, bb = \{aabb, abab, baab, abba, baba, bbaa\}$ a $abc \sqcup\!\sqcup\, d = \{abcd, abdc, adbc, dabc\}$.

Uvedenú operáciu na slovách možno prirodzeným spôsobom rozšíriť aj na „shuffle“ jazykov:

$$L_1 \sqcup\!\sqcup\, L_2 = \bigcup_{\substack{u \in L_1 \\ v \in L_2}} u \sqcup\!\sqcup\, v,$$

čo možno ekvivalentne zapísať ako

$$L_1 \sqcup\!\sqcup\, L_2 = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots u_n v_n \mid n \in \mathbb{N};\ u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \Sigma^*;\ u_1 \ldots u_n \in L_1;\ v_1 \ldots v_n \in L_2\}.$$

Do jazyka $L_1 \sqcup\!\sqcup\, L_2$ teda patria všetky možné „premiešania“ slov u a v, kde $u \in L_1$ a $v \in L_2$.

8. Nech Σ, Γ sú abecedy, $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jazyky a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ homomorfizmus. Porovnajte jazyky $h(L_1 \sqcup\!\sqcup\, L_2)$ a $h(L_1) \sqcup\!\sqcup\, h(L_2)$.

9. Nech Σ, Γ sú abecedy, $L_1, L_2 \subseteq \Gamma^*$ jazyky a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ homomorfizmus. Porovnajte jazyky $h^{-1}(L_1 \sqcup\!\sqcup\, L_2)$ a $h^{-1}(L_1) \sqcup\!\sqcup\, h^{-1}(L_2)$.

Zobrazenie $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ nazveme *antihomomorfizmom*, ak pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ platí $f(uv) = f(v)f(u)$.

10. Nech je daná abeceda Σ.
    a) Zistite, či je antihomomorfizmom identické zobrazenie $\mathrm{id}\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ dané pre všetky $w \in \Sigma^*$ ako $\mathrm{id}(w) = w$.
    b) Zistite, či je antihomomorfizmom zobrazenie $\mathrm{r}\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ dané pre všetky $w \in \Sigma^*$ predpisom $\mathrm{r}(w) = w^R$.
    c) Zistite, či existuje homomorfizmus $h\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, ktorý je súčasne aj antihomomorfizmom.
11. Nech Σ, Γ sú abecedy, $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ antihomomorfizmus a $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jazyky. Porovnajte jazyky $f(L_1 \cdot L_2)$ a $f(L_2) \cdot f(L_1)$.