# Sada úloh na cvičenie č. 4

Všetky vyslovené tvrdenia, ktoré nie sú známe z prednášky, je potrebné formálne dokázať.

1. Zistite, ktoré z tvrdení sú pravdivé pre *ľubovoľnú* bezkontextovú gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$, ktoré pre *aspoň jednu* a ktoré pre *žiadnu* takúto gramatiku:

   a) $\sigma \Rightarrow_G^0 \sigma$, c) $\sigma \Rightarrow_G^* \sigma$, e) $\varepsilon \Rightarrow_G^0 \varepsilon$, g) $\varepsilon \Rightarrow_G^* \varepsilon$,

   b) $\sigma \Rightarrow_G \sigma$, d) $\sigma \Rightarrow_G^+ \sigma$, f) $\varepsilon \Rightarrow_G \varepsilon$, h) $\varepsilon \Rightarrow_G^+ \varepsilon$.

2. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk $L = \{a^i b^i c^j d^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ a dokážte správnosť svojej konštrukcie.

3. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk $L = \{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^*;\ |u| = |v|\}$ a dokážte správnosť svojej konštrukcie.

4. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \leq \#_b(w)\}$ a dokážte správnosť svojej konštrukcie.

5. Zostrojte *regulárnu* gramatiku generujúcu jazyk $L = a^*bba^*$ a dokážte správnosť svojej konštrukcie.

Platnosť nasledujúceho tvrdenia by mala byť intuitívne zrejmá: hovorí totiž, že ak z neterminálu $\xi$ vieme odvodiť slovo $x$, tak aj z ľubovoľného slova tvaru $u\xi v$ vieme na rovnaký počet krokov odvodiť slovo $uxv$. To evidentne pôjde prepisovaním neterminálu $\xi$ a toho, čo z neho vznikne – a to rovnakými pravidlami, ako keby bol na začiatku iba neterminál $\xi$. Cieľom nasledujúcej úlohy je túto ideu náležite sformalizovať.

6. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Dokážte, že ak pre $\xi \in N$, $x \in (N \cup T)^*$ a $n \in \mathbb{N}$ je $\xi \Rightarrow^n x$, tak aj pre všetky $u, v \in (N \cup T)^*$ je $u\xi v \Rightarrow^n uxv$. V dôsledku toho tiež $\xi \Rightarrow^* x$ implikuje $u\xi v \Rightarrow^* uxv$ pre všetky $u, v \in (N \cup T)^*$.

7. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika, nech $\xi \in N$ a $u, v, x \in (N \cup T)^*$ sú také, že $u\xi v \Rightarrow^* uxv$. Musí v takom prípade byť aj $\xi \Rightarrow^* x$?

V nasledujúcej úlohe ide opäť o dôkaz intuitívne zrejmého tvrdenia: slová odvoditeľné zo slova $u_0\xi_1u_1\xi_2u_2\ldots u_{k-1}\xi_ku_k$, kde $\xi_1, \ldots, \xi_k$ sú neterminály a $u_0, \ldots, u_k$ sú terminálne slová, sú práve všetky slová $u_0x_1u_1x_2u_2\ldots u_{k-1}x_ku_k$, kde pre $i = 1, \ldots, k$ je $x_i$ odvoditeľné z $\xi_i$. Ak je navyše výsledné slovo odvoditeľné na $n$ krokov, musia existovať také odvodenia slov $x_i$ z neterminálov $\xi_i$, že súčet ich dĺžok je $n$.

8. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika, $\xi_1, \ldots, \xi_k \in N$, $u_0, \ldots, u_k \in T^*$ a $n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že pre $w \in (N \cup T)^*$ je $u_0\xi_1u_1\xi_2u_2\ldots u_{k-1}\xi_ku_k \Rightarrow^n w$ práve vtedy, keď existujú $x_1, \ldots, x_k \in (N \cup T)^*$ a $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ také, že $w = u_0x_1u_1x_2u_2\ldots u_{k-1}x_ku_k$, $n_1 + \ldots + n_k = n$ a pre $i = 1, \ldots, k$ je $\xi_i \Rightarrow^{n_i} x_i$.

   V dôsledku toho $u_0\xi_1u_1\xi_2u_2\ldots u_{k-1}\xi_ku_k \Rightarrow^* w$ práve vtedy, keď existujú $x_1, \ldots, x_k \in (N \cup T)^*$ také, že $w = u_0x_1u_1x_2u_2\ldots u_{k-1}x_ku_k$ a pre $i = 1, \ldots, k$ je $\xi_i \Rightarrow^* x_i$.

   V prípade potreby môžete bez dôkazu použiť tvrdenie z úlohy 6.

Nech $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ a $\Sigma_k$ je abeceda obsahujúca ľavé a pravé zátvorky $k$ rôznych druhov; ľavú zátvorku $i$-teho druhu budeme pre $i = 1, \ldots, k$ kvôli prehľadnosti označovať $a_i$ a príslušnú pravú zátvorku budeme označovať $\overline{a}_i$. Čiže $\Sigma_k = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k\}$.

*Dyckov jazyk* $D_k$ pozostáva zo všetkých *dobre uzátvorkovaných* slov nad abecedou $\Sigma_k$, čiže, voľne povedané, zo všetkých dobre uzátvorkovaných výrazov, z ktorých vymažeme všetko okrem zátvoriek. Formálne môžeme jazyk $D_k$ definovať takto:

(*i*) $\varepsilon \in D_k$;

(*ii*) pre všetky $u, v \in D_k$ a $i = 1, \ldots, k$ je $a_iu\overline{a}_iv \in D_k$;

(*iii*) nič iné nie je v $D_k$.

9. K ľubovoľnému danému $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ zostrojte bezkontextovú gramatiku $G_k = (N_k, T_k, P_k, \sigma_k)$ takú, že $L(G_k) = D_k$ a dokážte správnosť svojej konštrukcie.

   (Pri konštrukcii gramatiky môže byť výhodné inšpirovať sa horeuvedenou induktívnou definíciou jazyka $D_k$. Pri dokazovaní správnosti konštrukcie zas v prípade potreby môžete – aj bez dôkazu – využiť tvrdenie z úlohy 8.)

10. Dokážte, že Dyckov jazyk $D_1$ pozostáva z práve všetkých slov $w$ nad abecedou $\Sigma_1 = \{a_1, \overline{a}_1\}$ takých, že $\#_{a_1}(w) = \#_{\overline{a}_1}(w)$ a pre všetky prefixy $u$ slova $w$ je $\#_{a_1}(u) \geq \#_{\overline{a}_1}(u)$.