Sada úloh na cvičenie č. 6

Prípadom alebo *inštanciou* Postovho korešpondenčného problému (PKP) nad abecedou Σ nazývame trojicu (Δ, f, g), kde $\Delta = \{1, \ldots, n\}$ s $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ je abeceda a $f, g\colon \Delta^* \to \Sigma^*$ sú nevymazávajúce homomorfizmy. To zodpovedá sade n dlaždíc

$$\boxed{\begin{array}{c} f(1) \\ \hline g(1) \end{array}}\boxed{\begin{array}{c} f(2) \\ \hline g(2) \end{array}}\cdots\boxed{\begin{array}{c} f(n) \\ \hline g(n) \end{array}}.$$

Riešením prípadu PKP (Δ, f, g) nazývame slovo $x \in \Delta^+$ také, že $f(x) = g(x)$.

Prípadom modifikovaného Postovho korešpondenčného problému (MPKP) rozumieme trojicu (Δ, f, g) definovanú rovnakým spôsobom ako pri PKP. Od riešenia ale navyše požadujeme, aby začínalo prvou dlaždicou – rozumieme ním teda slovo $x \in 1\Delta^*$ také, že $f(x) = g(x)$.

1. Uvažujme prípad MPKP pozostávajúci z nasledujúcej sady dlaždíc:

$$\boxed{\begin{array}{c} aab \\ \hline a \end{array}}\boxed{\begin{array}{c} aa \\ \hline a \end{array}}\boxed{\begin{array}{c} bba \\ \hline aa \end{array}}\boxed{\begin{array}{c} a \\ \hline ab \end{array}}\boxed{\begin{array}{c} a \\ \hline aaaa \end{array}}.$$

   a) Zapíšte tento prípad formálne ako trojicu (Δ, f, g).
   b) Štandardnou konštrukciou zostrojte prípad PKP, ktorý má riešenie práve vtedy, keď má riešenie uvedený prípad MPKP.
   c) Nájdite riešenie uvedeného prípadu MPKP a k nemu prislúchajúce riešenie ekvivalentného prípadu PKP.

2. Preverte rozhodnuteľnosť PKP nad unárnou abecedou $\Sigma = \{a\}$.

Hovoríme, že rozhodovacie problémy $P, R \subseteq \Sigma^*$ sú *rovnako ťažké* (vzhľadom na turingovskú redukciu) alebo *turingovsky ekvivalentné*, ak súčasne $P \leq_T R$ a $R \leq_T P$.

3. Uvažujme rozhodovací problém, kde na vstupe je prípad PKP s jednou označenou dlaždicou a treba rozhodnúť, či existuje jeho riešenie obsahujúce aspoň jeden výskyt označenej dlaždice. Zistite, či je tento problém (vzhľadom na turingovskú redukciu) rovnako ťažký ako PKP. Svoje tvrdenie dokážte.

4. Uvažujme rozhodovací problém, kde na vstupe je prípad PKP s jednou označenou dlaždicou a treba rozhodnúť, či existuje jeho riešenie obsahujúce práve dva výskyty označenej dlaždice. Zistite, či je tento problém (vzhľadom na turingovskú redukciu) rovnako ťažký ako PKP. Svoje tvrdenie dokážte.

5. Uvažujme rozhodovací problém, kde na vstupe je prípad PKP, v ktorom je každá dlaždica ofarbená bielou alebo čiernou farbou a treba rozhodnúť, či existuje jeho riešenie obsahujúce z každej farby aspoň jednu dlaždicu. Zistite, či je tento problém (vzhľadom na turingovskú redukciu) rovnako ťažký ako PKP. Svoje tvrdenie dokážte.

6. Uvažujme rozhodovací problém, kde na vstupe je prípad PKP, v ktorom je každá dlaždica ofarbená bielou alebo čiernou farbou a dve prirodzené čísla m, n; treba rozhodnúť, či existuje riešenie daného prípadu PKP obsahujúce najviac m bielych a najviac n čiernych dlaždíc. Zistite, či je tento problém (vzhľadom na turingovskú redukciu) rovnako ťažký ako PKP. Svoje tvrdenie dokážte.

7. Uvažujme rozhodovací problém, kde na vstupe je prípad PKP, v ktorom je každá dlaždica ofarbená bielou alebo čiernou farbou a treba rozhodnúť, či existuje jeho riešenie obsahujúce nepárny počet čiernych dlaždíc. Zistite, či je tento problém (vzhľadom na turingovskú redukciu) rovnako ťažký ako PKP. Svoje tvrdenie dokážte.

8. Zistite, či existuje algoritmus, ktorý pre danú dvojicu a-prekladačov M_1, M_2 so vstupnou abecedou Σ rozhodne, či existuje slovo $w \in \Sigma^*$ také, že $M_1(w) = M_2(w)$.

9. Zistite, či existuje algoritmus rozhodujúci ekvivalenciu dvojice a-prekladačov s rovnakými vstupnými abecedami – pre dané dva a-prekladače M_1, M_2 so vstupnou abecedou Σ je teda potrebné rozhodnúť, či pre všetky $L \subseteq \Sigma^*$ je $M_1(L) = M_2(L)$.