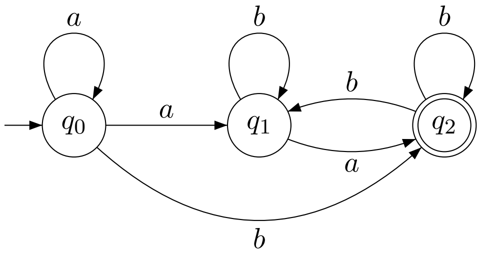
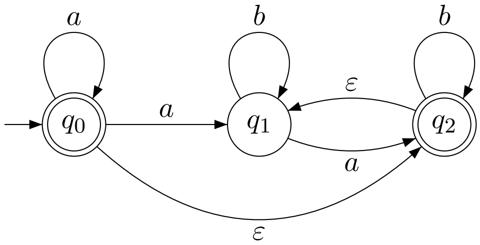
Sada úloh na cvičenie č. 7

1. Uvažujme nedeterministický konečný automat A nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ daný nasledujúcim diagramom.



Štandardnou konštrukciou z prednášky zostrojte *deterministický* konečný automat A' ekvivalentný automatu A.

2. Uvažujme nedeterministický konečný automat A nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ daný nasledujúcim diagramom.



Štandardnou konštrukciou z prednášky zostrojte regulárnu gramatiku G takú, že $L(G) = L(A)$.

3. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je regulárna gramatika taká, že $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to b\sigma \mid aa\alpha \mid b \\ \alpha &\to a\beta \mid b\sigma \mid \varepsilon \\ \beta &\to ab\beta \mid \beta \mid b\}. \end{aligned}$$

Štandardnou konštrukciou z prednášky zostrojte nedeterministický konečný automat A taký, že $L(A) = L(G)$.

4. Formálne definujte nedeterministický konečný automat s *množinou* počiatočných stavov. Takýto automat má akceptovať práve všetky slová, na ktorých existuje výpočet z niektorého počiatočného do niektorého koncového stavu.

Definujte tiež konfiguráciu, krok výpočtu a jazyk akceptovaný takýmto automatom a dokážte, že vami definovaný model je rovnako silný ako konečné automaty z prednášky.

5. Formálne definujte variant nedeterministického konečného automatu, tzv. „automat s pružnou hlavou", ktorý môže v rámci jedného prechodu prečítať nielen písmeno alebo prázdne slovo, ale aj nejaké dlhšie slovo – avšak za predpokladu, že v automate bude stále iba konečne veľa prechodov.

Definujte tiež konfiguráciu, krok výpočtu a jazyk akceptovaný takýmto automatom a dokážte, že vami definovaný model je rovnako silný ako konečné automaty z prednášky.

Stav $q \in K$ nedeterministického konečného automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme *dosiahnuteľným*, ak existuje $u \in \Sigma^*$ také, že $(q_0, u) \vdash^* (q, \varepsilon)$ a *spätne dosiahnuteľným*, ak existuje $v \in \Sigma^*$ také, že pre nejaký akceptačný stav $q_F \in F$ je $(q, v) \vdash^* (q_F, \varepsilon)$. Stav automatu nazveme *užitočným*, ak je súčasne dosiahnuteľný aj spätne dosiahnuteľný.

6. Dokážte, že každý regulárny jazyk $L \neq \emptyset$ je akceptovaný nejakým nedeterministickým konečným automatom obsahujúcim iba užitočné stavy.

Nedeterministické konečné automaty $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ také, že pre všetky $q \in K$ a $c \in \Sigma$ je $|\delta(q, c)| \leq 1$ a $\delta(q, \varepsilon) = \emptyset$, sa obyčajne zvyknú považovať za deterministické, hoci tieto objekty úplne nevyhovujú definícii deterministického konečného automatu z prednášky. Môžeme ich nazvať napríklad *deterministickými konečnými automatmi s neúplnou prechodovou funkciou.*

7. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat s neúplnou prechodovou funkciou (v zmysle horeuvedenej definície). Opíšte konštrukciu k nemu ekvivalentného deterministického konečného automatu (v zmysle definície z prednášky), ktorého množina stavov vznikne z množiny K pridaním najviac jedného nového stavu. Neformálne zdôvodnite správnosť svojej konštrukcie.

Za deterministické možno považovať aj také nedeterministické konečné automaty $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, že pre všetky $q \in K$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ je $|\delta(q, z)| \leq 1$ a $\delta(q, \varepsilon) = \emptyset$ kedykoľvek existuje $c \in \Sigma$ také, že $\delta(q, c) \neq \emptyset$. Od deterministického konečného automatu s neúplnou prechodovou funkciou sa tieto automaty líšia tým, že môžu obsahovať aj prechody na prázdne slovo vedúce z tých stavov automatu, z ktorých nevedie žiaden prechod na písmeno. Takéto automaty môžeme nazvať *deterministickými konečnými automatmi s prechodmi na prázdne slovo.*

8. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat s prechodmi na prázdne slovo. Opíšte konštrukciu k nemu ekvivalentného deterministického konečného automatu s neúplnou prechodovou funkciou, ktorého množina stavov bude oproti pôvodnému automatu nezmenená. Neformálne zdôvodnite správnosť svojej konštrukcie.

Nech $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme *k-značným*, ak pre všetky $w \in L(A)$ existuje najviac k akceptačných výpočtov automatu A na slove w. Automat A nazveme *jednoznačným*, ak je 1-značný a *konečne viacznačným*, ak je k-značný pre nejaké $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

9. Nech $L = a^*b^*$. Nájdite príklad „bezepsilonového" nedeterministického konečného automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ akceptujúceho jazyk L, ktorý:
   a) je jednoznačný, ale nie je deterministický (s neúplnou prechodovou funkciou);
   b) je konečne viacznačný, ale nie je jednoznačný;
   c) nie je konečne viacznačný.

   Svoje tvrdenia aspoň neformálne zdôvodnite.

Bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ je *zľava lineárna*, ak $P \subseteq N \times (NT^* \cup T^*)$.

10. Dokážte, že trieda všetkých jazykov generovaných zľava lineárnymi gramatikami je rovná triede všetkých regulárnych jazykov $\mathscr{R}$.