Sada úloh na cvičenie č. 8

1. Zistite, či je jazyk $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ regulárny. Svoje tvrdenie dokážte.
2. Zistite, či je jazyk $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ regulárny. Svoje tvrdenie dokážte.
3. Zistite, či je jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ regulárny. Svoje tvrdenie dokážte.
4. Zistite, či je jazyk $L = \{uv \in \{a,b\}^* \mid u,v \in \{a,b\}^*;\ u = u^R\}$ regulárny. Svoje tvrdenie dokážte.
5. Zistite, či je jazyk $L = \{ucv \in \{a,b\}^* \mid u,v \in \{a,b\}^*;\ u = u^R\}$ regulárny. Svoje tvrdenie dokážte.
6. Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na kladnú iteráciu. Svoje tvrdenie dokážte.

Nech Σ je abeceda. *Prefixovým uzáverom* jazyka $L \subseteq \Sigma^*$ nazveme jazyk

$$\mathrm{pref}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : uv \in L\}.$$

Hovoríme, že trieda jazykov $\mathscr{L}$ je *prefixovo uzavretá*, ak pre všetky $L \in \mathscr{L}$ je aj $\mathrm{pref}(L) \in \mathscr{L}$.

7. Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ prefixovo uzavretá. Svoje tvrdenie dokážte.

Nech Σ je abeceda. *Pravým kvocientom* jazyka $L \subseteq \Sigma^*$ podľa slova $x \in \Sigma^*$ nazveme jazyk

$$L/x = \{w \in \Sigma^* \mid wx \in L\}.$$

Pre ľubovoľný jazyk $L' \subseteq \Sigma^*$ ďalej nazveme *pravým kvocientom* jazyka L podľa jazyka L' jazyk

$$L/L' = \bigcup_{x \in L'} (L/x) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in L' : wx \in L\}.$$

8. Nájdite čo možno najväčšiu triedu jazykov $\mathscr{L}$ takú, že trieda $\mathscr{R}$ je uzavretá na pravý kvocient podľa jazyka z $\mathscr{L}$.

Nech $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk nad abecedou Σ. Pripomeňme si, že *komutatívnym uzáverom* jazyka L nazývame jazyk

$$[L] = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in L\ \forall c \in \Sigma : \#_c(u) = \#_c(v)\}.$$

Jazyk $[L]$ tak obsahuje všetky slová u nad abecedou Σ, z ktorých možno vhodným „poprehadzovaním“ písmen získať nejaké slovo v z jazyka L. Keby sme teda písmenám dovolili navzájom komutovať a slová líšiace sa iba poradím písmen by sme považovali za ekvivalentné, pozostával by jazyk $[L]$ z práve všetkých slov ekvivalentných niektorému slovu z L. Odtiaľ pomenovanie „komutatívny uzáver“.

Hovoríme, že trieda jazykov $\mathscr{L}$ je *komutatívne uzavretá*, ak pre všetky $L \in \mathscr{L}$ je aj $[L] \in \mathscr{L}$.

9. Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ komutatívne uzavretá. Svoje tvrdenie dokážte.

Pre jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ nad abecedou Σ označíme ako $\mathrm{MIN}(L)$ jazyk všetkých slov w z jazyka L takých, že žiaden vlastný prefix slova w – t. j. žiaden prefix slova w okrem slova w samotného – nie je v jazyku L:

$$\mathrm{MIN}(L) = \{w \in L \mid w \neq uv \text{ pre žiadne } u \in L \text{ a } v \in \Sigma^+\}.$$

10. Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na operáciu MIN. Svoje tvrdenie dokážte.
11. Pre ľubovoľný jazyk L položme $\square(L) := \{ww \mid w \in L\}$. Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na operáciu $\square$ a svoje tvrdenie dokážte.

Pripomeňme si, že pre ľubovoľnú abecedu Σ a jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je $\sqrt{L} = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L\}$.

12. Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na „odmocninu“. Svoje tvrdenie dokážte.