

Sada úloh na cvičenie č. 9

1. Skonstruujte zásobníkový automat akceptujúci (stavom alebo prázdny zásobníkom) jazyk $L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$. Správnosť svojej konštrukcie zdôvodnite.
2. Skonstruujte zásobníkový automat akceptujúci (stavom alebo prázdny zásobníkom) jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$. Správnosť svojej konštrukcie zdôvodnite.
3. Skonstruujte zásobníkový automat akceptujúci (stavom alebo prázdny zásobníkom) jazyk $L = \{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^*; |u| < |v|\}$. Správnosť svojej konštrukcie zdôvodnite.
4. Skonstruujte zásobníkový automat akceptujúci (stavom alebo prázdny zásobníkom) jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \neq w^R\}$. Správnosť svojej konštrukcie zdôvodnite.

Nech $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ a Σ_k je abeceda obsahujúca ľavé a pravé zátvorky k rôznych druhov; ľavú zátvorku i -teho druhu budeme pre $i = 1, \dots, k$ kvôli prehľadnosti označovať a_i a príslušnú pravú zátvorku budeme označovať \bar{a}_i . Čiže $\Sigma_k = \{a_1, \dots, a_k\} \cup \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k\}$.

Pripomeňme si, že *Dyckov jazyk* D_k pozostáva zo všetkých *dobre uzátvorkovaných* slov nad abecedou Σ_k – čiže, voľne povedané, zo všetkých dobre uzátvorkovaných výrazov, z ktorých vymažeme všetko okrem zátvoriek. Formálne môžeme jazyk D_k definovať takto:

- (i) $\varepsilon \in D_k$;
- (ii) pre všetky $u, v \in D_k$ a $i = 1, \dots, k$ je $a_i u \bar{a}_i v \in D_k$;
- (iii) nič iné nie je v D_k .

5. K danému $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ skonstruujte zásobníkový automat akceptujúci (stavom alebo prázdny zásobníkom) jazyk D_k . Správnosť svojej konštrukcie zdôvodnite.
6. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je nedeterministický konečný automat. Formálne opíšte *priamu* konštrukciu zásobníkového automatu A' s množinou stavov K a jediným zásobníkovým symbolom takého, že $L(A') = L(A)$.
7. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je nedeterministický konečný automat. Formálne opíšte *priamu* konštrukciu zásobníkového automatu A' s jediným stavom takého, že $N(A') = L(A)$.
8. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$P = \{\sigma \rightarrow a\sigma\alpha \mid b\beta\beta \mid a \\ \alpha \rightarrow \alpha a \mid \alpha\alpha \mid \varepsilon \\ \beta \rightarrow a\beta b \mid b\beta\}.$$

Štandardnou konštrukciou zostrojíte zásobníkový automat A taký, že $N(A) = L(G)$.

9. Uvažujme zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, c, d\}$, $F = \emptyset$ a prechodová funkcia δ obsahuje nasledujúce prechody:

$$\delta(q_0, a, c) \ni (q_0, \varepsilon), \\ \delta(q_0, b, d) \ni (q_1, c), \\ \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) \ni (q_0, Z_0 c d).$$

Predpokladajme, že sme štandardným postupom z prednášky zostrojili bezkontextovú gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ takú, že $L(G) = N(A)$. Nájdite pravidlá gramatiky G zodpovedajúce horeuvedeným prechodom automatu A .

10. Dokážte, že ku každému zásobníkovému automatu A existuje ekvivalentný zásobníkový automat $A' = (K', \Sigma', \Gamma', \delta', q'_0, Z'_0, F')$ taký, že pre všetky $(q, z, Z) \in K' \times (\Sigma' \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma'$ je

$$\delta'(q, z, Z) \subseteq K' \times (\{\varepsilon\} \cup \{Z\} \cup Z\Gamma').$$

V každom kroku výpočtu sa teda popri zmene stavu buď zo zásobníka odoberie práve jeden symbol, alebo zostane jeho obsah nezmenený, alebo sa doň pridá práve jeden nový symbol. Uvažujte akceptáciu stavom.

11. Dokážte, že ku každému zásobníkovému automatu A' v normálnom tvare z predchádzajúcej úlohy existuje ekvivalentný zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ taký, že pre všetky $(q, z, Z) \in K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$ je

$$\delta(q, z, Z) \subseteq K \times (\{\varepsilon\} \cup Z\Gamma).$$

V každom kroku výpočtu sa teda buď práve jeden symbol zo zásobníka odoberie, alebo sa doň práve jeden nový symbol pridá. Opäť uvažujte akceptáciu stavom.

12. Pre daný zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ označme ako $B(A)$ jazyk slov akceptovaných týmto automatom *súčasne* stavom aj prázdny zásobník – t. j.

$$B(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F : (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

- a) Musí byť pre každý zásobníkový automat A jazyk $B(A)$ bezkontextový?
- b) Existuje ku každému $L \in \mathcal{L}_{CF}$ zásobníkový automat A taký, že $B(A) = L$?

Svoje tvrdenia dokážte.