

## Sada úloh na cvičenie č. 10

1. Zistite, či je jazyk  $L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  bezkontextový. Svoje tvrdenie dokážte.
2. Zistite, či je jazyk  $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$  bezkontextový. Svoje tvrdenie dokážte.
3. Zistite, či je jazyk  $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}^C$  bezkontextový. Svoje tvrdenie dokážte.
4. Zistite, či je jazyk  $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$  bezkontextový. Svoje tvrdenie dokážte.
5. Zistite, či je trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  uzavretá na spočítateľne nekonečné zjednotenie – musí byť pre ľubovoľnú postupnosť  $(L_k)_{k=0}^\infty$  bezkontextových jazykov bezkontextový aj jazyk  $\bigcup_{k=0}^\infty L_k$ ?
6. Zistite, či je trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  uzavretá na kladnú iteráciu. Svoje tvrdenie dokážte.

Nech  $\Sigma$  je abeceda. Pripomeňme si, že *prefixovým uzáverom* jazyka  $L \subseteq \Sigma^*$  nazývame jazyk

$$\text{pref}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : uv \in L\}.$$

Hovoríme, že trieda jazykov  $\mathcal{L}$  je *prefixovo uzavretá*, ak pre všetky  $L \in \mathcal{L}$  je aj  $\text{pref}(L) \in \mathcal{L}$ .

7. Zistite, či je trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  prefixovo uzavretá. Svoje tvrdenie dokážte.

Nech  $\Sigma$  je abeceda. Pripomeňme si, že *pravým kvocientom* jazyka  $L \subseteq \Sigma^*$  podľa slova  $x \in \Sigma^*$  nazývame jazyk

$$L/x = \{w \in \Sigma^* \mid wx \in L\}.$$

Pre ľubovoľný jazyk  $L' \subseteq \Sigma^*$  ďalej nazývame *pravým kvocientom* jazyka  $L$  podľa jazyka  $L'$  jazyk

$$L/L' = \bigcup_{x \in L'} (L/x) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in L' : wx \in L\}.$$

8. Dokážte, že jazyk  $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  možno vyjadriť ako kvocient  $L/L'$ , kde  $L, L' \in \mathcal{L}_{CF}$  sú vhodné jazyky – trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  teda nie je uzavretá na pravý kvocient (podľa bezkontextového jazyka).
9. Zistite, či je trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  uzavretá na pravý kvocient podľa regulárneho jazyka. Svoje tvrdenie dokážte.

Pripomeňme si, že operácia „*shuffle*“ je pre ľubovoľnú dvojicu jazykov  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  definovaná nasledovne:

$$L_1 \sqcup L_2 = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_n v_n \mid n \in \mathbb{N}; u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Sigma^*; u_1 \dots u_n \in L_1; v_1 \dots v_n \in L_2\}.$$

10. Zistite, či je trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  uzavretá na operáciu „*shuffle*“. Svoje tvrdenie dokážte.
11. Zistite, či je trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  uzavretá na „*shuffle*“ s regulárnym jazykom. Inými slovami: zistite, či pre všetky  $L_1 \in \mathcal{L}_{CF}$  a  $L_2 \in \mathcal{R}$  musí byť  $L_1 \sqcup L_2 \in \mathcal{L}_{CF}$ . Svoje tvrdenie dokážte.
12. Pre ľubovoľný jazyk  $L$  položme  $\text{pal}(L) := \{w \in L \mid w = w^R\}$ . Zistite, či je trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  uzavretá na operáciu  $\text{pal}$  a svoje tvrdenie dokážte.
13. Pre ľubovoľný jazyk  $L$  položme  $\square(L) := \{ww \mid w \in L\}$ . Zistite, či je trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  uzavretá na operáciu  $\square$  a svoje tvrdenie dokážte.

Pripomeňme si, že pre ľubovoľnú abecedu  $\Sigma$  a jazyk  $L \subseteq \Sigma^*$  je  $\sqrt{L} = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L\}$ .

14. Zistite, či je trieda  $\mathcal{L}_{CF}$  uzavretá na „*odmocninu*“. Svoje tvrdenie dokážte.

■ Nasledujúca úloha už je zameraná na látku, ktorej sa na cvičeniach budeme venovať budúci týždeň.

15. Formálne skonštruujte deterministický Turingov stroj akceptujúci jazyk  $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .