

Sada úloh na cvičenie č. 11

V úlohách 1 až 7 je potrebné Turingov stroj opísať formálne na úrovni prechodovej funkcie. V úlohách 8 až 11 stačí konštrukciu Turingovho stroja opísať slovne; tento opis by však mal byť dostatočne podrobný na to, aby na základe neho bolo v prípade potreby možné zrekonštruovať aj samotnú prechodovú funkciu.

1. Skonstruujte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj akceptujúci jazyk

$$L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}.$$

2. Skonstruujte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj akceptujúci jazyk

$$L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

3. Skonstruujte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj akceptujúci jazyk

$$L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

4. Skonstruujte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj akceptujúci jazyk

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \exists x \in a^* : wx = (wx)^R\}.$$

5. Skonstruujte deterministický Turingov stroj, ktorý na vstupe $a^m \# a^n$ pre $m, n \in \mathbb{N}$ upraví obsah pásky na $a^m \# a^n \# a^{mn}$ a zastaví sa. Stroj môže v prípade potreby zapisovať aj symbol „blank“.

6. Skonstruujte deterministický Turingov stroj, ktorý pracuje ako binárny inkrement: vstupný reťazec nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$, reprezentujúci binárny zápis čísla n , upraví na binárny reťazec reprezentujúci číslo $n + 1$ a zastaví sa. Stroj môže v prípade potreby na pásku zapisovať aj symbol „blank“.

7. Skonstruujte deterministický Turingov stroj, ktorý pracuje ako binárna sčítačka: vstupný reťazec tvaru $u \# v$, kde u, v sú binárne reťazce reprezentujúce čísla m resp. n , upraví na binárny reťazec reprezentujúci číslo $m + n$ a zastaví sa. Stroj môže v prípade potreby na pásku zapisovať aj symbol „blank“.

Nech Σ je abeceda. Pripomeňme si, že *pravým kvocientom* jazyka $L \subseteq \Sigma^*$ podľa slova $x \in \Sigma^*$ nazývame jazyk

$$L/x = \{w \in \Sigma^* \mid wx \in L\}.$$

Pre ľubovoľný jazyk $L' \subseteq \Sigma^*$ ďalej nazývame *pravým kvocientom* jazyka L podľa jazyka L' jazyk

$$L/L' = \bigcup_{x \in L'} (L/x) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in L' : wx \in L\}.$$

8. Zistite, či je trieda \mathcal{L}_{RE} uzavretá na pravý kvocient (podľa rekurzívne vyčísliteľného jazyka). Svoje tvrdenie dokážte.

Pripomeňme si, že operácia „shuffle“ je pre ľubovoľnú dvojicu jazykov $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ definovaná nasledovne:

$$L_1 \sqcup L_2 = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_n v_n \mid n \in \mathbb{N}; u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Sigma^*; u_1 \dots u_n \in L_1; v_1 \dots v_n \in L_2\}.$$

9. Zistite, či je trieda \mathcal{L}_{RE} uzavretá na operáciu „shuffle“. Svoje tvrdenie dokážte.
10. Pre ľubovoľný jazyk L položme $\square(L) := \{ww \mid w \in L\}$. Zistite, či je trieda \mathcal{L}_{RE} uzavretá na operáciu \square a svoje tvrdenie dokážte.

■ Pripomeňme si, že pre ľubovoľnú abecedu Σ a jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je $\sqrt{L} = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L\}$.

11. Zistite, či je trieda \mathcal{L}_{RE} uzavretá na „odmocninu“. Svoje tvrdenie dokážte.