Riešenia prvej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

11. októbra 2023

Úloha 1. Nech L_1, L_2, L_3 sú jazyky. Porovnajte jazyky $L_1 \backslash (L_2 \cup L_3)$ a $(L_1 \backslash L_2) \cup (L_1 \backslash L_3)$.

Riešenie. Dokážeme, že $L_1 \backslash (L_2 \cup L_3) = (L_1 \backslash L_2) \cup (L_1 \backslash L_3)$.

$\subseteq$: Nech $w \in L_1 \backslash (L_2 \cup L_3)$. Potom existuje $x \in L_1$, pre ktoré je $xw \in L_2 \cup L_3$. To znamená, že $xw \in L_2$ alebo $xw \in L_3$. Ak $xw \in L_2$, je $w \in L_1 \backslash L_2$, a teda aj $w \in (L_1 \backslash L_2) \cup (L_1 \backslash L_3)$. Ak $xw \in L_3$, je $w \in L_1 \backslash L_3$, a teda opäť $w \in (L_1 \backslash L_2) \cup (L_1 \backslash L_3)$.

$\supseteq$: Nech $w \in (L_1 \backslash L_2) \cup (L_1 \backslash L_3)$. Potom $w \in L_1 \backslash L_2$ alebo $w \in L_1 \backslash L_3$. Ak $w \in L_1 \backslash L_2$, musí existovať $x \in L_1$ také, že $xw \in L_2$. Potom ale tiež $xw \in L_2 \cup L_3$, z čoho $w \in L_1 \backslash (L_2 \cup L_3)$. Podobne pre $w \in L_1 \backslash L_3$ existuje $x \in L_1$ také, že $xw \in L_3$ – z toho $xw \in L_2 \cup L_3$, a teda $w \in L_1 \backslash (L_2 \cup L_3)$. □

Úloha 2.

a) Nech Σ, Γ sú abecedy, $L \subseteq \Sigma^*$ jazyk a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ homomorfizmus. Porovnajte jazyky $h(\mathrm{pref}(L))$ a $\mathrm{pref}(h(L))$.

b) Nech Σ, Γ sú abecedy, $L \subseteq \Gamma^*$ jazyk a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ homomorfizmus. Porovnajte jazyky $h^{-1}(\mathrm{pref}(L))$ a $\mathrm{pref}(h^{-1}(L))$.

Riešenie.

a) Dokážeme, že $h(\mathrm{pref}(L)) \subseteq \mathrm{pref}(h(L))$, kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

$\subseteq$: Nech $w \in h(\mathrm{pref}(L))$. Potom existuje $u \in \mathrm{pref}(L)$ také, že $w = h(u)$. Keďže $u \in \mathrm{pref}(L)$, existuje $v \in \Sigma^*$ také, že $uv \in L$. Potom ale $h(uv) \in h(L)$, z čoho

$$wh(v) = h(u)h(v) = h(uv) \in h(L),$$

a teda $w \in \mathrm{pref}(h(L))$.

$\not\supseteq$: Nech $\Sigma = \Gamma = \{a\}$ a nech $h\colon a^* \to a^*$ je daný ako $h(a) = aa$. Nech $L = \{a\}$. Potom $h(\mathrm{pref}(L)) = h(\{\varepsilon, a\}) = \{\varepsilon, aa\}$, kým $\mathrm{pref}(h(L)) = \mathrm{pref}(\{aa\}) = \{\varepsilon, a, aa\}$. Evidentne $h(\mathrm{pref}(L)) \not\supseteq \mathrm{pref}(h(L))$.

b) Dokážeme, že $h^{-1}(\mathrm{pref}(L)) \supseteq \mathrm{pref}(h^{-1}(L))$, kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

$\not\subseteq$: Uvažujme abecedy $\Sigma = \Gamma = \{a\}$ a homomorfizmus $h\colon a^* \to a^*$ daný ako $h(a) = aa$. Nech $L = \{a\}$. Potom $\mathrm{pref}(L) = \{\varepsilon, a\}$, a teda $h^{-1}(\mathrm{pref}(L)) = \{\varepsilon\}$. Na druhej strane ale $h^{-1}(L) = \emptyset$, z čoho $\mathrm{pref}(h^{-1}(L)) = \emptyset$. Evidentne $h^{-1}(\mathrm{pref}(L)) \not\subseteq \mathrm{pref}(h^{-1}(L))$.

$\supseteq$: Nech $w \in \mathrm{pref}(h^{-1}(L))$. Potom existuje $v \in \Sigma^*$ také, že $wv \in h^{-1}(L)$, z čoho $h(wv) \in L$. Potom ale aj $h(w)h(v) = h(wv) \in L$, a teda $h(w) \in \mathrm{pref}(L)$, z čoho napokon dostávame $w \in h^{-1}(\mathrm{pref}(L))$. □