Riešenia druhej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

28. októbra 2024

Úloha 1. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk

$$L = \{uca^icb^jcv \mid u, v \in \{a, b\}^*;\ i, j \in \mathbb{N};\ \#_a(u) = i;\ \#_b(v) = j\}$$

(nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$). Správnosť svojej konštrukcie dokážte poriadnou matematickou indukciou.

Riešenie. Dokážeme, že jazyk L je generovaný bezkontextovou gramatikou $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b, c\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to \alpha c\beta \\ \alpha &\to a\alpha a \mid b\alpha \mid c \\ \beta &\to b\beta b \mid \beta a \mid c\}. \end{aligned}$$

Namiesto rovnosti $L(G) = L$ dokážeme silnejšie tvrdenie $F(G) = F$, kde jazyk F je daný ako

$$F = \{\sigma\} \cup \{usa^icb^jtv \mid u, v \in \{a, b\}^*;\ i, j \in \mathbb{N};\ s \in \{\alpha, c\};\ t \in \{\beta, c\};\ \#_a(u) = i;\ \#_b(v) = j\}.$$

Zrejme $F \cap T^* = L$, takže z rovnosti $F(G) = F$ naozaj vyplynie aj $L(G) = L$.

$\subseteq$: Nech $x \in F(G)$, čiže $\sigma \Rightarrow^n x$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Indukciou vzhľadom na n dokážeme, že $x \in F$.

Pre $n = 0$ je $x = \sigma$, a teda $x \in F$. Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre $n = k$ a uvažujme $n = k + 1$. Nech $\sigma \Rightarrow^{k+1} x$. Pre nejaké $y \in (N \cup T)^*$ potom $\sigma \Rightarrow^k y \Rightarrow x$, pričom na odvodenie $\sigma \Rightarrow^k y$ sa vzťahuje indukčný predpoklad. To znamená, že $y \in F$.

Ak $y = \sigma$, musí slovo x vzniknúť zo slova y použitím pravidla $\sigma \to \alpha c\beta$, a teda $x = \alpha c\beta \in F$.

V opačnom prípade $y = usa^icb^jtv$ pre nejaké $i, j \in \mathbb{N}$, $s \in \{\alpha, c\}$, $t \in \{\beta, c\}$ a $u, v \in \{a, b\}^*$ také, že $\#_a(u) = i$ a $\#_b(v) = j$. Keďže $y \Rightarrow x$, musí nastať jedna z dvoch nasledujúcich situácií:

a) Je $s = \alpha$ a slovo x vznikne zo slova y použitím niektorého z pravidiel na jediný výskyt neterminálu α v slove y. V prípade, že ide o pravidlo $\alpha \to a\alpha a$, je $x = ua\alpha a^{i+1}cb^jtv$, pričom $\#_a(ua) = \#_a(u) + 1 = i + 1$ a $\#_b(v) = j$; to znamená, že $x \in F$. V prípade použitia pravidla $\alpha \to b\alpha$ je $x = ub\alpha a^icb^jtv$, pričom $\#_a(ub) = \#_a(u) = i$ a $\#_b(v) = j$; opäť teda $x \in F$. Použitím pravidla $\alpha \to c$ napokon dostaneme $x = uca^icb^jtv$, kde $\#_a(u) = i$ a $\#_b(v) = j$ – čiže takisto $x \in F$.

b) Je $t = \beta$ a slovo x vznikne zo slova y použitím niektorého pravidla na jediný výskyt neterminálu β v slove y. V prípade použitia pravidla $\beta \to b\beta b$ je $x = usa^icb^{j+1}\beta bv$, pričom $\#_a(u) = i$ a $\#_b(bv) = \#_b(v) + 1 = j + 1$; v dôsledku toho $x \in F$. Použitím pravidla $\beta \to \beta a$ dostávame $x = usa^icb^j\beta av$, pričom $\#_a(u) = i$ a $\#_b(av) = \#_b(v) = j$ – opäť teda $x \in F$. Pri použití pravidla $\beta \to c$ napokon dostávame $x = usa^icb^jcv$, kde $\#_a(u) = i$ a $\#_b(v) = j$ a aj v tomto prípade zisťujeme, že $x \in F$.

$\supseteq$: Dokážeme, že všetky slová x v jazyku F sú vetnými formami v gramatike G.

Ak $x = \sigma$, je $\sigma \Rightarrow^0 \sigma = x$, a teda aj $\sigma \Rightarrow^* x$.

Indukciou vzhľadom na i ďalej dokážme, že pre všetky $i \in \mathbb{N}$ sú vetnými formami v G všetky slová $x = u\alpha a^ic\beta$, kde $i \in \mathbb{N}$ a $u \in \{a, b\}^*$ je slovo také, že $\#_a(u) = i$. Pre $i = 0$ je $x = b^\ell\alpha c\beta$ pre nejaké $\ell \in \mathbb{N}$ a indukciou vzhľadom na ℓ ľahko dokážeme, že $\sigma \Rightarrow^* x$: pre $\ell = 0$ je $\sigma \Rightarrow \alpha c\beta = x$; ak ďalej predpokladáme platnosť tvrdenia pre $\ell = m$, pre $\ell = m + 1$ z indukčného predpokladu dostávame $\sigma \Rightarrow^* b^m\alpha c\beta \Rightarrow b^{m+1}\alpha c\beta = x$, kde v poslednom kroku sme použili pravidlo $\alpha \to b\alpha$. Predpokladajme teraz, že dokazované tvrdenie platí

pre $i = k$ a uvažujme $i = k + 1$. V takom prípade je $x = u\alpha a^{k+1}c\beta$, kde $u \in \{a, b\}^*$ je také, že $\#_a(u) = k + 1$. Nutne potom $u = u'ab^\ell$ pre nejaké $\ell \in \mathbb{N}$ a $u' \in \{a, b\}^*$ také, že $\#_a(u') = k$. Z indukčného predpokladu dostávame $\sigma \Rightarrow^* u'\alpha a^k c\beta$ a indukciou vzhľadom na ℓ tak môžeme dokázať $\sigma \Rightarrow^* u'ab^\ell\alpha a^{k+1}c\beta = x$. Pre $\ell = 0$ z dokázaného skutočne vyplýva $\sigma \Rightarrow^* u'\alpha a^k c\beta \Rightarrow u'a\alpha a^{k+1}c\beta$, kde v poslednom kroku bolo použité pravidlo $\alpha \to a\alpha a$; ak ďalej pre $\ell = m$ je $\sigma \Rightarrow^* u'ab^m\alpha a^{k+1}c\beta$, tak aj pre $\ell = m + 1$ použitím pravidla $\alpha \to b\alpha$ dostávame $\sigma \Rightarrow^* u'ab^m\alpha a^{k+1}c\beta \Rightarrow u'ab^{m+1}\alpha a^{k+1}c\beta$.

Indukciou vzhľadom na j teraz dokážme, že pre všetky $i, j \in \mathbb{N}$ a všetky slová $u, v \in \{a, b\}^*$ spĺňajúce $\#_a(u) = i$ a $\#_b(v) = j$ je slovo $x = u\alpha a^i cb^j\beta v$ vetnou formou v G. Pre $j = 0$ je $x = u\alpha a^i c\beta a^\ell$ pre nejaké $i \in \mathbb{N}$, $u \in \{a, b\}^*$ s $\#_a(u) = i$ a $\ell \in \mathbb{N}$; indukciou vzhľadom na ℓ dokážeme, že $\sigma \Rightarrow^* x$. Pre $\ell = 0$ už máme dokázané $\sigma \Rightarrow^* u\alpha a^i c\beta$; ak teraz predpokladáme platnosť tvrdenia pre $\ell = m$, pre $\ell = m + 1$ z indukčného predpokladu dostávame $\sigma \Rightarrow^* u\alpha a^i c\beta a^m \Rightarrow u\alpha a^i c\beta a^{m+1}$, kde v poslednom kroku bolo použité pravidlo $\beta \to \beta a$. Nech teraz dokazované tvrdenie platí pre $j = k$; uvažujme $j = k + 1$. Nech $x = u\alpha a^i cb^{k+1}\beta v$ pre nejaké $v \in \{a, b\}^*$ také, že $\#_b(v) = k + 1$. Potom $v = a^\ell bv'$ pre nejaké $\ell \in \mathbb{N}$ a $v' \in \{a, b\}^*$ také, že $\#_b(v') = k$. Z indukčného predpokladu potom $\sigma \Rightarrow^* u\alpha a^i cb^k\beta v'$ a indukciou vzhľadom na ℓ môžeme dokázať aj $\sigma \Rightarrow^* x$: pre $\ell = 0$ je $\sigma \Rightarrow^* u\alpha a^i cb^k\beta v' \Rightarrow u\alpha a^i cb^{k+1}\beta bv' = x$, kde v poslednom kroku bolo použité pravidlo $\beta \to b\beta b$; ak tvrdenie platí pre $\ell = m$, pre $\ell = m + 1$ z indukčného predpokladu dostávame $\sigma \Rightarrow^* u\alpha a^i cb^{k+1}\beta a^m bv' \Rightarrow u\alpha a^i cb^{k+1}\beta a^{m+1}bv' = x$, kde v poslednom kroku bolo použité pravidlo $\beta \to \beta a$.

Pre všetky $i, j \in \mathbb{N}$ a $u, v \in \{a, b\}^*$ s $\#_a(u) = i$ a $\#_b(v) = j$ napokon s použitím dokázaného a pravidiel $\alpha \to c$ resp. $\beta \to c$ dostávame

$$\begin{aligned}
\sigma &\Rightarrow^* u\alpha a^i cb^j\beta v \Rightarrow uca^i cb^j\beta v,\\
\sigma &\Rightarrow^* u\alpha a^i cb^j\beta v \Rightarrow u\alpha a^i cb^j cv,\\
\sigma &\Rightarrow^* u\alpha a^i cb^j\beta v \Rightarrow uca^i cb^j\beta v \Rightarrow uca^i cb^j cv,
\end{aligned}$$

takže všetky slová z jazyka F sú skutočne vetnými formami v gramatike G. □

Úloha 2. *Zovšeobecnenou bezkontextovou gramatikou* nazveme – iba pre účely tejto úlohy – štvoricu $G = (N, T, P, x)$, kde N je abeceda neterminálov, T je abeceda terminálov, $N \cap T = \emptyset$, $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ je konečná množina prepisovacích pravidiel a $x \in (N \cup T)^*$ je počiatočná vetná forma, tzv. *axióma*. Reláciu $\Rightarrow_G$ kroku odvodenia v gramatike G definujeme rovnako ako pre bezkontextové gramatiky a jazyk generovaný gramatikou G je daný ako

$$L(G) = \{w \in T^* \mid x \Rightarrow_G^* w\}.$$

Každá bezkontextová gramatika je evidentne zároveň aj zovšeobecnenou bezkontextovou gramatikou. Zistite, či ku každej zovšeobecnenej bezkontextovej gramatike G existuje bezkontextová gramatika G' taká, že $L(G') = L(G)$. Svoje tvrdenie dokážte; v prípade konštrukcie ekvivalentnej gramatiky G' dokážte jej správnosť poriadnou matematickou indukciou.

Riešenie. Dokážeme, že každá zovšeobecnená bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, x)$ je ekvivalentná bezkontextovej gramatike $G' = (N', T, P', \sigma)$, kde $\sigma \notin N \cup T$ je nový neterminál, $N' = N \cup \{\sigma\}$ a $P' = P \cup \{\sigma \to x\}$.

Aj pre zovšeobecnenú bezkontextovú gramatiku G môžeme definovať jazyk vetných foriem

$$F(G) = \{z \in (N \cup T)^* \mid x \Rightarrow_G^* z\};$$

evidentne $F(G) \cap T^* = L(G)$. Namiesto tvrdenia $L(G') = L(G)$ tak stačí dokázať silnejšie tvrdenie $F(G') = F(G) \cup \{\sigma\}$ – v takom prípade totiž

$$L(G') = F(G') \cap T^* = (F(G) \cup \{\sigma\}) \cap T^* = F(G) \cap T^* = L(G).$$

$\subseteq$: Nech $z \in F(G')$. Pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ potom $\sigma \Rightarrow_{G'}^{n} z$. Indukciou vzhľadom na n dokážeme, že $z \in F(G) \cup \{\sigma\}$.

Ak $n = 0$, nutne $z = \sigma \in F(G) \cup \{\sigma\}$. Predpokladajme teda platnosť tvrdenia pre $n = k$ a uvažujme $n = k+1$. Nech $z \in (N \cup T)^*$ je také, že $\sigma \Rightarrow_{G'}^{k+1} z$. Pre nejaké $y \in (N \cup T)^*$ potom $\sigma \Rightarrow_{G'}^{k} y \Rightarrow_{G'} z$. Keďže $\sigma \Rightarrow_{G'}^{k} y$, z indukčného predpokladu dostávame $y \in F(G) \cup \{\sigma\}$. Ak $y = \sigma$, musí slovo z vzniknúť zo σ použitím pravidla $\sigma \to x$, a teda $z = x \in F(G) \subseteq F(G) \cup \{\sigma\}$. Ak $y \in F(G)$, nutne $\#_\sigma(y) = 0$ a slovo z musí vzniknúť z y použitím niektorého pravidla z P' na niektorý neterminál v slove y. Keďže $\#_\sigma(y) = 0$, nemôže ísť o pravidlo $\sigma \to x$, a teda musí byť použité pravidlo z P. To znamená, že aj $y \Rightarrow_G z$ a z predpokladu $y \in F(G)$ tak dostávame aj $z \in F(G) \subseteq F(G) \cup \{\sigma\}$.

$\supseteq$: Uvažujme teraz ľubovoľné $z \in F(G) \cup \{\sigma\}$ a dokážme, že $\sigma \Rightarrow_{G'}^{*} z$. Ak $z = \sigma$, je $\sigma \Rightarrow_{G'}^{0} \sigma = z$, a teda aj $\sigma \Rightarrow_{G'}^{*} z$. Ak $z \in F(G)$, pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ musí byť $x \Rightarrow_{G}^{n} z$. Indukciou vzhľadom na n dokážeme, že $\sigma \Rightarrow_{G'}^{*} z$.

Pre $n = 0$ je $z = x$ a v takom prípade je $\sigma \Rightarrow_{G'} x = z$, a teda aj $\sigma \Rightarrow_{G'}^{*} z$. Predpokladajme teraz platnosť tvrdenia pre $n = k$ a uvažujme $n = k + 1$. Nech $z \in (N \cup T)^*$ je také, že $x \Rightarrow_{G}^{k+1} z$. Pre nejaké $y \in (N \cup T)^*$ je v takom prípade $x \Rightarrow_{G}^{k} y \Rightarrow_{G} z$. Z indukčného predpokladu potom $\sigma \Rightarrow_{G'}^{*} y$ a keďže $P \subseteq P'$, nutne aj $\sigma \Rightarrow_{G'}^{*} y \Rightarrow_{G'} z$. $\square$