Riešenia tretej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

8. novembra 2023

Úloha 1. Nech $m \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné pevne dané prirodzené číslo. Zostrojte (deterministický alebo nedeterministický) konečný automat A_m akceptujúci jazyk

$$L_m = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = m\}.$$

Správnosť svojej konštrukcie dokážte matematickou indukciou.

Riešenie. Dokážeme, že jazyk L_m zo zadania je akceptovaný deterministickým konečným automatom $A_m = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde: $K = \{0, \ldots, m+1\}$; $\Sigma = \{a, b\}$; pre všetky $q \in K$ je

$$\delta(q,a) = \begin{cases} q+1 & \text{ak } q \in \{0,\ldots,m\}, \\ q & \text{ak } q = m+1, \end{cases}$$
$$\delta(q,b) = q;$$

$q_0 = 0$; a $F = \{m\}$.

Sformulujeme teraz invarianty, ktorých platnosť budeme dokazovať pre jednotlivé stavy automatu A_m. Pre všetky $q \in \{0, \ldots, m\}$ dokážeme invariant

$$I_q\colon\ \forall w \in \Sigma^* : (0,w) \vdash^* (q,\varepsilon) \iff \#_a(w) = q;$$

pre stav $m+1$ napokon dokážeme invariant

$$I_{m+1}\colon\ \forall w \in \Sigma^* : (0,w) \vdash^* (m+1,\varepsilon) \iff \#_a(w) \geq m+1.$$

⇒: Matematickou indukciou vzhľadom na n dokážeme, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platia implikácie

$$I'_q\colon\ \forall w \in \Sigma^* : (0,w) \vdash^n (q,\varepsilon) \Rightarrow \#_a(w) = q$$

pre všetky $q \in \{0, \ldots, m\}$, ako aj implikácia

$$I'_{m+1}\colon\ \forall w \in \Sigma^* : (0,w) \vdash^n (m+1,\varepsilon) \Rightarrow \#_a(w) \geq m+1.$$

1. Pre $n = 0$ môže byť ľavá strana pravdivá iba pri implikácii I'_0. V takom prípade je $w = \varepsilon$ a $q = 0$, pričom $\#_a(w) = \#_a(\varepsilon) = 0 = q$.
2. Predpokladajme platnosť implikácií $I'_0, \ldots, I'_{m+1}$ pre $n = k$ a uvažujme $n = k+1$.
   Pre $n = k+1$ najprv dokážeme implikácie $I'_0, \ldots, I'_m$. Uvažujme teda situáciu, keď pre nejaké $q \in \{0, \ldots, m\}$ a $w \in \Sigma^*$ je $(0,w) \vdash^{k+1} (q,\varepsilon)$. Potom existujú $u \in \Sigma^*$ a $c \in \Sigma$ také, že $w = uc$ a
   $$(0,uc) \vdash^k (p,c) \vdash (q,\varepsilon)$$
   pre nejaký stav $p \in K$. V takom prípade nutne $\delta(p,c) = q$ a z definície prechodovej funkcie automatu A_m teda vyplýva, že buď $p = q$ a $c = b$, alebo $q > 0$, $p = q-1$ a $c = a$. V prvom prípade je z indukčného predpokladu $\#_a(u) = p = q$, a teda aj $\#_a(w) = \#_a(uc) = \#_a(ub) = q$. V zostávajúcom prípade zas $\#_a(u) = p = q-1$, z čoho opäť $\#_a(w) = \#_a(uc) = \#_a(ua) = q$. Implikácia I'_q je teda dokázaná aj pre $n = k+1$.
   Zostáva pre $n = k+1$ dokázať aj poslednú implikáciu I'_{m+1}. Nech teda $w \in \Sigma^*$ je také, že $(0,w) \vdash^{k+1} (m+1,\varepsilon)$. Potom existujú $u \in \Sigma^*$ a $c \in \Sigma$ také, že $w = uc$ a
   $$(0,uc) \vdash^k (p,c) \vdash (m+1,\varepsilon)$$
   pre nejaký stav $p \in K$. Z toho $\delta(p,c) = m+1$ a z definície prechodovej funkcie vidíme, že môžu nastať tri možnosti: $p = m$ a $c = a$, $p = m+1$ a $c = a$, alebo $p = m+1$ a $c = b$. V prvom prípade z indukčného predpokladu dostávame $\#_a(u) = m$, z čoho $\#_a(w) = \#_a(ua) \geq m+1$. Vo zvyšných dvoch prípadoch zas z indukčného predpokladu máme $\#_a(u) \geq m+1$, a teda aj $\#_a(w) = \#_a(uc) \geq m+1$. Pre $n = k+1$ sme teda dokázali aj implikáciu I'_{m+1}.

$\Leftarrow$: Z úplnosti prechodovej funkcie deterministického konečného automatu A_m vyplýva, že pre každé slovo $w \in \Sigma^*$ existuje stav $q \in K$ taký, že $(0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$. Ak $\#_a(w) = p$ pre nejaké $p \in \{0, \ldots, m\}$, nutne musí byť $q = p$; v opačnom prípade by totiž z implikácií $I'_0, \ldots, I'_{m+1}$ dokázaných vyššie vyplývalo, že musí byť buď $\#_a(w) = q \neq p$ (ak $q \in \{0, \ldots, m\}$), alebo $\#_a(w) \geq m + 1 > p$ (ak $q = m + 1$). V oboch prípadoch by išlo o spor s rovnosťou $\#_a(w) = p$. Podobne ak $\#_a(w) \geq m + 1$, musí byť $q = m + 1$, pretože v opačnom prípade by sme vďaka implikáciám $I'_0, \ldots, I'_{m+1}$ dostali $\#_a(w) = q < m + 1$, čo je opäť spor.

Keďže je m jediným akceptačným stavom automatu A_m, slovo $w \in \Sigma^*$ patrí do jazyka $L(A_m)$ práve vtedy, keď $(0, w) \vdash^* (m, \varepsilon)$. To ale vďaka invariantu I_m nastane práve vtedy, keď $\#_a(w) = m$, čiže keď $w \in L_m$. Skutočne teda $L(A_m) = L_m$. $\square$

Úloha 2. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je „bezepsilonový“ nedeterministický konečný automat – teda nedeterministický konečný automat taký, že $\delta(q, \varepsilon) = \emptyset$ pre všetky $q \in K$. Matematickou indukciou dokážte, že ak pre $w \in \Sigma^*$, $n \in \mathbb{N}$ a $q \in K$ je $(q_0, w) \vdash^n (q, \varepsilon)$, tak nutne $n = |w|$.

Riešenie. Indukciou vzhľadom na n dokážeme o niečo silnejšie tvrdenie: ak pre $w \in \Sigma^*$, $n \in \mathbb{N}$ a $p, q \in K$ je $(p, w) \vdash^n (q, \varepsilon)$, tak nutne $n = |w|$.

Pre $n = 0$ musí byť $q = p$ a $w = \varepsilon$, pričom $|w| = |\varepsilon| = 0 = n$. Nech teraz tvrdenie platí pre $n = k$ a uvažujme $n = k + 1$. Ak $(p, w) \vdash^{k+1} (q, \varepsilon)$ pre nejaké $w \in \Sigma^*$ a $p, q \in K$, nutne existujú $r \in K$ a $x \in \Sigma^*$ také, že

$$(p, w) \vdash (r, x) \vdash^k (q, \varepsilon).$$

Zo vzťahu $(p, w) \vdash (r, x)$ vyplýva $w = zx$ pre nejaké $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $r \in \delta(p, z)$; keďže je pritom automat A „bezepsilonový“, je $z \in \Sigma$. Na výpočet $(r, x) \vdash^k (q, \varepsilon)$ sa navyše vzťahuje indukčný predpoklad, podľa ktorého je $|x| = k$. Preto $|w| = |zx| = |x| + 1 = k + 1$, čo bolo treba dokázať. $\square$