Riešenia tretej sady domácich úloh

Peter Kostolányi

11. novembra 2024

Úloha 1. Nech $i, j \in \mathbb{N}$ sú *ľubovoľné* pevne dané prirodzené čísla. Zostrojte (deterministický alebo nedeterministický) konečný automat $A_{i,j}$ akceptujúci jazyk

$$L_{i,j} = (a^i b)^* \cup (a^j b)^*.$$

Správnosť svojej konštrukcie dokážte poriadnou matematickou indukciou.

Riešenie. Dokážeme, že jazyk $L_{i,j}$ zo zadania úlohy je akceptovaný nedeterministickým konečným automatom $A_{i,j} = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{q_0\} \cup \{p_0, \ldots, p_i\} \cup \{r_0, \ldots, r_j\}$, $\Sigma = \{a, b\}$,

$$\begin{aligned}
&\delta(q_0, \varepsilon) = \{p_0, r_0\}, \\
&\delta(p_t, a) = \{p_{t+1}\} && \text{pre } t = 0, \ldots, i-1, \\
&\delta(p_i, b) = \{p_0\}, \\
&\delta(r_t, a) = \{r_{t+1}\} && \text{pre } t = 0, \ldots, j-1, \\
&\delta(r_j, b) = \{r_0\},
\end{aligned}$$

$\delta(q, z) = \emptyset$ pre všetky ďalšie dvojice $(q, z) \in K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$ a $F = \{p_0, r_0\}$.

Sformulujeme teraz invarianty, ktorých platnosť budeme dokazovať pre jednotlivé stavy automatu $A_{i,j}$. Pre stav q_0 dokážeme invariant

$$I_{q_0}\colon\ \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^* (q_0, \varepsilon) \iff w = \varepsilon;$$

pre $t = 0, \ldots, i$ ďalej dokážeme invariant

$$I_{p_t}\colon\ \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^* (p_t, \varepsilon) \iff w = (a^i b)^s a^t \text{ pre nejaké } s \in \mathbb{N};$$

pre $t = 0, \ldots, j$ napokon dokážeme invariant

$$I_{r_t}\colon\ \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^* (r_t, \varepsilon) \iff w = (a^j b)^s a^t \text{ pre nejaké } s \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow$: Matematickou indukciou vzhľadom na n dokážeme pre všetky $n \in \mathbb{N}$ implikáciu

$$I'_{q_0}\colon\ \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^n (q_0, \varepsilon) \Rightarrow w = \varepsilon,$$

implikácie

$$I'_{p_t}\colon\ \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^n (p_t, \varepsilon) \Rightarrow w = (a^i b)^s a^t \text{ pre nejaké } s \in \mathbb{N}$$

pre $t = 0, \ldots, i$ a implikácie

$$I'_{r_t}\colon\ \forall w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^n (r_t, \varepsilon) \Rightarrow w = (a^j b)^s a^t \text{ pre nejaké } s \in \mathbb{N}.$$

pre $t = 0, \ldots, j$.

1. Pre $n = 0$ môže byť ľavá strana pravdivá iba pri implikácii I'_{q_0}, pričom zároveň $w = \varepsilon$.
2. Predpokladajme platnosť dokazovaných implikácií pre $n = k$ a uvažujme $n = k + 1$.
   Pre $n = k+1$ najprv dokážeme implikáciu I'_{q_0} – nech $w \in \Sigma^*$ je také, že $(q_0, w) \vdash^{k+1} (q_0, \varepsilon)$. Potom existujú $u \in \Sigma^*$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $w = uz$ a

$$(q_0, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (q_0, \varepsilon)$$

pre nejaký stav $q \in K$. V takom prípade nutne $q_0 \in \delta(q, z)$ – žiadne také $q \in K$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ ale v automate $A_{i,j}$ neexistujú. To znamená, že ľavá strana implikácie I'_{q_0} nie je pre $n = k + 1$ nikdy splnená a implikácia ako celok je teda pravdivá.

Pokračujme implikáciami $I'_{p_0}, \ldots, I'_{p_i}$. Uvažujme teda situáciu, keď pre nejaké $t \in \{0, \ldots, i\}$ a $w \in \Sigma^*$ je $(q_0, w) \vdash^{k+1} (p_t, \varepsilon)$. Potom existujú $u \in \Sigma^*$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $w = uz$ a

$$(q_0, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (p_t, \varepsilon)$$

pre nejaký stav $q \in K$. V takom prípade je $p_t \in \delta(q, z)$ a z definície prechodovej funkcie automatu $A_{i,j}$ teda vyplýva, že nastane jeden z nasledujúcich troch prípadov:

a) Ak $t > 0$, $q = p_{t-1}$ a $z = a$, je podľa indukčného predpokladu $u = (a^i b)^s a^{t-1}$ pre nejaké $s \in \mathbb{N}$. Potom ale tiež $w = ua = (a^i b)^s a^t$.

b) Ak $t = 0$, $q = q_0$ a $z = \varepsilon$, je podľa indukčného predpokladu $u = \varepsilon$, z čoho $w = u = \varepsilon = (a^i b)^0 a^0$.

c) Ak $t = 0$, $q = p_i$ a $z = b$, je podľa indukčného predpokladu $u = (a^i b)^s a^i$ pre nejaké $s \in \mathbb{N}$, z čoho $w = ub = (a^i b)^s a^i b = (a^i b)^{s+1} a^0$.

Zostáva dokázať implikácie $I'_{r_0}, \ldots, I'_{r_j}$. Nech teda pre nejaké $t \in \{0, \ldots, j\}$ a $w \in \Sigma^*$ je $(q_0, w) \vdash^{k+1} (r_t, \varepsilon)$. Potom existujú $u \in \Sigma^*$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $w = uz$ a

$$(q_0, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (r_t, \varepsilon)$$

pre nejaký stav $q \in K$. Z toho $r_t \in \delta(q, z)$ a podľa definície prechodovej funkcie automatu $A_{i,j}$ musí nastať jeden z nasledujúcich troch prípadov:

a) Ak $t > 0$, $q = r_{t-1}$ a $z = a$, je podľa indukčného predpokladu $u = (a^j b)^s a^{t-1}$ pre nejaké $s \in \mathbb{N}$. Potom ale tiež $w = ua = (a^j b)^s a^t$.

b) Ak $t = 0$, $q = q_0$ a $z = \varepsilon$, je podľa indukčného predpokladu $u = \varepsilon$, z čoho $w = u = \varepsilon = (a^j b)^0 a^0$.

c) Ak $t = 0$, $q = r_j$ a $z = b$, je podľa indukčného predpokladu $u = (a^j b)^s a^j$ pre nejaké $s \in \mathbb{N}$, z čoho $w = ub = (a^j b)^s a^j b = (a^j b)^{s+1} a^0$.

$\Leftarrow$: Nech $w \in \Sigma^*$. Platnosť implikácie

$$I''_{q_0}: \ w = \varepsilon \Rightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_0, \varepsilon)$$

vyplýva zo skutočnosti, že $\vdash^0$ je identická relácia. Pre $t = 0, \ldots, i$ teraz dokážme implikácie

$$I''_{p_t}: \ w = (a^i b)^s a^t \text{ pre nejaké } s \in \mathbb{N} \Rightarrow (q_0, w) \vdash^* (p_t, \varepsilon).$$

Matematickou indukciou vzhľadom na s.

1. Pre $s = 0$ dokazujme matematickou indukciou vzhľadom na t.
   1.1. Ak $s = t = 0$, je $w = \varepsilon$ a $(q_0, \varepsilon) \vdash (p_0, \varepsilon)$.
   1.2. Predpokladajme platnosť dokazovaného tvrdenia pre $s = 0$ a $t = k < i$ a uvažujme $t = k + 1$. Potom $w = a^{k+1}$, pričom z indukčného predpokladu je $(q_0, a^k) \vdash^* (p_k, \varepsilon)$. V takom prípade ale tiež $(q_0, a^{k+1}) \vdash^* (p_k, a) \vdash (p_{k+1}, \varepsilon)$.
2. Predpokladajme platnosť dokazovaných implikácií pre $s = \ell$ a uvažujme $s = \ell + 1$; ďalej opäť dokazujme indukciou vzhľadom na t.
   2.1. Pre $t = 0$ je $w = (a^i b)^{\ell+1} = (a^i b)^\ell a^i b$. Z predpokladu platnosti implikácie I''_{p_i} pre $s = \ell$ pritom $(q_0, (a^i b)^\ell a^i) \vdash^* (p_i, \varepsilon)$, z čoho $(q_0, (a^i b)^\ell a^i b) \vdash^* (p_i, b) \vdash (p_0, \varepsilon)$.
   2.2. Predpokladajme platnosť dokazovaného tvrdenia pre $s = \ell + 1$ a $t = k < i$ a uvažujme $t = k + 1$. Potom $w = (a^i b)^{\ell+1} a^{k+1}$, pričom z indukčného predpokladu je $(q_0, (a^i b)^{\ell+1} a^k) \vdash^* (p_k, \varepsilon)$ – preto aj $(q_0, (a^i b)^{\ell+1} a^{k+1}) \vdash^* (p_k, a) \vdash (p_{k+1}, \varepsilon)$.

Obdobným spôsobom teraz pre $t = 0, \ldots, j$ matematickou indukciou vzhľadom na s dokážeme implikácie

$$I''_{r_t}\colon\ w = (a^j b)^s a^t \text{ pre nejaké } s \in \mathbb{N} \Rightarrow (q_0, w) \vdash^* (r_t, \varepsilon).$$

1. Nech $s = 0$. Bázu indukcie dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na t.
   1.1. Ak $s = t = 0$, je $w = \varepsilon$ a $(q_0, \varepsilon) \vdash (r_0, \varepsilon)$.
   1.2. Predpokladajme platnosť dokazovaného tvrdenia pre $s = 0$ a $t = k < j$ a uvažujme $t = k + 1$. Potom $w = a^{k+1}$, pričom z indukčného predpokladu je $(q_0, a^k) \vdash^* (r_k, \varepsilon)$. V dôsledku toho ale $(q_0, a^{k+1}) \vdash^* (r_k, a) \vdash (r_{k+1}, \varepsilon)$.
2. Predpokladajme platnosť dokazovaných implikácií pre $s = \ell$ a uvažujme $s = \ell + 1$; ďalej opäť dokazujme indukciou vzhľadom na t.
   2.1. Pre $t = 0$ je $w = (a^j b)^{\ell+1} = (a^j b)^\ell a^j b$. Z predpokladu platnosti implikácie I''_{r_j} pre $s = \ell$ je $(q_0, (a^j b)^\ell a^j) \vdash^* (r_j, \varepsilon)$, z čoho $(q_0, (a^j b)^\ell a^j b) \vdash^* (r_j, b) \vdash (r_0, \varepsilon)$.
   2.2. Predpokladajme platnosť dokazovaného tvrdenia pre $s = \ell + 1$ a $t = k < i$ a uvažujme $t = k + 1$. Potom $w = (a^j b)^{\ell+1} a^{k+1}$, pričom z indukčného predpokladu je $(q_0, (a^j b)^{\ell+1} a^k) \vdash^* (r_k, \varepsilon)$. Z toho $(q_0, (a^j b)^{\ell+1} a^{k+1}) \vdash^* (r_k, a) \vdash (r_{k+1}, \varepsilon)$.

Keďže sú jedinými dvoma akceptačnými stavmi automatu $A_{i,j}$ stavy p_0 a q_0, patrí slovo $w \in \Sigma^*$ do jazyka $L(A_{i,j})$ práve vtedy, keď $(q_0, w) \vdash^* (p_0, \varepsilon)$ alebo $(q_0, w) \vdash^* (r_0, \varepsilon)$. To ale vďaka invariantom I_{p_0} a I_{r_0} nastane práve vtedy, keď existuje $s \in \mathbb{N}$ také, že $w = (a^i b)^s$ alebo $w = (a^j b)^s$ – čiže práve vtedy, keď $w \in (a^i b)^*$ alebo $w \in (a^j b)^*$. Zisťujeme teda, že $w \in L(A_{i,j})$ práve vtedy, keď $w \in (a^i b)^* \cup (a^j b)^* = L_{i,j}$ – vďaka čomu je skutočne $L(A_{i,j}) = L_{i,j}$. $\square$

Úloha 2. Deterministickým konečným *poloautomatom* rozumieme deterministický konečný automat bez počiatočných a koncových stavov – ide teda o trojicu $A = (K, \Sigma, \delta)$, kde K je neprázdna konečná množina stavov, Σ je vstupná abeceda a $\delta\colon K \times \Sigma \to K$ je prechodová funkcia.

Rovnako ako pre konečné automaty nazveme *konfiguráciou* deterministického konečného poloautomatu $A = (K, \Sigma, \delta)$ dvojicu (q, w), kde $q \in K$ je stav a $w \in \Sigma^*$ reprezentuje nedočítanú časť vstupného slova. *Krok výpočtu* takéhoto poloautomatu A je binárna relácia $\vdash_A$ na množine jeho konfigurácií taká, že pre $p, q \in K$ a $u, v \in \Sigma^*$ je $(p, u) \vdash_A (q, v)$ práve vtedy, keď existuje $c \in \Sigma$ také, že $u = cv$ a $\delta(p, c) = q$.

Pre deterministický konečný poloautomat $A = (K, \Sigma, \delta)$ a jazyk L budeme písať $L \in \mathscr{L}(A)$, ak pre nejaké $q_0 \in K$ a $F \subseteq K$ deterministický konečný automat $A_{q_0,F} = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ akceptuje jazyk L – čiže $L(A_{q_0,F}) = L$. Evidentne tak dostávame konečnú triedu jazykov $\mathscr{L}(A) \subseteq \mathscr{R}$.

Nech $A_1 = (K_1, \Sigma, \delta_1)$, $A_2 = (K_2, \Sigma, \delta_2)$ sú deterministické konečné poloautomaty nad spoločnou abecedou Σ. Deterministický konečný poloautomat $A_1 \times A_2$ definujeme ako

$$A_1 \times A_2 = (K_1 \times K_2, \Sigma, \delta),$$

kde pre všetky $p \in K_1$, $q \in K_2$ a $c \in \Sigma$ je $\delta([p, q], c) = [\delta_1(p, c), \delta_2(q, c)]$.

a) Nech $A_1 = (K_1, \Sigma, \delta_1)$, $A_2 = (K_2, \Sigma, \delta_2)$ sú deterministické konečné poloautomaty nad abecedou Σ. Matematickou indukciou dokážte, že pre všetky $p_1, p_2 \in K_1$, $q_1, q_2 \in K_2$ a $w \in \Sigma^*$ je

$$([p_1, q_1], w) \vdash^*_{A_1 \times A_2} ([p_2, q_2], \varepsilon)$$

práve vtedy, keď $(p_1, w) \vdash^*_{A_1} (p_2, \varepsilon)$ a zároveň $(q_1, w) \vdash^*_{A_2} (q_2, \varepsilon)$.

b) Nech A_1, A_2 sú deterministické konečné poloautomaty nad abecedou Σ a $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ sú jazyky také, že $L_1 \in \mathscr{L}(A_1)$ a $L_2 \in \mathscr{L}(A_2)$. Dokážte, že jazyky L_1, L_2, $L_1 \cup L_2$ a $L_1 \cap L_2$ patria do $\mathscr{L}(A_1 \times A_2)$.

Riešenie.

a) Dokážme najprv pomocné tvrdenie: *nech $A = (K, \Sigma, \delta)$ je deterministický konečný poloautomat a pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in K$ a $w \in \Sigma^*$ je $(p, w) \vdash_A^n (q, \varepsilon)$; potom nutne $n = |w|$.* Pre $n = 0$ skutočne musí byť $w = \varepsilon$ a $n = 0 = |w|$. Ak ďalej predpokladáme platnosť tvrdenia pre $n = k$ a $(p, w) \vdash_A^{k+1} (q, \varepsilon)$, existujú $q' \in K$, $x \in \Sigma^*$ a $c \in \Sigma$ také, že $w = xc$ a $(p, xc) \vdash_A^k (q', c) \vdash_A (q, \varepsilon)$; z indukčného predpokladu teda $k = |x|$, z čoho $k + 1 = |xc| = |w|$.

Nech teraz $A_1 \times A_2 = (K_1 \times K_2, \Sigma, \delta)$. Vďaka dokázanému pomocnému tvrdeniu[1] stačí dokázať, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a všetky $p_1, p_2 \in K_1$, $q_1, q_2 \in K_2$ a $w \in \Sigma^*$ je $([p_1, q_1], w) \vdash_{A_1 \times A_2}^n ([p_2, q_2], \varepsilon)$ práve vtedy, keď $(p_1, w) \vdash_{A_1}^n (p_2, \varepsilon)$ a súčasne $(q_1, w) \vdash_{A_2}^n (q_2, \varepsilon)$. Indukciou vzhľadom na n.

Pre $n = 0$ je $([p_1, q_1], w) \vdash_{A_1 \times A_2}^0 ([p_2, q_2], \varepsilon)$ práve vtedy, keď $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ a $w = \varepsilon$, čo nastane vtedy a len vtedy, keď $(p_1, w) \vdash_{A_1}^0 (p_2, \varepsilon)$ a zároveň $(q_1, w) \vdash_{A_2}^0 (q_2, \varepsilon)$.

Predpokladajme teraz platnosť dokazovaného tvrdenia pre $n = k$ a uvažujme $n = k + 1$. Nech $p_1, p_2 \in K_1$, $q_1, q_2 \in K_2$ a $w \in \Sigma^*$. Potom $([p_1, q_1], w) \vdash_{A_1 \times A_2}^{k+1} ([p_2, q_2], \varepsilon)$ práve vtedy, keď existujú $x \in \Sigma^*$, $c \in \Sigma$, $p \in K_1$ a $q \in K_2$ také, že $w = xc$ a

$$([p_1, q_1], xc) \vdash_{A_1 \times A_2}^k ([p, q], c) \vdash_{A_1 \times A_2} ([p_2, q_2], \varepsilon)$$

– čiže súčasne

$$([p_1, q_1], x) \vdash_{A_1 \times A_2}^k ([p, q], \varepsilon) \qquad \text{a} \qquad ([p, q], c) \vdash_{A_1 \times A_2} ([p_2, q_2], \varepsilon).$$

To podľa indukčného predpokladu nastane práve vtedy, keď

$$(p_1, x) \vdash_{A_1}^k (p, \varepsilon), \qquad (q_1, x) \vdash_{A_2}^k (q, \varepsilon) \qquad \text{a} \qquad ([p, q], c) \vdash_{A_1 \times A_2} ([p_2, q_2], \varepsilon).$$

Keďže $([p, q], c) \vdash_{A_1 \times A_2} ([p_2, q_2], \varepsilon)$, musí byť $\delta([p, q], c) = [p_2, q_2]$. To podľa definície poloautomatu $A_1 \times A_2$ nastane práve vtedy, keď $\delta_1(p, c) = p_2$ a $\delta_2(q, c) = q_2$ – čiže práve vtedy, keď $(p, c) \vdash_{A_1} (p_2, \varepsilon)$ a $(q, c) \vdash_{A_2} (q_2, \varepsilon)$. Zisťujeme teda, že $([p_1, q_1], w) \vdash_{A_1 \times A_2}^{k+1} ([p_2, q_2], \varepsilon)$ práve vtedy, keď existujú $x \in \Sigma^*$, $c \in \Sigma$, $p \in K_1$ a $q \in K_2$ také, že $w = xc$,

$$(p_1, x) \vdash_{A_1}^k (p, \varepsilon), \qquad (p, c) \vdash_{A_1} (p_2, \varepsilon), \qquad (q_1, x) \vdash_{A_2}^k (q, \varepsilon) \qquad \text{a} \qquad (q, c) \vdash_{A_2} (q_2, \varepsilon)$$

– čiže $(p_1, w) \vdash_{A_1}^{k+1} (p_2, \varepsilon)$ a $(q_1, w) \vdash_{A_2}^{k+1} (q_2, \varepsilon)$.

b) Nech $A_1 \times A_2 = (K_1 \times K_2, \Sigma, \delta)$ a nech $B_1 = (K_1, \Sigma, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$ a $B_2 = (K_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$ sú deterministické konečné automaty také, že $L(B_1) = L_1$ a $L(B_2) = L_2$. Dokážeme, že jazyky $L_1, L_2, L_1 \cup L_2$ a $L_1 \cap L_2$ sú postupne akceptované nasledujúcimi deterministickými konečnými automatmi:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (K_1 \times K_2, \Sigma, \delta, [q_{0,1}, q_{0,2}], F_1 \times K_2),\\
C_2 &= (K_1 \times K_2, \Sigma, \delta, [q_{0,1}, q_{0,2}], K_1 \times F_2),\\
C_\cup &= (K_1 \times K_2, \Sigma, \delta, [q_{0,1}, q_{0,2}], F_1 \times K_2 \cup K_1 \times F_2),\\
C_\cap &= (K_1 \times K_2, \Sigma, \delta, [q_{0,1}, q_{0,2}], F_1 \times F_2);
\end{aligned}$$

keďže sú prvé tri zložky všetkých týchto automatov zhodné s poloautomatom $A_1 \times A_2$, dokážeme tak pre všetky uvažované jazyky príslušnosť do $\mathscr{L}(A_1 \times A_2)$.

C_1: Pre $w \in \Sigma^*$ je $w \in L(C_1)$ práve vtedy, keď existujú stavy $p \in F_1$ a $q \in K_2$ také, že $([q_{0,1}, q_{0,2}], w) \vdash_{C_1}^* ([p, q], \varepsilon)$. Keďže $\vdash_{C_1} = \vdash_{A_1 \times A_2}$, je aj $\vdash_{C_1}^* = \vdash_{A_1 \times A_2}^*$ – uvedené tvrdenie je teda ekvivalentné existencii $p \in F_1$ a $q \in K_2$ takých, že $([q_{0,1}, q_{0,2}], w) \vdash_{A_1 \times A_2}^* ([p, q], \varepsilon)$. To podľa tvrdenia dokázaného v časti a) nastane práve vtedy, keď pre nejaké $p \in F_1$ a $q \in K_2$ je $(q_{0,1}, w) \vdash_{A_1}^* (p, \varepsilon)$ a $(q_{0,2}, w) \vdash_{A_2}^* (q, \varepsilon)$. Keďže $\vdash_{A_1} = \vdash_{B_1}$ a $\vdash_{A_2} = \vdash_{B_2}$ a v dôsledku toho sú si rovné aj reflexívno-tranzitívne uzávery týchto relácií, je uvedené tvrdenie ekvivalentné existencii $p \in F_1$ a $q \in K_2$ takých, že $(q_{0,1}, w) \vdash_{B_1}^* (p, \varepsilon)$ a $(q_{0,2}, w) \vdash_{B_2}^* (q, \varepsilon)$. To nastane práve vtedy, keď $w \in L(B_1) = L_1$, takže skutočne $L(C_1) = L_1$.

[1] Podľa tohto tvrdenia musí v prípade, že $(p_1, w) \vdash_{A_1}^* (p_2, \varepsilon)$ a $(q_1, w) \vdash_{A_2}^* (q_2, \varepsilon)$, byť súčasne aj $(p_1, w) \vdash_{A_1}^n (p_2, \varepsilon)$ a $(q_1, w) \vdash_{A_2}^n (q_2, \varepsilon)$ pre $n = |w|$.

C_2: Podobne ako vyššie je $w \in L(C_2)$ práve vtedy, keď existujú $p \in K_1$ a $q \in F_2$ také, že $([q_{0,1}, q_{0,2}], w) \vdash^*_{A_1 \times A_2} ([p, q], \varepsilon)$, čo vďaka tvrdeniu z časti a) nastane práve vtedy, keď $(q_{0,1}, w) \vdash^*_{A_1} (p, \varepsilon)$ a $(q_{0,2}, w) \vdash^*_{A_2} (q, \varepsilon)$ – čiže keď $w \in L(B_2) = L_2$. Naozaj teda $L(C_2) = L_2$.

$C_\cup$: Pre $w \in \Sigma^*$ je $w \in L(C_\cup)$ práve vtedy, keď existujú $p \in K_1$ a $q \in K_2$ také, že $p \in F_1$ alebo $q \in F_2$ a $([q_{0,1}, q_{0,2}], w) \vdash^*_{A_1 \times A_2} ([p, q], \varepsilon)$, čo je podľa tvrdenia z časti a) ekvivalentné tomu, že súčasne $(q_{0,1}, w) \vdash^*_{A_1} (p, \varepsilon)$ a $(q_{0,2}, w) \vdash^*_{A_2} (q, \varepsilon)$. To je ďalej ekvivalentné akceptácii slova w aspoň jedným z automatov B_1 a B_2, čiže príslušnosti w do $L(B_1) \cup L(B_2) = L_1 \cup L_2$. Skutočne teda $L(C_\cup) = L_1 \cup L_2$.

$C_\cap$: Podobne zisťujeme, že $w \in L(C_\cap)$ práve vtedy, keď existujú $p \in F_1$ a $q \in F_2$ také, že $([q_{0,1}, q_{0,2}], w) \vdash^*_{A_1 \times A_2} ([p, q], \varepsilon)$, t. j. $(q_{0,1}, w) \vdash^*_{A_1} (p, \varepsilon)$ a $(q_{0,2}, w) \vdash^*_{A_2} (q, \varepsilon)$. To je ekvivalentné príslušnosti slova w do jazyka $L(B_1) \cap L(B_2) = L_1 \cap L_2$ – dokázali sme teda, že $L(C_\cap) = L_1 \cap L_2$. $\square$